Ітераційний підхід до необумовленого оптимального вибору для певної категорії в роздрібній торгівлі

Мироненко Роман

Актуальність

Роздрібна торгівля - це динамічна галузь, яка постійно розвивається, то ж вибір оптимальної стратегії для певної категорії товарів є ключовим фактором успіху для магазинів роздрібної торговлі.

Мета

Мета дослідження полягає в застосуванні ітераційного підходу до управління товарним асортиментом в умовах невизначеності споживчих уподобань.

- Розглянемо категорію, що складається з товарів $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ki})^T$, які описують оборот конкретного товару у відповідному місяці. Вектор середніх значень - μ, а коваріаційна матриця - Σ. Вектор ваг - $w = (w_1, \ldots, w_k)^T$, де w_j позначає вагу j-го товару. Позначимо 1 - вектор одиниць, а I - одиничну матрицю.

	Місяць 1	…	Місяць K
Товар 1	45	…	65
Товар 2	67	…	23
…	…	…	…
Товар N	52	…	14

Кількості товарів

	Місяць 1	…	Місяць K
Товар 1	12500	…	14000
Товар 2	13450	…	6300
…	…	…	…
Товар N	8700	…	14000

Оборот товарів

Класична проблема відбору портфеля визначається як:

- $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} s.t. \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = q$

Розв’язок оптимізаційної проблеми:

- $\mathbf{w} = \frac{C - qB}{AC - B^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} + \frac{qA - B}{AC - B^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$,

де $A = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}, B = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}, C = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}\$$

- Методи оцінювання μ та Σ:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i, , \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)\left(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)^T .$$

Опис методу DFPM. Як DFPM можна використовувати для вирішення проблеми відбору портфеля.

Задача мінімізації без обмежень:

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{R}^n} V(\mathbf{u})$$

де V: R^$n \rightarrow R$ є двічі неперервно диференційованою опуклою функцією, що має єдиний розв'язок $u *$.

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \eta\dot{\mathbf{u}}(t) = -\nabla V(\mathbf{u}(t)),\ \eta > 0$$

де η > 0, а $\nabla V(u)$ - градієнт $V(u)$

Опис методу DFPM. Як DFPM можна використовувати для вирішення проблеми відбору портфеля.

Ця система є унікальною та глобально експоненційно стійкою. Розв'язок цієї системи можна знайти за допомогою симплектичного методу, такого як симплектичний метод Рунге-Кутта або метод Стермера-Верле, які застосовуються до реформульованої системи у вигляді першого порядку:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v}\\ \dot{\mathbf{v}} &= -\eta\mathbf{v} - \nabla V(\mathbf{u})\end{aligned}$$

Опис методу DFPM. Як DFPM можна використовувати для вирішення проблеми відбору портфеля.

Після деяких алгебраїчних перетворень мінімізаційна задача може бути сформульована у вигляді:

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{Z} \mathbf{u} + 2\mathbf{g}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{Z} \mathbf{u} + \mathbf{g}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{g} := \Phi(\mathbf{u})$$

де Z охоплює нульовий простір B, g - будь-який розв'язок рівняння $Bw = c$.

В та с:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ \boldsymbol{\mu}^T \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix}$$

Опис методу DFPM. Як DFPM можна використовувати для вирішення проблеми відбору портфеля.

Для мінімізації цієї задачі використовується DFPM, де ми визначаємо

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{d}$$

алгебраїчно еквівалентну вищезгаданій динамічній системі, а також формулюється диференціальна система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v}\\ \dot{\mathbf{v}} &= -\eta\mathbf{v} + (\mathbf{d} - \mathbf{M}\mathbf{u})\end{aligned}$$

Опис методу DFPM. Як DFPM можна використовувати для вирішення проблеми відбору портфеля.

Крок ітерації методу DFPM для розв'язання задачі мінімізації виглядає як:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{w}_k + \mathbf{b},\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t^2 \mathbf{M} & \Delta t\,(1 - \Delta t\ \eta)\,\mathbf{I} \\ \Delta t\,\mathbf{I} & (1 - \Delta t\ \eta)\,\mathbf{I} \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\Delta t^2 \mathbf{d} \\ -\Delta t\,\mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Опис методу DFPM. Як DFPM можна використовувати для вирішення проблеми відбору портфеля.

У нашій задачі відбору портфеля маємо мінімізувати квадратичну формулу:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \ \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = q$$

де:

- w - вектор ваг, який відповідає кількості кожного товару в портфелі
- μ - вектор серднього обороту продажу кожного товару протягом 6 місяців
- q - задане значення обороту продажу, яке потрібно досягти

Матриця обмежень B та вектор c:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix}$$

Мінімізаційна задача:

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{n-2}} \frac{1}{2} u^T M u - u^T d$$

Висновки

Після застосування методу DFPM можна зробити наступні висновки:

- Метод DFPM дозволяє ефективно знаходити оптимальний портфель, забезпечуючи швидку збіжність до розв’язку.
- Метод дозволяє розв'язувати задачі вибору портфеля з різними обмеженнями та умовами, забезпечуючи гнучкість в розробці і виборі стратегій інвестування.

Загалом, застосування методу DFPM дозволяє ефективно та стійко розв'язувати задачі вибору портфеля з урахуванням усіх необхідних умов та обмежень