

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Курсова робота на тему:

**«РІВНОВАГА В СТОХАСТИЧНИХ КОАЛІЦІЙНИХ ІГРАХ НА
ГРАФАХ»**

Керівник курсової роботи

к. фіз.-мат. наук, доц.

Чорней Р. К.

(прізвище та ініціали)

_____ *(підпис)*

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконав студент 5 курсу

напряму підготовки

124 «Системний аналіз»

Науменко Андрій Олександрович

“ ____ ” _____ 2020 р.

Київ 2020

Тема: Статистичне дослідження поведінки людини у стані ризику та невизначеності.

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	10.10.2019	
2.	Пошук та збір тематичних матеріалів.	20.11.2019	
3.	Ознайомлення з відповідними матеріалами та обдумування структури роботи.	25.12.2019	
4.	Написання вступу та плану роботи.	31.12.2019	
5.	Вивчення відповідних матеріалів, що необхідні для написання першого розділу роботи, та безпосереднє його написання.	03.02.2020	
5.	Опрацювання необхідних матеріалів та написання другого розділу роботи.	29.02.2020	
6.	Вивчення потрібних джерел та завершення роботи над другим розділом роботи.	24.03.2020	
7.	Коректне оформлення роботи відповідно до вимог написання курсової роботи.	29.03.2020	
8.	Створення презентації та написання доповіді для захисту роботи.		
9.	Подання та аналіз попередньої версії роботи з керівником.		
10.	Корегування роботи згідно із зауваженнями керівника.		
11.	Захист курсової роботи.		

Студент Науменко А. О.

Керівник Чорней Р. К.

“ _____ ” _____

ЗМІСТ

Анотація	4
Вступ	5
РОЗДІЛ 1: Стохастичні Ігри	7
РОЗДІЛ 2: Формалізація та визначення гри	9
РОЗДІЛ 3: Стратегії та очікувані виграші	10
3.1. Змішані стратегії	11
3.2. Стратегії без пам'яті	12
3.3. Кінцева стратегія пам'яті	13
РОЗДІЛ 4: Висновки	14
Список використаної літератури	16

АНОТАЦІЯ

Задається та формалізується гра для двох гравців на графах та розглядаються різні типи стратегій для двох гравців. Підводяться підсумки

Ключові слова: Стохастична оптимізація, граfi, теорія ігор

ВСТУП

Стохастична оптимізація відноситься до сукупності методів мінімізації або максимізації цільової функції за наявності випадковості. За останні кілька десятиліть ці методи стали важливими інструментами для науки, техніки, бізнесу, інформатики та статистики. Конкретні задачі різноманітні, але включають: виконання імітаційних моделей для вдосконалення розміщення акустичних датчиків на промені, вирішення, коли випускати воду з резервуара для виробництва гідроелектричної енергії, та оптимізації параметрів статистичної моделі для деякого набору даних. Випадковість зазвичай входить у проблему двома способами: через функцію витрат або набір обмежень. Хоча стохастична оптимізація відноситься до методу оптимізації, який використовує випадковість у деяких методах, ми розглядаємо лише задачі, де цільова функція або обмеження є випадковими.

Як і за детермінованої оптимізації, не існує єдиного методу рішення, який би працював добре для всіх проблем. Структурні припущення, такі як обмеження розміру простору рішення та результатів, або опуклості, необхідні для того, щоб зробити розв'язки простежуваними.

Найкращий поділ задач який можна запропонувати - між методами вирішення проблем з одиничним часовим періодом та тими, що мають декілька періодів часу (багатоступеневі проблеми). Одностадійні проблеми намагаються знайти єдине, оптимальне рішення, наприклад найкращий набір параметрів для статистичної моделі за даними. Багатоступеневі проблеми намагаються знайти оптимальну послідовність рішень, таких як планування викидів води з гідроелектростанцій протягом двох років. Одноетапні проблеми зазвичай вирішуються модифікованими методами детермінованої

оптимізації. Однак залежність майбутніх рішень від випадкових результатів затруднює пряму модифікацію детермінованих методів у багатоступеневих проблемах. Багатоступеневі методи більше залежать від статистичного наближення та сильних припущень щодо самої структури проблеми, таких як кінцеві простори рішення та результатів, або компактне марківське представлення процесу прийняття рішення.

1. Стохастичні ігри

Ми розглянемо одночасні ігри для двох гравців, що граються на скінченних графах. У цій грі двоє гравців обирають хід в кожному стані самостійно, кожен не знаючи про вибір іншого. На кожен раунд гри Гравець I та Гравець II вибирають свої дії одночасно, і тоді визначається наступний стан. Скінченна або нескінченна послідовність станів, отриманих у результаті, є результатом гри. Ми також обговорюємо найнижчу очікувану величину, яку може досягти Гравець II проти будь-якої стратегії гравця I. Якщо ці дві величини рівні, ми називаємо їх ціною гри та кажемо, що гра визначена.

Оптимальна стратегія гравця I - це стратегія, яка гарантує ціну гри з кожної стратегії. Нарешті, ϵ -оптимальна стратегія гравця I - це стратегія, яка задовольняє мету в межах ϵ помилки значення гри для деякого позитивного значення ϵ . Всі ігри, розглянуті в цій роботі, можна розглядати як ігри з нульовою сумою, а мета досяжності є однією з основних основних цілей серед задач Бореля. Хоча ми знаємо, що для кожного загального класу ігор (тобто ігор Блеквелла) рішучість та оптимальні результати мають значення для всіх цілей Бореля [24], ця теза є конкретним доказом одночасних стохастичних ігор та може дати глибоке інтуїтивне розуміння в цю тему, особливо гри на графі.

Одночасні стохастичні ігри на графах важче проаналізувати, ніж ігри які ведуться по черзі. Наприклад, в одночасних іграх оптимальних стратегій може не існувати, але для кожного реального $\epsilon > 0$ завжди існує стратегія, яка гарантує вигравний результат з вірогідністю, що лежить в межах ϵ -оптимального значення. Є ще багато складних відкритих проблем у одночасних стохастичних ігор. Багато основних принципів все ще чекають їх виявлення в цих іграх, особливо використання функцій виплат, які ми згадували раніше.

Теорія ігор пропонує дуже абстрактні інструменти, які допомагають нам представляти та аналізувати інтерактивні ситуації. Їх абстракція дозволяє застосовувати їх у різних дисциплінах, від теорії множин та логіки до економічної та біологічної. Найважливішим поняттям у цьому підході є рівновага Неша, яка представляє ситуацію, коли жодному гравцеві нічого не виграти, змінюючи свою стратегію в односторонньому порядку.

2. Формалізація та визначення гри

Ігровий граф (для двох гравців) – це вектор $G = (S, A_I, A_{II}, \delta)$, де:

- S, A_I і A_{II} це непусті кінцеві множини,
- δ це функція з $S \times A_I \times A_{II}$ в S .

Елементи S називаються станами. Елементи A_I і A_{II} називаються діями, відповідно. δ азивається перехідною функцією.

Шлях або гра $G = (S, A_I, A_{II}, \delta)$ - це скінченна, або нескінченна послідовність $s_0 s_1 s_2 \dots$ станів у S таким чином, що для всіх $n \in N$, існує $a_n \in A_I$ і $b_n \in A_{II}$ де $\delta(s_n, a_n, b_n) = s_{n+1}$. Нескінченні шляхи G іноді називають пробіжками. Ми позначаємо $\Omega(G)$ для безлічі нескінченних ігор; і $\Omega^{fin}(G)$ для безлічі скінченних непорожніх ігор. Іноді ми позначаємо Ω або Ω^{fin} замість $\Omega(G)$ або $\Omega^{fin}(G)$ коли G зрозуміло з контексту.

Дано граф гри $G = (S, A_I, A_{II}, \delta)$, $F : \Omega \rightarrow [0,1]$ і стан $s \in S$. Стохастична гра $G_S(F)$ з функцією F є нескінченною (для двох гравців) грою з недостатньою інформацією. Процес відбувається так: Гравець I обирає елемент $a_I \in A_I$ і одночасно Гравець II вибирає $a_{II} \in A_{II}$, і визначається наступний стан. Потім гра переходить до наступного раунду тощо. Таким чином вони створюють нескінченну послідовність станів $w = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, так $\delta(a_I, a_{II}, s_i) = s_{i+1}$ для всіх $i \in N$. Нарешті, Гравець II виплачує гравцеві I винагороду $F(w)$, закінчуючи гру.

3. Стратегії та очікувані виграші

Поняття стратегій відіграє важливу роль у нескінченних іграх. Неофіційно стратегія гравця в грі - це правило, яке визначає наступний хід гравця для даної кінцевої гри.

Для множини A розподіл ймовірностей на A – функція

$$\mu : A \rightarrow [0, 1] \text{ з } \sum_a \mu(a) = 1.$$

Для множини всіх розподілів ймовірностей на A використовуємо $D(A)$.

3.1 Змішані стратегії

Змішана стратегія - це правило, вибране серед чистих стратегій у різних пропорціях (іноді називається рандомізованою стратегією).

Нехай G - гра. Змішана стратегія гравця I в G - будь-яка функція

$$\sigma : \Omega^{fin}(G) \rightarrow D(A_I).$$

Ми пишемо Σ^G_I або Σ_I для набору стратегій гравця I. Аналогічно, (змішані) стратегії гравця II в G - це будь-яка функція

$$\tau : \Omega^{fin}(G) \rightarrow D(A_{II}),$$

і ми пишемо Σ^G_{II} або Σ_{II} для набору всіх стратегій гравця II.

3.2 Стратегія без пам'яті

Інтуїтивно зрозуміло, що для даної скінченної гри стратегії без запам'ятовування дають наступну дію залежно від поточного стану, а не самої кінцевої гри.

Нехай G - гра. Стратегія σ називається “безпам'ятною”, якщо $\sigma(p) = \sigma(q)$ виконується, коли $p, q \in \Omega^{fin}(G)$ задовольняє $p(|p| - 1) = q(|q| - 1)$. Аналогічно визначена безпам'ятна стратегія гравця II. Ми записуємо Σ^M_I і Σ^M_{II} для безлічі всіх безпам'ятних стратегій гравця I та гравця II відповідно.

3.3 Кінцева стратегія пам'яті

Загалом стратегія обмеженої пам'яті - це стратегія, яка запам'ятовує лише кінцевий фрагмент історії гри.

Нехай G - гра. Стратегія σ гравця I називається кінцевою пам'яттю, якщо існує функція $\Phi : \Omega^{fin} \rightarrow \Lambda$ для деякого кінцевого набору Λ , і для будь-якого $p \in \Omega$, $\sigma(p) = \Phi(\Phi(p))(p(|p| - 1))$ для деякої функції $\Phi : \Lambda \rightarrow \Sigma_I$.

Кінцева стратегія пам'яті гравця II визначається аналогічно. Ми записуємо Σ_I^Φ і Σ_{II}^Φ для безлічі всіх кінцевих стратегій пам'яті гравця I та гравця II відповідно.

Іншими словами, кінцева стратегія пам'яті - це правило, побудоване за комбінацій стратегій без запам'ятовування.

Висновки

У теорії ігор стохастична гра, введена Лойдом Шаплі на початку 1950-х років, - це динамічна гра з імовірнісними переходами, яку грає один або кілька гравців. Гра проводиться в послідовності етапів. На початку кожного етапу гра знаходиться в якомусь стані. Гравці вибирають дії, і кожен гравець отримує виграш, що залежить від поточного стану та обраних дій. Потім гра переходить у новий випадковий стан, розподіл якого залежить від попереднього стану та дій, обраних гравцями. Процедура повторюється в новому стані і гра триває протягом кінцевої або нескінченної кількості етапів. Повна виплата гравцю часто приймається за дисконтовану суму виплат на сцені або ліміт, що нижчий від середніх показників виплат на сцені.

Стохастичні ігри узагальнюють як Марківські рішення, так і повторні ігри.

Стохастичні ігри для двох гравців на спрямованих графах широко використовуються для моделювання та аналізу дискретних систем, що працюють у невідомому (змагальному) середовищі. Можливі конфігурації системи та її оточення представлені у вигляді вершин, а переходи відповідають діям системи, її оточенню чи "природі". Потім запуск системи відповідає нескінченному шляху в графі. Таким чином, система та її оточення можуть розглядатися як два гравці з антагоністичними цілями, де один гравець (система) має на меті максимізацію ймовірності "хороших" результатів, а інший гравець (оточення) спрямований на протилежне.

У багатьох випадках існує величина рівноваги цієї ймовірності, але оптимальних стратегій для обох гравців може не існувати.

Стохастичні ігри мають застосування в економіці, еволюційній біології та комп'ютерних мережах. Вони є узагальненнями повторних ігор, які відповідають окремому випадку, коли існує лише один стан.

Список використаної літератури

1. Stochastic Games on Graphs/ Ahmad Termimi bin, Ab Ghani // <http://hdl.handle.net/10097/55596>. Mathematical Institute for the degree of Doctor of Science, Tohoku University– 2013.
2. E.Altman, K.Avratchenkov, N.Bonneau, M.Debbah, R.El-Azouzi, D.S.Menasche, 2004. Constrained Stochastic Games in Wireless Networks.
3. Ruslan K. Chornei, Hans Daduna, Pavel S. Knopov, 2004, Stochastic games for distributed players on graphs