Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:
Безпікові функції на зв’язних графах

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та інціали)

____
(підпис)
“____”____________________ 2023 р.

Виконав студент
3-го року навчання спеціальності
121 “Інженерія програмного забезпечення”
Зимовецъ Руслан Олегович
(ПІБ)

Київ – 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
доц., к.ф.-м.н.
__________________ Р.К. Чорней
(підпис)
“____”__________________ 2022 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу
студенту 3-го курсу факультету інформатики
Зимовцю Руслану Олеговичу

Тема: Безпікові функції на зв’язних графах.
Вихідні дані: Досліджено клас безпікових функцій на зв’язних графах.
Зміст ТЧ до курсову роботи:

1 Анотація
2 Вступ
3 Основні означення
  3.1 Означення
4 Основні результати
  4.1 Основні означення
  4.2 Властивості безпікових функцій
  4.3 Алгоритми аналізу безпікових функцій
  4.4 Теорема 1
  4.5 Теорема 2
5 Підрахунок кількостей безпікових функцій
6 Висновки
Література

Дата видачі “____”__________ 2022 р. Керівник ______________________
(підпис)

Завдання отримав ______________________
(підпис)

Тема: Безпікові функції на зв'язних графах.
Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	вересень	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	вересень	
3.	Розробка плану та структури роботи.	жовтень	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень теорії графів.	листопад	
5.	Дослідження основних властивостей безпікових функцій	грудень-січень	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	лютий-квітень	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	квітень	
9.	Захист курсової. роботи.	24.05.2023	

Зміст

Анотація

Функцію f на зв'язному графі G називають безпіковою, якщо для всіх впорядкованих трійок різних вершин x, y, z кожного найкоротшого шляху графа буде виконуватись умова безпіковості: $f(y) \leq \max(f(x), f(y))$ за рівності лише у випадку $f(x) = f(y) = f(z)$.

Ціллю даної роботи є детальне дослідження властивостей безпікових функцій та розробка алгоритмів для їх аналізу. Також розглядається комбінаторна задача підрахунку кількості безпікових функцій на графах.

Ключові слова: безпікова функція, граф блоків, опукла множина, цілком опукла множина, множина рівня функції, геодезичний відрізок, Числа Белла.

Вступ

Безпіковість – властивість дійснозначних функцій, визначених на метричних просторах. Кожну безпікову функцію f позбавлено піків у тому сенсі, що для всіх впорядкованих трійок різних точок x, y, z кожного метричного відрізку даного простору значення функції у центральній точці $f(y)$ не буде перевищувати відповідних значень у крайніх точках – $f(x)$ та $f(z)$. Якщо ж значення в центрі збігається з $\max(f(x), f(z))$, то значення функції в усіх трьох точках мають співпадати.

Безпікові функції були досліджені з різних точок зору у математичних статтях, зокрема безпіковість на G-просторах досліджено Буземаном [5]. Частинний випадок безпікових функцій на графах як на метричних був розглянутий у статті Чепого [2], де було показано зв'язок безпікових функцій з цілком опуклими множинами, досліджено клас "peakless-prime" графів, симплеціальну декомпозицію графів.

Дана робота має напрямок дослідження безпікових функцій, спираючись на властивості їх множин рівня. Зокрема існує певна закономірність формування множин рівня таких функцій на графах блоків, уведених Харарі [3]. Було знайдено її застосування у комбінаториці для підрахунку кількості нееквівалентних безпікових функцій. Також доведено, що графи блоків можна описати в термінах опуклих або цілком опуклих множин. До того ж, було розроблено та реалізовано алгоритми аналізу властивостей безпікових функцій, зокрема перевірка функції на безпіковість, знаходження множин рівня безпікових функцій, побудова безпікової функції за заданим графом блоків та множиною фільтрацій. Винайдено алгоритм підрахунку безпікових функцій на довільних деревах.

Основні результати даної роботи були представлені на XI Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків [1].

1 Основні означення

1.1 Означення

Означення 1.1. *Неорієнтований граф* – пара $G = (V, E)$, де

$$V = V(G) \text{ – множина } \textit{вершин},$$
$$E = E(G) \subset V^{(2)} = \{\{a, b\} |\ a, b \in V\} \text{ – множина } \textit{ребер}.$$

Надалі ребра неорієнтованого графа G позначатимемо $ab = \{a, b\} \in E(G)$, де $a, b \in V(G)$.

Означення 1.2. *Зв'язний граф* – граф, між кожною парою вершин якого існує шлях, що їх сполучає.

Означення 1.3. *Підграф* H графа G $(H \subset G)$ – граф H, у якому $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$.

Означення 1.4. *Компонента зв'язності* графа G – максимальний зв'язний підграф графа G.

Означення 1.5. *Скінченний граф* – граф, множини вершин і ребер якого скінченні.

Надалі в роботі усі графи вважаються неорієнтованими, зв'язними та скінченними, якщо явно не вказано протилежне.

Означення 1.6. *Шлях* (*маршрут*) між парою вершин $x, y \in V(G)$ – послідовність вершин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, де $x = v_0$ – *початок шляху*, $y = v_n$ – *кінець шляху*, $\forall i = \overline{0, n-1}:\ v_i v_{i+1} \in E(G)$.

Означення 1.7. *Ланцюг* – шлях, у якому всі вершини попарно різні.

Означення 1.8. *Цикл* – шлях, у якому початок і кінець збігаються.

Означення 1.9. *Простий цикл* – ланцюг, у якому початок і кінець збігаються.

Означення 1.10. *Дерево* – зв'язний граф без циклів.

Означення 1.11. *Повний граф* K_n – граф, у якому кожні дві вершини з'єднані ребром, тобто $E = V^{(2)}$.

Означення 1.12. Нехай $S \subset V(G)$. *Породжений підграф* $G[S]$ – підграф графа G, у якому кожні дві вершини $u, v \in S$, суміжні в G, суміжні і в S. Тобто $E(G[S]) = \{uv|\ u, v \in S,\ uv \in E(G)\}$.

Означення 1.13. *Метричний простір* – пара (X, d), де
X – довільна множина,
$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ – відображення, що задовольняє властивостям:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Означення 1.14. Нехай G – зв'язний граф. *Відстань* $d(u, v)$ між вершинами $u, v \in V(G)$ – кількість ребер на найкоротшому шляху між ними.

Зауваження 1.15. Функція d є метрикою на множині вершин графа G. Отже, зв'язний граф природнім чином породжує метричний простір.

Означення 1.16. *Метричний відрізок* між парою $u, v \in V(G)$ вершин зв'язного графа G – множина

$$[u, v] := \{x \in V(G)|\ d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)\}.$$

Означення 1.17. *Окіл вершини u* графа G – множина $N(u)$ суміжних з нею вершин, тобто

$$N(u) := \{x \in V(G)|\ xu \in E(G)\}.$$

Означення 1.18. Нехай $G = (V, E)$ – граф. *Околом множини вершин* $A \subset V$ назвемо наступну множину:

$$N(V) := \bigcup_{u \in A} N(u) \setminus A.$$

Зауваження 1.19. Іноді для уточнення, що розглядається окіл (вершини чи множини вершин) саме у графі G, використовуємо позначення N_G.

Означення 1.20. *Клікою* графа G назвемо повний підграф графа G. Зокрема, повний граф з n вершин називатимемо *графом-клікою*, та позначатимемо K_n.

Означення 1.21. *Кластер-граф* – граф, у якого кожна компонента зв'язності є клікою.

Означення 1.22. *Двозв'язний граф* – це зв'язний граф, у якому видалення однієї довільної вершини не призведе до збільшення кількості компонент зв'язності.

Означення 1.23. *Двозв'язна компонента* графа G – максимальний двозв'язний підграф графа G.

Означення 1.24. *Граф блоків* – граф, у якого кожна двозв'язна компонента (блок) є клікою.

Означення 1.25. Нехай $G = (V, E)$ – граф блоків. Тоді $\mathfrak{B}_G$ – множина його блоків. Уведемо відображення :

$$\mathscr{B} : G \to 2^{\mathfrak{B}_G}$$

$$\mathscr{B}(v) := \{B \in \mathfrak{B}_G : v \in B\}$$

Означення 1.26. Нехай $f : A \to \mathbb{R}$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$:

$$[f \leq \beta] := \{\alpha \in A : f(\alpha) \leq \beta\}$$

Причому $[f \leq \beta]$ – *множина рівня* β функції f. Сімейство усіх множин рівня позначимо:

$$LS(f) := \{[f \leq \beta] : \beta \in \mathbb{R}\}$$

2 Основні результати

2.1 Основні означення

Означення 2.1. Нехай (X, d) – метричний простір. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *безпіковою*, якщо одночасно виконуються наступні умови:

(i) $\forall u, v \in X\ \forall w \in [u, v] \setminus \{u, v\} : f(w) \leq \max\{f(u), f(v)\}$;

(ii) $\forall u, v \in X\ \forall w \in [u, v] \setminus \{u, v\} : f(w) = \max\{f(u), f(v)\} \Rightarrow f(u) = f(v)$.

Означення 2.2. Нехай G – граф, $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$ – деякий його маршрут. W є *геодезичним*, якщо він є локально найкоротшим, а саме:

$$\forall i \in \{1, ..., n-1\} :\ d(w_{i-1}, w_{i+1}) = 2.$$

Означення 2.3. *Геодезичний відрізок* графу G між вершинами u, v – це об'єднання множин вершин геодезичних маршрутів між u, v. Позначення : $\overline{[u, v]}$.

Означення 2.4. Нехай $G = (V, E)$ - граф. $S \subseteq V$ - *опукла*, якщо :

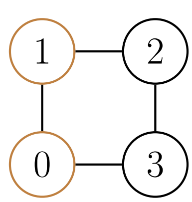
$$\forall u, v \in S :\ [u, v] \subseteq S.$$

Означення 2.5. Нехай $G = (V, E)$ - граф. $S \subseteq V$ - *цілком опукла*, якщо

$$\forall u, v \in S :\ \overline{[u, v]} \subseteq S.$$

Зауваження 2.6. Кожна цілком опукла множина є опуклою, бо кожен найкоротший відрізок є геодезичним.

Приклад 2.7. $G = (V, E)$ – граф, зображений на рисунку.



$V \supseteq S := \{0, 1\}$ – опукла, проте не цілком опукла, оскільки $W := (1, 2, 3, 0)$ є геодезичним маршрутом, а також $W \nsubseteq S$.

Означення 2.8. Нехай $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$ – маршрут графу G. Дійснозначна функція f, визначена на W, називається *безпіковою на маршруті* W, якщо одночасно виконуються наступні умови:

(i) $\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq j < i < k \leq n \implies f(w_i) \leq \max\{f(w_j), f(w_k)\}$;

(ii) Рівність у попередній нерівності досягається лише за умови:

$$f(w_j) = f(w_k).$$

Означення 2.9. Нехай $G = (V, E)$ – граф. Функція $f : V \to \mathbb{R}$ називається *безпіковою* на графі G, якщо звуження f на будь-якому найкоротшому ланцюгу графа G є безпіковим.

Означення 2.10. Нехай G – граф. Тоді $\mathscr{P}(G)$ – множина усіх безпікових функцій на G.

Означення 2.11. Функція f називається *локально безпіковою* на графі, якщо вона безпікова на кожному породженому ланцюгу довжини 2.

Означення 2.12. Нехай $G = (V, E)$ – граф. Тоді $\prec$ – передпорядок на $\mathscr{P}(G)$, такий що:

$$\forall f, g \in \mathscr{P}(G) : f \prec g \iff LS(f) \subset LS(g)$$

Рефлексивність та транзитивність $\prec$ випливають з рефлексивності та транзитивності відношення $\subset$ на 2^V.

Означення 2.13. Нехай $G = (V, E)$ – граф. Тоді $\sim$ – відношення еквівалентності на $\mathscr{P}(G)$, таке що:

$$\forall f, g \in \mathscr{P}(G) : f \sim g \iff f \prec g \wedge g \prec f \iff LS(f) = LS(g).$$

2.2 Властивості безпікових функцій

Лема 2.14. *Нехай функція f визначена на графі G. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) f – безпікова на графі G;

(ii) f – локально безпікова на графі G;

(iii) звуження f на будь-який геодезичний маршрут графа G безпікове.

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (ii) : f - безпікова на кожному найкоротшому ланцюгу графа $G \Rightarrow f$, зокрема, безпікова на кожному породженому ланцюгу довжини 2;

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Припустимо від супротивного, що існує геодезичний маршрут $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$ такий, що $f|_W$ не безпікове. А саме, $\exists i, j, k \in \mathbb{Z}_+ :$ $0 \leq i < j < k \leq n$, для яких має місце одна з умов :

1. $f(w_j) > \max\{f(w_i), f(w_k)\}$;
2. $f(w_j) = \max\{f(w_i), f(w_k)\} \wedge f(w_i) \neq f(w_k)$.

Уведемо позначення: $f_t := f(w_t)$. Нехай $M := \max\{f_t : i < t < k\}$, а також $m := \min\{t : f_t = M, i < t < k\}$.

За методом Мат. Індукції доведемо :

$$\forall \delta_1 \in [0, m-i) \cap \mathbb{Z}_+ : f_{m-\delta_1-1} = f_{m-\delta_1} = f_{m-\delta_1+1} = M$$

$$\forall \delta_2 \in [0, k-m) \cap \mathbb{Z}_+ : f_{m+\delta_2-1} = f_{m+\delta_2} = f_{m+\delta_2+1} = M$$

Ведемо індукцію за δ_1 та δ_2.

База індукції : $\delta_1 = \delta_2 = 0$. $f_m = M \geq \max\{f_{m-1}, f_{m+1}\}$. Далі за першою умовою локальної безпіковості f : $f_m \leq \max\{f_{m-1}, f_{m+1}\}$. Отже, $f_m = \max\{f_{m-1}, f_{m+1}\}$. За другою умовою локальної безпіковості :

$$f_{m-1} = f_m = f_{m+1} = M$$

Крок індукції : Нехай доведено для $\delta_1 < m - i - 1$ і $\delta_2 < k - m - 1$:

$$f_{m-\delta_1-1} = f_{m-\delta_1} = f_{m-\delta_1+1} = M$$

$$f_{m+\delta_2-1} = f_{m+\delta_2} = f_{m+\delta_2+1} = M$$

Розглянемо трійки : $(w_{m-\delta_1-2}, w_{m-\delta_1-1}, w_{m-\delta_1}), (w_{m+\delta_2}, w_{m+\delta_2+1}, w_{m+\delta_2+2})$ – породжені ланцюги довжини 2, а отже:

$$f_{m-\delta_1-1} \leq \max\{f_{m-\delta_1-2}, f_{m-\delta_1}\}$$

$$f_{m+\delta_2+1} \leq \max\{f_{m+\delta_2+2}, f_{m+\delta_2}\}$$

Але $f_{m-\delta_1-1} = f_{m+\delta_2+1} = M$, тож :

$$f_{m-\delta_1-1} \geq \max\{f_{m-\delta_1-2}, f_{m-\delta_1}\}$$

$$f_{m+\delta_2+1} \geq \max\{f_{m+\delta_2+2}, f_{m+\delta_2}\}$$

А отже, доведено необхідні рівності. З них випливає:

$$\forall t : i < t < k \implies f_t = M$$

Припустимо, виконується умова 1. Доведено, що $f_{i+1} = f_j = M$. За умовою 1:

$$f_{i+1} = f_{k-1} = f_j > \max\{f_i, f_k\} \implies f_{i+1} > f_i \wedge f_{k-1} > f_k$$

Однак $f_{i+1} = M = \max\{f_i, f_{i+2}\}$, проте $f_i \neq f_{i+1}$ – суперечність з другою умовою локальної безпіковості.

Тепер припустимо, виконується умова 2:

$$f_j = \max\{f_i, f_k\} \wedge f_i \neq f_k$$

Без втрати загальності $f_k = f_j = M$. Тоді $f_i \neq M$.

* Якщо $f_i < M$, то $f_{i+1} = M = \max\{f_i, f_{i+2}\}$, проте $f_i \neq f_{i+1}$ – суперечність з другою умовою локальної безпіковості;

* Якщо $f_i > M$, то $M = f_j = \max\{f_i, f_k\} = f_i$ – суперечність.

(iii) ⇒ (i) : Очевидно, бо кожен найкоротший ланцюг є геодезичним маршрутом. □

Лема 2.15. *Якщо f безпікова на графі G, тоді кожна множина рівня $[f \leq \alpha]$ є цілком опуклою.*

Доведення. Зафіксуємо $\alpha \in \mathbb{R}$, а також $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$ – геодезичну лінію, таку що $f(\{w_0, w_n\}) \subseteq [f \leq \alpha]$. Отже, $\max\{f(w_0), f(w_n)\} \leq \alpha$. Також f – безпікова на графі $G \implies f$ – безпікова на кожній геодезичній лінії G, зокрема на W (див. Лему 2.14). А отже, має місце наступне:

$$\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \ f(w_i) \leq \max\{f(w_0), f(w_n)\} \leq \alpha \implies w_i \in [f \leq \alpha]$$

Значить, $W \subseteq [f \leq \alpha] \implies [f \leq \alpha]$ – цілком опуклий. □

Лема 2.16. *Якщо f безпікова на графі G, H - зв'язний породжений підграф G, тоді $f|_H$ - безпікова на H.*

Доведення. f безпікова на графі $G \implies f$ – локально безпікова на графі G (див. Лему 2.14). Тож f – безпікова на кожному породженому ланцюгу графа G. Нехай $W = (w_0, w_1, w_2)$ – породжений ланцюг графа $H \implies W$ – породжений ланцюг графа $G \implies f$ – безпікова на $W \implies f|_H$ – безпікова на W. А отже, $f|_H$ – безпікова на H. □

2.3 Алгоритми аналізу безпікових функцій

Algorithm 1 Перевірка функції на безпіковість

```
function IS_PEAKLESS(f: Function, v1: Vertex, v2: Vertex, v3: Vertex)
    graph ← f.domain()
    if not graph.has_induced_path(v1, v2, v3) then
        raise NoInducedPathException
    end if
    max ← max(f(v1), f(v3))
    return f(v2) < max or (f(v2) = max and f(v1) = f(v3))
end function

function IS_PEAKLESS(f : Function): boolean
    graph ← f.domain()
    visited ← [false]
    for i ← 0 to graph.vertex_count() do
        visited[i] ← true
        for u in graph[i] do
            for v in graph[u] do
                if not visited[v] and not IS_PEAKLESS(f, i, u, v) then
                    return false
                end if
            end for
        end for
    end for
    return true
end function
```

Algorithm 2 Знаходження множин рівня функції

```
function LEVEL_SETS_OF_FUNCTION(f: GraphFunction)
    domain ← f.domain()
    image ← f.image()
    image_pq ← empty priority queue with elements sorted in ascending order
    filler ← empty set of image_point_type elements
    for image_point in image do
        if image_point ∉ filler then
            image_pq.push(image_point)
            filler.insert(image_point)
        end if
    end for
    res ← empty list of sets of vertex_type elements
    while not image_pq.empty() do
        current_layer ← empty set of vertex_type elements
        top ← image_pq.top()
        for i ← 0 to domain.size() − 1 do
            if f(i) ≤ top then
                current_layer.insert(i)
            end if
        end for
        image_pq.pop()
        res.append(current_layer)
    end while
    return res
end function
```

Algorithm 3 Побудова безпікової функції за заданим графом блоків та множиною фільтрацій

```
function BUILD_PEAKLESS_FUNCTION_ON(graph_of_blocks: Graph, filtrations: List of Sets)
    default_val ← −1
    if not A_FILTRATION_SET_OF(filtrations, graph_of_blocks) then
        raise NotAFiltrationSetOfGraphException
    end if
    if not IS_GRAPH_OF_BLOCKS(graph_of_blocks) then
        raise GraphTypeError
    end if
    f ← GraphFunction(graph_of_blocks, default_val)
    curr_value ← 0
    for level_set in filtrations do
        for vertex in level_set do
            if f[vertex] = default_val then
                f[vertex] ← curr_value
            end if
        end for
        curr_value ← curr_value + 1
    end for
    return f
end function
```

2.4 Теорема 1

Лема 2.17. *Нехай G – зв'язний граф блоків, а $H \subset G$ - зв'язний. Тоді H – теж граф блоків.*

Доведення. Припустимо, що існує двозв'язна компонента C графа H, така що C не є клікою графа H. Тоді, оскільки $C \subseteq H$, то $C \subseteq G$. Маємо C – двозв'язний підграф графа G, а отже існує двозв'язна компонента B'_G графа G, така що $C \subset B_G$. B_G – кліка, бо G – граф блоків, тому C – повний, а значить, C – кліка графу H, що є суперечністю з припущенням. Отже, усі двозв'язні компоненти графа H є кліками $\implies$ H – граф блоків. □

Лема 2.18. *Нехай G – граф блоків, а $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_G$, такі що $B_1 \neq B_2$ та $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Тоді*

$$|B_1 \cap B_2| = 1.$$

Доведення. Оскільки $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, то $|B_1 \cap B_2| \geq 1$. Припустимо, що існують $x, y \in B_1 \cap B_2$ та $x \neq y$. Тоді $B_1 \cup B_2$ – двозв'язний підграф графа блоків G. До того ж, $B_1 \cup B_2$ не кліка, що суперечить з блоковістю графа G. Отже не існує таких $x, y \in B_1 \cap B_2$, що $x \neq y$. Тож $x = y$ і $|B_1 \cap B_2| = 1$. □

Теорема 2.19. *Для зв'язного графа $G = (V, E)$ наступні умови еквівалентні:*

(i) *G – граф блоків;*

(ii) *$\forall S \subset V : S$ – зв'язна $\implies$ S – опукла;*

(iii) *$\forall S \subset V : S$ – зв'язна $\implies$ S – цілком опукла.*

Доведення. Доведення проведемо у наступному порядку.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Нехай $V \supset S$ – зв'язна та цілком опукла. Тоді, за Зауваженням 2.6, S – опукла.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Припустимо, що G – не граф блоків. Тоді існує двозв'язна компонента B графа G, така що B не є клікою. Отже, існують такі $a, b \in B$, що a, b не суміжні. Зафіксуємо W – найкоротший шлях між a і b. Тоді з несуміжності маємо: $|W| \geq 2$. Тому, існує така $c \in w$, така що $a \neq c \neq b$. Покладемо $A := V(B) \setminus \{c\}$. A – зв'язна, адже $A \subset B$ – двозв'язний граф. Але A не опукла, бо W її найкоротший шлях, проте $W \not\subset A$. Знайдено суперечність з опуклістю довільної зв'язної підмножини V.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Припустимо, що існує S – зв'язна та не цілком опукла. Зафіксуємо не обов'язково різні $a, b \in S$. S не цілком опукла, отже існує геодезичний маршрут $W_g = (a, ..., b)$, який не міститься в S. Зі зв'язності S маємо шлях W між a і b, який лежить у S. Маємо цикл: $C := a - W_g - b - W$. Оскільки G – граф блоків, то існує блок $B \in \mathfrak{B}_G$, такий що $C \subset B$. B – кліка, тому $G[C]$ – теж кліка. А отже, довільні $x, y \in C \supset W_g$ – суміжні. Таким чином, для $x, y \in W_g$ виконується рівність: $d(x, y) = 1$, що суперечить геодезичності W_g.

□

2.5 Теорема 2

Означення 2.20. Нехай $(X, \leq)$ – частково-впорядкована множина. Елемент $b \in X$ називається *наступником* елемента $a \in X$, якщо $a < b$ та не існує $c \in X$ із $a < c < b$.

Лема 2.21. *Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф блоків, $a, b \in V$. C - цикл, такий що $a, b \in C$. Тоді a, b належать спільному блоку.*

Доведення. C – цикл, тому він є двозв'язним підграфом графа G. Отже існує $\widetilde{C} \supset C$, така що $\widetilde{C}$ – компонента двозв'язності графа G, яка містить цикл C. Оскільки G – граф блоків, то $\widetilde{C}$ – його блок. $a, b \in C \subset \widetilde{C}$. □

Лема 2.22. *Нехай G – граф. $f : G \to \mathbb{R}$. Тоді $f \notin \mathscr{P}(G)$ тоді і тільки тоді, коли існує $W = (x, y, z)$ - породжений ланцюг графа G, для якого виконується хоча б одна з наступних умов:*

1. *$f(x) < f(y) = f(z)$;*
2. *$f(z) < f(y) = f(x)$;*
3. *$f(y) > f(x)$ та $f(y) > f(z)$.*

Доведення. За Лемою 2.14, $f \notin \mathscr{P}(G)$ тоді і тільки тоді, коли f не є локально безпіковою на графі G. За Означенням 2.11, f не локально безпікова тоді і тільки тоді, коли існує породжений ланцюг $W = (x, y, z)$, такий що $f \notin \mathscr{P}(W)$. За Означенням 2.8, це можливо тоді і лише тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

(i) $f(y) > \max\{f(x), f(z)\}$;

(ii) $f(y) = \max\{f(x), f(z)\} \wedge f(x) \neq f(z)$

Нехай виконується перша умова:

$$f(y) > \max\{f(x), f(z)\} \iff f(y) > f(x) \wedge f(y) > f(z)$$

Нехай виконується (ii) умова: Спочатку відмітимо, що $f(x) \neq f(z)$ за другою умовою.

Нехай $f(x) > f(z)$. Тоді, за (ii) умовою, $f(y) = \max\{f(x), f(z)\} = f(x)$. Тобто $f(z) < f(y) = f(x)$.

Нехай тепер $f(z) > f(x)$. Тоді, враховуючи симетрію $x \leftrightarrow z$, за попереднім кроком, маємо: $f(x) < f(y) = f(z)$.

В результаті, розглянувши усі можливі варіанти, маємо:
$f(x) > f(z) \implies f(z) < f(y) = f(x)$ та
$f(z) > f(x) \implies f(x) < f(y) = f(z)$ та
$f(x) \neq f(z)$
Тому з (ii) умови випливає диз'юнкція:

$$f(z) < f(y) = f(x) \vee f(x) < f(y) = f(y) \tag{1}$$

Тепер нехай виконується диз'юнкція (1).
Тоді еквівалентно:

$$f(y) = \max\{f(x), f(z)\} \wedge f(x) \neq f(z)$$

Зібравши докупи усі умови та підсумувавши, маємо:

1. $f(y) > f(x)$ та $f(y) > f(z)$.

2. $f(z) < f(y) = f(x) \vee f(x) < f(y) = f(y)$;

Що й еквівалентно тому, що треба було довести. □

Теорема 2.23. *Нехай G – зв'язний граф блоків. L_G – деяка множина його непорожніх зв'язних підграфів, така що $G \in L_G$. Тоді існує така $f \in \mathscr{P}(G) : LS(f) = L_G$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *$\subset$ – лінійний порядок на L_G*

2. *$\forall H_1, H_2 \in L_G : H_2$ – наступник $H_1 \implies V(H_2 \setminus H_1) = N_{H_2}(V(H_1))$ та $H_2 \setminus H_1$ – кластер-граф.*

Доведення. **Необхідність :**

Зафіксуємо $H_1, H_2 \in L_G$. Оскільки $L_G = LS(f)$, то існують $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ що $V(H_1) = [f \le \beta_1], V(H_2) = [f \le \beta_2]$.

Для довільної підмножини $V \subset H_2$ позначимо $N(V) := N_{H_2}(V)$.

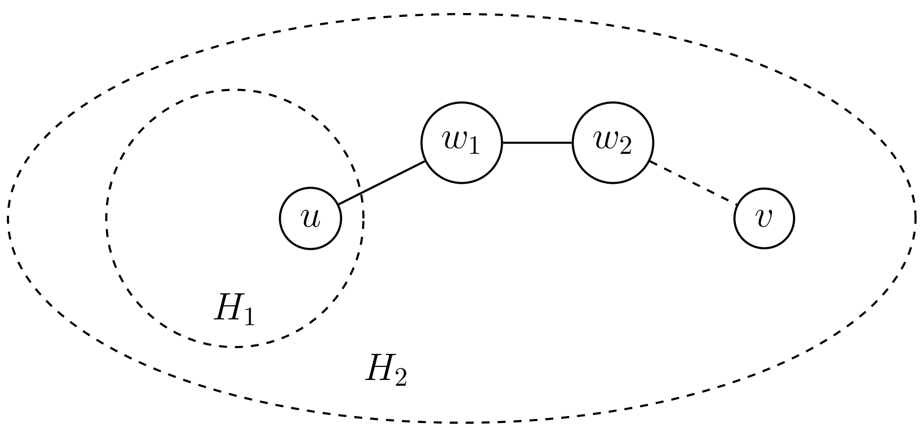
1. Без втрати загальності: $\beta_1 \le \beta_2$. Отже $V(H_1) = [f \le \beta_1] \subset [f \le \beta_2] = V(H_2) \implies H_1 \subset H_2$. Тому, $\subset$ – лінійний порядок на L_G.

2. Нехай H_2 – наступник $H_1 \implies H_1 \subset H_2$, а також множини:

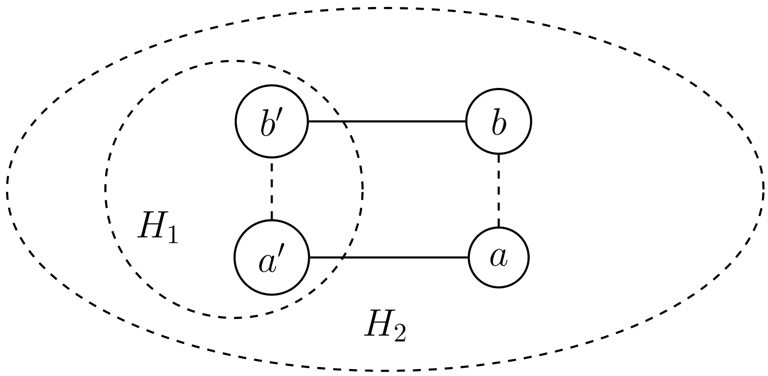
$$Cl = V(H_1) \sqcup N(V(H_1));$$

$$Ext = V(H_2) \setminus Cl.$$

Припустимо, що $Ext \ne \emptyset$. Тоді існує $v \in Ext$, а також вершина $u \in H_1$ та шлях $P = (u, ..., v)$ (оскільки H_2 – зв'язний). Оскільки $v \notin N(V(H_1))$ (за будовою Ext), то довжина P – щонайменше 2. Отже можемо зафіксувати три перші вершини шляху P: u, w_1, w_2. Маємо: $u \in V(H_1) \implies f(u) = \beta_1; w_1, w_2 \in H_2 \implies f(w_1) = f(w_2) = \beta_2$. Оскільки $H_1 \subsetneq H_2$, то $\beta_1 < \beta_2$ Отже маємо породжений ланцюг довжини 2: (u, w_1, w_2), такий, що $f(w_1) = max\{f(u), f(w_2)\} = f(w_2)$. Проте також $f(u) \ne f(w_2)$, що суперечить безпіковості f. Тому $Ext = \emptyset \implies V(H_2) = Cl = V(H_1) \sqcup N(V(H_1)) \implies V(H_2 \setminus H_1) = V(H_2) \setminus V(H_1) = N(V(H_1))$.



Також, нехай a, b не суміжні, але належать спільній компоненті зв'язності графа $H_2 \setminus H_1$. Тому існує P_1 – шлях у графі $H_2 \setminus H_1$ між вершинами a та b довжини щонайменше 2. До того ж, оскільки $V(H_2 \setminus H_1) = N(V(H_1))$, то існують такі $a', b' \in H_1$, що a суміжна з a' та b суміжна з b'. H_1 – зв'язний за вибором множини L_G (з умови), тож існує шлях P_2 у графі H_1 між вершинами a' та b'. Маємо цикл: $a - a' - P_2 - b - P_1$. За Лемою 2.21, a, b належать спільному блоку графа G, а отже a суміжна з b, що є суперечністю з припущенням. Тож усі компоненти зв'язності графа $H_2 \setminus H_1$ – повні $\implies H_2 \setminus H_1$ – кластер-граф.



Достатність : Оскільки G – скінченний, то множина його підграфів теж скінченна. Тому, оскільки завжди $G \in L_G$, то $\exists n \in \mathbb{N} : |L_G| = n$.

L_G – лінійно впорядкована відносно $\subset$, отже існує наступне впорядкування L_G: $H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_n = G$, де $H_i \in L_G$. Тоді розглянемо функцію: $f : G \to \mathbb{R}$, така що $f(x) := \min\{i \in \mathbb{N} : H_i \ni x\}$. Відповідно, $\forall i \in I : H_i = [f \leq i]$.

Зафіксуємо породжений ланцюг довжини 2: $w = (x, y, z)$.

Перевіримо виконуваність наступних "поганих" випадків:

1. Припустимо, що $f(x) < f(y) = f(z)$. Тоді $H_{f(x)} \subsetneq H_{f(y)} = H_{f(z)} =: H$. $x \in H_{f(x)}; y, z \in H$. Нехай H_p – попередник H. Тоді, за умовою 2, існують $y', z' \in H_p$, що y суміжна з y', а z – з z'. Оскільки $H_{f(x)} \subset H_p$ – зв'язний, то існують шляхи P_1 та P_2 у H_p, що з'єднують x з y' та x з z' відповідно. Отже маємо цикл: $x - y - z - z' - P_2$. За Лемою 2.21, x, y, z належать спільному блоку, а отже x суміжна з z. Тож w не породжений – суперечність.

2. $f(z) < f(y) = f(x)$ – неможливо, враховуючи симетрію $x \leftrightarrow z$ та посилаючись на доведення неможливості "поганого" випадку №1.

3. Припустимо, що $f(y) > f(x)$ та $f(y) > f(z)$. $x \in H_{f(x)}, y \in H_{f(y)}, z \in H_{f(z)}$. Нехай H_p - попередник $H_{f(y)}$, тоді, за умовою 2, існує $y' \in H_p$, таке що y суміжне з y'. Оскільки $H_{f(x)}, H_{f(z)} \subset H_p$, то існують шляхи P_1 та P_2 у H_p, що з'єднують x з y' та y' з z. Маємо цикл: $x - y - z - P_2 - P_1$. За Лемою 2.21, x, y, z належать спільному блоку, а отже x суміжна з z. Тож w не породжений – суперечність.

За Лемою 2.22, f – безпікова. $\square$

Наслідок 2.24. *Нехай T – дерево. L_T – деяка множина його піддерев, така що $T \in L_T$. Тоді існує така $f \in \mathscr{P}(T) : LS(f) = L_T$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *$\subset$ – лінійний порядок на L_T*
2. *$\forall T_1, T_2 \in L_T : T_2$ – наступник $T_1 \implies V(T_2 \setminus T_1) = N_{T_2}(V(T_1))$ – незалежна множина.*

3 Підрахунок кількостей безпікових функцій

Означення 3.1. *Кількістю безпікових функцій на графі G* називається потужність фактор-множини: $\mathscr{P}(G)/\sim$, де $\sim$ – відношення еквівалентності на множині $\mathscr{P}(G)$ (за Означенням 2.13)

Зауваження 3.2. Кожна функція на K_n є безпіковою, оскільки він не має породжених ланцюгів довжини 2.

Твердження 3.3. *Кількість безпікових функцій на K_n дорівнює числу Белла B_n.*

Доведення. Уведемо декілька позначень. Нехай $Epi(A, B)$ – множина усіх сюр'єкцій з множини A на множину B. Також для натурального числа n : $\lfloor n \rfloor := \{1, 2, ..., n\}$.

Визначимо множину Y :

$$Y := \bigsqcup_{m=0}^{n} Epi(K_n, \lfloor m \rfloor)$$

та уведемо відображення $\phi : \mathscr{P}(K_n)/\sim \to Y$, таке що для $f \in \mathscr{P}(K_n)$ з $LS(f) = \{L_1, ..., L_m\}$ – впорядкованою за включенням: $\phi([f]_\sim) = g$, де $g \in Epi(K_n, \lfloor m \rfloor)$ таке, що $g(v) = min\{i : L_i \ni v\}$. За визначенням g маємо: $LS(g) = LS(f)$.

Доведемо, що ϕ – бієкція. Ін'єктивність: Нехай $g_1 = \phi([f_1]_\sim)$, $g_2 = \phi([f_2]_\sim)$ та $g_1 = g_2$. Тоді має місце рівність:

$$LS(f_1) = LS(g_1) = LS(g_2) = LS(f_2)$$

Отже, $f_1 \sim f_2 \implies [f_1]_\sim = [f_2]_\sim$. Тобто ϕ – ін'єкція.

Сюр'єктивність: Зафіксуємо $g \in Y$. За Зауваженням 3.2, довільна $f : K_n \to \mathbb{R}$ є безпіковою. Отже, g – безпікова на K_n. Тоді покладемо $x = [g]_\sim$. Маємо: $\phi(x) = g$, тож ϕ – сюр'єкція.

Маємо: ϕ – бієкція. Тому, $|\mathscr{P}(K_n)/\sim| = |Y|$ – кількість безпікових функцій на K_n.

$$|Y| = \sum_{m=0}^{n} |Epi(K_n, \lfloor m \rfloor)| = \sum_{m=0}^{n} |Epi(\lfloor n \rfloor, \lfloor m \rfloor)| =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = B_n$$

□

Твердження 3.4. *Теорему 2.23 можна застосувати для підрахунку безпікових функцій на довільному дереві.*

Algorithm 4 Підрахунок безпікових функцій на довільному дереві

```
function COUNT_ALL_PEAKLESS_ON_TREE(graph)
    if size(graph) ≤ 1 then
        return 1
    end if
    leaves ← ALL_LEAVES(graph)
    res ← size(leaves) ≠ size(graph)  ?  1 : 0
    for each subset in leaves do
        if size(subset) = 0 then
            continue
        end if
        graph_minus_subset ← graph − subset
        res ← res + COUNT_ALL_PEAKLESS_ON_TREE(graph_minus_subset)
    end for
    return res
end function
```

Висновки

У **Розділі 1** сформульовано основні означення, позначення та зауваження.

У **Розділі 2** розглянуто базові означення, необхідні для розвитку теми безпікових функцій. Зокрема у **Підрозділі 2.1** розглянуто загальне означення безпікової функції у метричному просторі, а також часткове для функцій на маршрутах та графах. Надано означення геодезичних маршрутів та відрізків, опуклих та цілком опуклих множин. Уведено необхідні відношення передпорядку та еквівалентності на множині безпікових функцій.

У **Підрозділі 2.2** висвітлено властивості безпікових функцій та їх зв'язок з цілком опуклими множинами. Зокрема, описано безпікові функції у термінах локальної безпіковості. Доведено еквівалентність безпіковості, локальної безпіковості та безпіковості звуження функції на кожному геодезичному маршруті.

У **Підрозділі 2.3** наведено псевдокоди алгоритмів аналізу безпікових функцій: перевірка функцій на безпіковість, знаходження множин рівня функцій, побудова безпікової функції за заданим графом блоків та множиною фільтрацій.

У **Підрозділах 2.4, 2.5** описано та наведено доведення двох головних теорем роботи, а саме Теореми 2.19 та Теореми 2.23, а також лем, необхідних для їх доведення. Теорема 2.19 дає два еквівалентні переформулювання властивості графо-блоковості, у той час як Теорема 2.23 описує взаємне розміщення множин рівня безпікових функцій на графах блоків. Також наведено Наслідок 2.24 з Теореми 2.23, який описує безпікові функції на деревах.

У **Розділі 3** формально визначено поняття кількості безпікових функцій на графі. Сформульовано та доведено твердження про кількість безпікових функцій на повних графах. Також наведено псевдокод алгоритму підрахунку безпікових функцій на довільних деревах, який є прямим застосуванням Наслідку 2.24.

Література

[1] Р. Зимовець та С. Козеренко, Безпікові функції на графах блоків, XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, травень 2023, Київ, Україна.

[2] V.D. Chepoi, Peakless functions on graphs, Discrete Appl. Math. **73** (1997), 175–189.

[3] F. Harary, A characterization of block graphs, Canad. Math. Bull. **6** (1963), 1–6.

[4] F. Harary, Graph theory. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969, pp. 274.

[5] H. Busemann, The Geometry of Geodesics (Academic Press, New York, 1955).

[6] M. van de Vel. Theory of Convex Structures (Elsevier, Amsterdam, 1993).