**УДК 512.56+512.64**

*Дяченко С. М.*

# НАПІВГРУПИ РІССА НАД ЦИКЛІЧНОЮ ГРУПОЮ ПРОСТОГО ПОРЯДКУ СКІНЧЕННОГО ЗОБРАЖУВАЛЬНОГО ТИПУ

*У цій статті ми розглядаємо напівгрупи Рісса над циклічною групою, порядок якої є простим числом p, та описуємо напівгрупи скінченного зображувального типу у модулярному випадку, тобто, коли характеристика основного поля рівна p.*

**Ключові слова:** напівгрупа Рісса, Моріта еквівалентний, зображення, матрична задача.

## Вступ

Нехай $C_p = \{e, a, \dots, a^{p-1} \mid a^p = e\}$ — циклічна група порядку $p$ і $B$ — ненульова $n \times m$ матриця над $C_p \cup \{0\}$. Для кожного $g \in C_p$ та пари індексів $(i, j)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ розглянемо $m \times n$ матрицю $(g)_{ij}$. У цієї матриці на місці $(i, j)$ стоїть елемент $g$, а решта рівні нулю. Позначимо $\mathcal{R}(C_p, B)$ множину усіх таких матриць разом з нульовою матрицею. Визначимо множення «$*$» таким чином

$$(g)_{ij} * (g')_{i'j'} = (g)_{ij} \cdot B \cdot (g')_{i'j'},$$

де «$\cdot$» — звичайне множення матриць. Тоді множина $\mathcal{R}(C_p, B)$ разом з операцією «$*$» називається напівгрупою Рісса над групою $C_p$ з сендвіч-матрицею $B$. Позначимо $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_p, B)$.

Задача про опис зображень напівгрупи $S$ еквівалентна задачі про опис зображень її напівгрупової алгебри $F[S]$. Позначимо $\mathcal{M}(B) = F[\mathcal{R}(B)]$. Тоді $\mathcal{M}(B)$ — це алгебра всіх $m \times n$ матриць над груповою алгеброю $F[C_p]$ з множенням $M_1 * M_2 = M_1 B M_2$.

У цій статті ми використаємо результати двох попередніх статей, які стосуються напівгруп Рісса над циклічними групами другого та третього порядків [1; 2].

## Спрощення матриці

У цьому розділі ми побудуємо алгебру $\mathcal{M}(D)$ з матрицею $D$, що має ненульові елементи лише на головній діагоналі і яка має той самий зображувальний тип, що й алгебра $\mathcal{M}(B)$.

**Твердження 1.** *Якщо існують невироджені матриці $S \in M_n(F[C_p])$ та $T \in M_m(F[C_p])$ такі, що $B' = SBT$ тоді алгебри $\mathcal{M}(B)$ and $\mathcal{M}(B')$ ізоморфні.*

*Доведення.* Ізоморфізм задається такими відображеннями:

$$\mathcal{M}(B) \ni M \mapsto T^{-1} M S^{-1} \in \mathcal{M}(B'),$$
$$\mathcal{M}(B') \ni M' \mapsto T M' S \in \mathcal{M}(B).$$

Легко довести, використовуючи індукцію, що будь-яку матрицю $B$ над $C_p \cup \{0\}$ можна звести, використовуючи елементарні перетворення над полем $F_p$, до матриці $D'$, яка має ненульові елементи лише на головній діагоналі, і ці елементи належать множині $\{0, e, a-e, \dots, (a-e)^{p-1}\}$. Зауважимо, що це твірні радикала алгебри $F[C_p]$. Оскільки $B \ne 0$, матриця $D'$ що найменше, один елемент $e$. Отже $\mathcal{M}(B) \simeq \mathcal{M}(D')$, $D'$ — наступна матриця:

$$D' = \begin{pmatrix} E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$E = \operatorname{diag}(e, \dots, e)$, $A_1 = \operatorname{diag}(a-e, \dots, a-e)$, $\dots$, $A_{p-1} = \operatorname{diag}((a-e)^{p-1}, \dots, (a-e)^{p-1})$ — діагональні матриці.

**Твердження 2.** *Алгебра $\mathcal{M}(D')$ Моріта еквівалентна алгебрі $\mathcal{M}(D)$, де матриця $D$ отримана з $D'$ заміною блока $E$ на блок розмірності один $(e)$.*

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Назвемо матрицю $D$ *спрощенням* матриці $B$.

**Наслідок 3.** *Алгебри $\mathcal{M}(D')$ та $\mathcal{M}(D)$ мають однаковий зображувальний тип.*

## Основний результат

У цьому розділі ми доведемо теорему, що описує всі напівгрупи Рісса скінченного типу. Це основна теорема статті.

**Теорема 4.** *Алгебра $\mathcal{M}(B)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її спрощення — матриця $D$ дорівнює одній з таких матриць:*

*у випадку $p = 2$, $p = 3$:*

$$(e), \quad (e \;\; 0), \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a-e \end{pmatrix},$$

*у випадку $p > 3$: $D = (e)$.*

Доведення теореми ми проведемо в декілька кроків.

**Твердження 5.** *Якщо матриця $D$ містить нульовий рядок (стовпчик) і $\tilde{D}$ — матриця, отримана за допомогою викреслення цього рядка (стовпчика), то алгебра $\mathcal{M}(\tilde{D})$ є фактор алгеброю алгебри $\mathcal{M}(D)$ за деяким ідеалом.*

*Доведення.* Доведемо твердження у випадку, коли $m$-й стовпчик матриці $D$ є нульовим. Розглянемо алгебру $\mathcal{M}(D)$, вона має базис $e_{ij}$, $a_{ij}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p-1$, де $e_{ij}$ — це матриця з єдиним ненульовим елементом $e$ на місці $(i, j)$, $a_{ij}^{(k)}$ — це матриця з єдиним ненульовим елементом $a^k$ на місці $(i, j)$. Лінійний підпростір

$$I = \langle e_{m1}, \ldots, e_{mn}, \\ a_{m1}^{(1)}, \ldots, a_{mn}^{(1)}, \ldots, a_{m1}^{(p-1)}, \ldots, a_{mn}^{(p-1)} \rangle$$

є ідеалом в $\mathcal{M}(D)$. Дійсно $De_{mj} = 0$ тоді $x * e_{mj} = 0$ для всіх $x \in \mathcal{M}(D)$, матриця $e_{mj}$ має ненульові елементи лише у $m$-му рядку, а отже, матриця $e_{mj} * x$ має ненульові елементи лише у $m$-му рядку. Аналогічне справедливо для $a_{mj}^k$. Легко бачити, що $\mathcal{M}(D)/I \simeq \mathcal{M}(\tilde{D})$.

**Твердження 6.** *Алгебри $\mathcal{M}(D)$ з однією з наступних сендвіч-матриць $D$ є нескінченного зображувального типу.*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (e\ 0\ 0).$$

*Доведення.* У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $e_{ij}$, $a_{ij}^{(k)}$, $1 \leq i, j \leq 2$, $k = 1, \ldots, p-1$ (позначення як у попередньому твердженні). Помітимо, що

$$\begin{aligned} e_{22} &= e_{21} * e_{12}, \\ a_{11}^{(k)} &= a_{11}^k, \\ a_{12}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} * e_{12}, \\ a_{21}^{(k)} &= e_{21} * a_{11}^{(k)}, \\ a_{22}^{(k)} &= e_{21} * a_{11}^{(k)} * e_{12}, \end{aligned}$$

Таким чином, система твірних алгебри складається з таких елементів $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}\}$.

Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому елементам $e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}$ відповідають такі матриці:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & X & 0 & 0 \\ E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Легко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця $S$ така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача є нескінченного типу.

У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Базис алгебри складається з елементів $\{e_{i1}, a_{i1}^{(k)} \,|\, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq k < p\}$. Помітимо, що виконуються такі співвідношення

$$\begin{aligned} a_{11}^{(k)} &= a_{11}^k, \\ a_{i1}^{(k)} &= e_{i1} * a_{11}^{(k)}, \quad 1 < i \leq 3. \end{aligned}$$

Отже, система твірних алгебри складається з елементів $\{e_{11}, e_{21}, e_{31}, a_{11}\}$. Розглянемо зображення $R(X)$ цієї алгебри, при якому твірні елементи переходять відповідно у такі матриці

$$E,\ E,\ X,\ 0.$$

Легко перевірити, що всі співвідношення в алгебрі виконуються, отже, це дійсно зображення, крім того, два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця $S$ така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача нескінченного типу.

Надалі ми будемо використовувати позначення для блоків матриці $D$, уведені в твердженні 2. Ми доведемо декілька тверджень, в яких ми поступово розглянемо різні випадки, якою може бути матриця $D$.

**Твердження 7.** *Якщо матриці $A_1, \ldots, A_{p-1}$ — порожні, то алгебра $\mathcal{M}(D)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли матриця $D$ має один з таких виглядів:*

$$(e), \quad (e\ \ 0), \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*у випадку $p = 2$, $p = 3$. В інших випадках задача має скінченний тип лише у випадку $D = (e)$.*

*Доведення.* Нехай матриця $D$ має розмір $n \times m$ і має єдиний ненульовий елемент $e$ на місці $(1,1)$. Позначимо таку матрицю $\mathcal{E}_{n,m}$. Якщо $n \geq 3$, то за твердженням 5 алгебра $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{n,m})$ має фактор алгебру $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{3,1})$, яка є нескінченного зображувального типу за твердженням 6, а отже, і сама алгебра нескінченного типу, бо алгебра, що має фактор алгебру нескінченного типу, сама є алгеброю нескінченного типу. Аналогічно розглядається випадок $m \geq 3$. Таким чином, $m, n \leq 2$, але якщо $m = n = 2$, то, за твердженням 6, алгебра також матиме нескінченний тип.

Отже, можливі лише випадки, перелічені в умові твердження. У випадку $D = (e)$ ми маємо просто зображення групи $C_p$ над полем характеристики $p$. Ця задача скінченного типу (див. [5]).

Якщо
$$D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix},$$
то алгебра має базис $e_1 = (e\ 0)$, $e_2 = (0\ e)$, $a_1^{(k)} = (a^k\ 0)$, $a_2^{(k)} = (0\ a^k)$, $1 \leq k < p$. Системою твірних є елементи $\{e_1, e_2, a_1\}$. Розглянемо деяке зображення: $M_{e_1}$, $M_{e_2}$, $M_{a_1}$. Після приведення матриць $M_{e_1}$, $M_{e_2}$ до вигляду
$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
Матриця $M_{a_1}$ матиме такий вигляд
$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
тоді для матриці
$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$
отримаємо задачу про опис оператора $U$ такого, що $U^p = E$ в векторному просторі, градуйованому частково-впорядкованою множиною $S = \{1 < 2\}$. Ця задача скінченного типу для $p = 2$ та $p = 3$, і ця задача нескінченного типу для $p \geq 5$ [4, Theorem 1]. Випадок $D = (e\ 0)$ розглядається аналогічно.

**Твердження 8.** *Якщо матриця $A_1$ не порожня, тобто $D$ містить на головній діагоналі хоча б один елемент $a - e$, то така алгебра має скінченний тип лише у випадку $p = 2$, $p = 3$*
$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a - e \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Випадок $p = 2$, $p = 3$ вже розглянуто у статтях [1; 2].

Розглянемо тепер випадок $p \geq 5$. Нехай матриця $D$ має порядок $n \times m$, причому на місці $(1,1)$ стоїть $e$, на місці $(2,2)$ стоїть $a - e$, далі на головній діагоналі стоїть будь-що (0 або $(a - e)^k$). Припустимо, крім того, що $n \geq 3$. Алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k < p\}$. Помітимо, що елементи $e_{11}, e_{12}, e_{13}$ є незалежними. Отже, розглянемо зображення $M_{e_{11}} = E$, $M_{e_{12}} = E$, $M_{e_{13}} = X$. Легко перевірити, що вісі співвідношення виконуються, отже, це дійсно зображення, крім того, два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця $S$ така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача є нескінченного типу.

У випадку $D$ розміру $2 \times 2$, алгебра матиме систему твірних $e_{11}$, $e_{12}$, $e_{21}$. Після приведення матриці $M_{e_{11}}$,
$$M_{e_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{e_{21}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix},$$
де для матриць $X$, $Y$ виконується співвідношення $(XY)^p = 0$. Ця задача скінченного типу у випадку $p = 2$, $p = 3$ і має нескінченний тип для інших простих $p$.

**Твердження 9.** *Якщо матриця $A_1$ порожня, а одна з матриць $A_k$ не порожня, тобто $D$ містить на головній діагоналі хоча б один елемент $(a - e)^k$, то така алгебра має нескінченний зображувальний тип.*

*Доведення.* Нехай матриця $D$ має порядок $n \times m$, причому на місці $(1,1)$ стоїть $e$, на місці $(2,2)$ стоїть $(a - e)^k$, далі на головній діагоналі стоять 0 або $(a - e)^k$. Алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k < p\}$. Помітимо, що елементи $e_{11}$, $e_{12}$, $e_{21}$, $a_{11}$ є незалежними. Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому цим елементам відповідають такі матриці:
$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & X & 0 & 0 \\ E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
а решті твірних відповідають нульові матриці. Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Легко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця $S$ така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача нескінченного типу.

## Висновки

Отже у статті ми розглянули напівгрупи Рісса над циклічною групою порядку три. Ми вивчали їх зображувальний тип у модулярному випадку і дали опис усіх напівгруп, що мають скінченний зображувальний тип.

***Список літератури***

1. Dyachenko S. M. On modular representations of some semigroups and representations of quivers with relations / S. M. Dyachenko // Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. — 2010. — No. 3. — P. 11–15.
2. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА. — 2012. — Т. 126 : Фізико-математичні науки. — С. 3–6.
3. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1972. — Т. 28. — С. 154–163.
4. Bondarenko V. M. Linear operators on $s$-graded vector spaces / V. M. Bondarenko // Linear algebra and its applications. — 2003. — Vol. 365. — P. 45–90.
5. Brenner S. Modular representations of $p$-groups / S. Brenner // J. Algebra. — 1970. — No. 1. — P. 69–102.

*S. Dyachenko*

# ON FINITE REPRESENTATION TYPE REES SEMIGROUP OVER THE CYCLIC GROUP OF PRIME ORDER

*Rees semigroup over $C_p$ is considered. Semigroups of finite representation type is described in modular case.*

**Keywords:** Rees semigroup, Morita equivalent, representation, matrix problem.

*Матеріал надійшов 31.10.2016*