ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЧАСТИНОК

Авдєєнко Іван Максимович

Науковий керівник: Дрінь Світлана Сергіївна

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розробка та застосування ітераційного методу для вирішення задач необумовленої оптимізації, що стосуються прогнозування оптимального набору товарів для певної категорії, з урахуванням комерційних факторів

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- k — кількість товарів у категорії
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$ — вектор часток кожного товару в рекомендованому наборі
- $\mu \in \mathbb{R}^k$ — вектор очікуваної дохідності для кожного товару
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ — коваріаційна матриця дохідностей товарів
- $q \in \mathbb{R}$ — очікувана загальна дохідність
- $B = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ \mu^T \end{bmatrix}$ — матриця обмежень
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{k-2}$ — вектор незалежних параметрів
- $\eta > 0$ — коефіцієнт загасання (регуляризації)
- $V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T M \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{d}$ — функціонал, який мінімізується
- $B^+ \in \mathbb{R}^{k \times 2}$ — псевдообернена матриця до B
- $\mathbf{g} = B^+ c$ — частковий розв'язок, що задовольняє обмеження
- $Z \in \mathbb{R}^{k \times (k-2)}$ — ортонормована база ядра B
- $M = Z^T \Sigma Z$ — редукована коваріаційна матриця
- $\mathbf{d} = Z^T \Sigma \mathbf{g}$ — зведений вектор
- Δt — крок по часу в чисельному розв'язку
- $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — мінімальне та максимальне власне значення M

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДЛЯ ТОВАРНОГО НАБОРУ ДЛЯ ПЕВНОЇ КАТЕГОРІЇ

Розглянемо задачу вибору товарного набору з k позицій з метою мінімізації ризику:

$$\min\ \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad \text{за умов} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{w}^T \mu = q$$

Ця задача дозволяє знайти таке співвідношення товарів у категорії, яке мінімізує сукупний ризик (варіативність очікуваної дохідності), задовольняючи водночас дві умови:

- вся маса розподілена між товарами — повний набір;
- очікувана дохідність набору фіксована.

МЕТОД DFPM ЯК ПІДХІД ДО РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

Метод DFPM розв'язує задачу мінімізації функціоналу у вигляді динамічної системи з регуляризацією:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \eta\dot{\mathbf{u}}(t) = -\nabla V(\mathbf{u}(t)), \quad \eta > 0$$

де $V(\mathbf{u})$ — квадратичний функціонал, що відповідає зведеній задачі оптимізації:

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T M\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{d}$$

Інтерпретація:

- $\mathbf{u}(t)$ — траєкторія руху системи до оптимуму;
- η — параметр регуляризації, що згладжує коливання;
- градієнт $\nabla V(\mathbf{u})$ — «сила», яка тягне розв'язок до мінімуму.

АЛГЕБРАЇЧНЕ ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ

Через матрицю обмежень

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T \\ \mu^T \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$\mathbf{w} = Z\mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad \text{де } Z \text{ — база ядра } B, \quad \mathbf{g} = B^+ c$$

Підставляємо і отримуємо:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{k-2}} \frac{1}{2}\mathbf{u}^T M \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{d}$$

$$M = Z^T \Sigma Z, \quad \mathbf{d} = Z^T \Sigma \mathbf{g}$$

ПАРАМЕТРИ ТА ЗБІЖНІСТЬ У МЕТОДІ DFPM

Оптимальні значення:

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\min}} + \sqrt{\lambda_{\max}}}, \quad \eta = \frac{2\sqrt{\lambda_{\min}\lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}} + \sqrt{\lambda_{\max}}}$$

де $\lambda_{\min}$ та $\lambda_{\max}$ — найменше та найбільше власне значення матриці M.

Властивості збіжності:

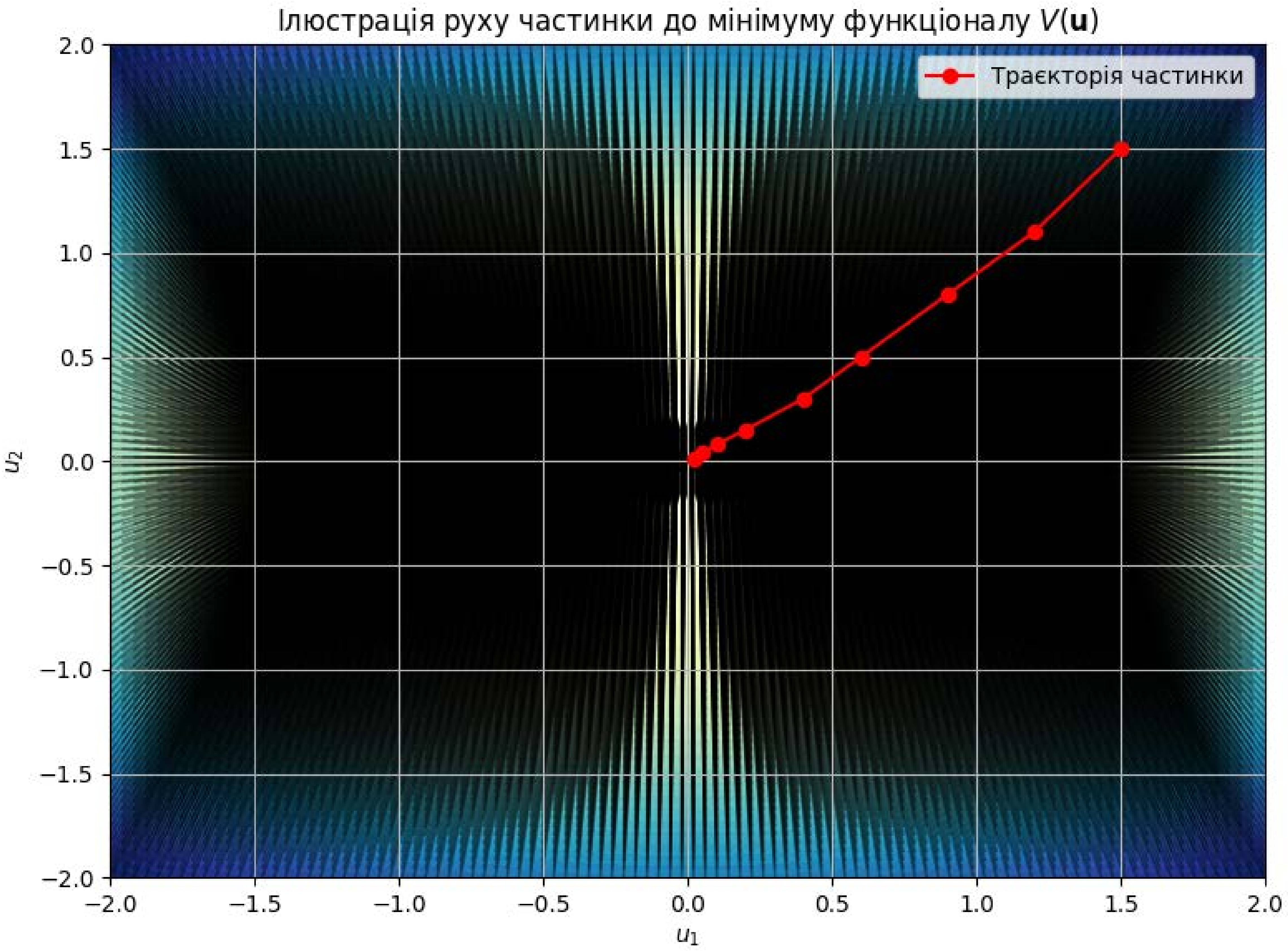
- Метод збігається до стаціонарного розв'язку задачі мінімізації функціоналу.
- Збіжність гарантована навіть у випадку виродженої (сингулярної) матриці M.
- Початкові умови: $\mathbf{u}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$.

Критерій зупинки:

$$\frac{\|\nabla V(\mathbf{u}_k)\|}{V(\mathbf{u}_k)} < \varepsilon$$

де ε — задана толерантність.

ФІЗИЧНА ІНТЕРПРИТАЦІЯ МЕТОДУ DFPM



ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

DFPM можна застосовувати для систем підтримки прийняття рішень у сфері торгівлі:

- Підбір оптимального асортименту товарів з урахуванням комерційних факторів
- Зменшення ризику втрати прибутку або відсутності продажів.
- Адаптація до реальних ринкових умов навіть при неповних або нестабільних даних.

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОГО НАБОРУ ТОВАРІВ

	DFPM	Moore–Penrose	Lasso	Equal-weighted
Norm	9.4189e+01	8.9565e+01	9.1146e+01	4.7673e−02
Variance	3.0960e−06	3.2282e−01	5.5834e+01	8.4561e−04
Sharpe ratio	5.6833e+02	1.7600e+00	1.3383e−01	− 3.3433e−03

ЛІТЕРАТУРА

[1] Gulliksson M., Mazur S. An Iterative Approach to Ill-Conditioned Optimal Portfolio Selection. Computational Economics, 2020, 56:773–794.

[2] Gulliksson M., Karlsson M., Lindskog F. A damped dynamic systems approach for solving ill-conditioned optimization problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 362: 352–363.

[3] Ding Y., Liu J. Joint pricing strategies of multi-product retailer with reference-price and substitution-price effect. Journal of Data, Information and Management, 2021, 3:49–63.

[4] Gulliksson M., Karlsson M. Damped dynamical systems for solving equations and optimization problems. In: Advances in Computational Mathematics, Springer, 2020.