УДК 517.927

Захарійченко Ю. О.

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

Композиції елементарних поліноміальних перетворень з лінійними утворюють важливий клас оборотних поліноміальних відображень, які називаються ручними. Показано, що будь-яке нелінійне трикутне перетворення разом з афінною групою породжують усю групу ручних перетворень. З іншого боку, група трикутних перетворень разом з деякими афінними перетвореннями породжує групи, які можна розглядати як нелінійні аналоги параболічних підгруп.

Теорія систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, до яких зводиться низка задач природознавства і техніки, в останні десятиліття збагатилась істотними результатами [1-3]. Серед таких систем зустрічаються системи, про розв'язки яких відома додаткова інформація. Створення методів дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та додатковими умовами є актуальною задачею. Нижче висвітлюється питання сумісності вказаних систем.

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = f(t)\,,\ t \in [0;T] \setminus \{t_i\}\,, \quad (1)$$

$$x(t_i + 0) = S_i\, x(t_i - 0) + \lambda_i\,,\ i = \overline{1,l}\,, \quad (2)$$

$$x(0) = \gamma\,,\ \int_0^T \Phi_s(t)x(t)dt = \alpha_s\,,\ s = \overline{1,l}\,, \quad (3)$$

в якій $A(t)$ – неперервна при $t \in [0;T]$ матриця розмірності $m \times m$, $f : [0;T] \to \mathbb{R}^m$, $f \in L_2([0;T])$, S_i – сталі, невироджені матриці розмірності $m \times m$, $s = \overline{1,l}$, $t_i \in (0;T)$ – фіксовані моменти імпульсного впливу.

Ставиться задача знайти вектор-функцію $x(t)$ і параметри $\lambda_i \in \mathbb{R}^m$ такі, щоб задовольнялася система диференціальних рівнянь (1), справджувались імпульсні умови (2) та обмеження (3).

Ідея дослідження задачі на сумісність полягає в тому, що вихідна задача (1)-(3) зводиться до відповідної системи інтегральних рівнянь, якісну теорію яких добре вивчено. Для цього невідому диференційовану при $t \in [0;T] \setminus \{t_i\}$ вектор-функцію $x(t)$ шукаємо у вигляді

$$x(t) = z(t) + u(t)\,, \quad (4)$$

а шукані параметри $\lambda_i \in \mathbb{R}^m$ визначаємо з умови

$$\lambda_i = u(t_i + 0) - S_i\, u(t_i - 0)\,,\ i = \overline{1,l}\,, \quad (5)$$

Вектор-функція *u(t),* яку називатимемо керуванням, має вигляд

$$u(t) = B(t)\mu\,, \quad (6)$$

$\mu \in \mathbb{R}^p$, $p = ml$ – шукані параметри, $B(t)$ – задана неперервно-диференційована матриця при $t \in [0;T] \setminus \{t_i\}$ розмірності $m \times p$, яка задовольняє умову

$$B(0) = O\,,\ \int_0^T \Phi_s(t)B(t)dt = O\,,\ s = \overline{1,l}\,, \quad (7)$$

де O — нульова матриця розмірності $m \times p$ і така, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\{B(t_i+0) - S_i\, B(t_i-0)\}\,\mu = 0\,,\ i = \overline{1,l} \qquad (8)$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тоді, як це встановлено в [4], задача (1)–(3) зводиться до імпульсної системи для визначення вектор-функції $z(t)$ і параметрів μ, а саме:

$$\frac{dz(t)}{dt} + M(t)z(t) + C(t)\mu = y(t)\,,\ t \in [0;T] \setminus \{t_i\}\ , \qquad (9)$$

$$z(t_i+0) = S_i\, z(t_i-0)\ ,\ i = \overline{1,l}\,, \qquad (10)$$

$$z(0) = \gamma\,,\ \int_0^T \Phi_s(t)z(t)dt = \alpha_s\,,\ s = \overline{1,l}\,, \qquad (11)$$

в якій

$$C(t) = A(t)B(t) + \frac{dB(t)}{dt}\ , \qquad (12)$$

$$y(t) = f(t) + N(t)z(t)\,, \qquad (13)$$

$$N(t) = M(t) - A(t)\,, \qquad (14)$$

де $M(t)$ — задана неперервна матриця на $[0;T]$ розмірності $m \times m$.

Теорема 1. *Нехай однорідна імпульсна система з параметрами*

$$\frac{dz(t)}{dt} + M(t)z(t) + C(t)\mu = 0\,,\ t \in [0;T] \setminus \{t_i\}\,, \qquad (15)$$

$$z(t_i+0) = S_i\, z(t_i-0)\ ,\ i = \overline{1,l}\,, \qquad (16)$$

$$z(0) = 0\,,\ \int_0^T \Phi_s(t)z(t)dt = 0\,,\ s = \overline{1,l} \qquad (17)$$

має лише тривіальний розв'язок $z(t) \equiv 0$, $\mu = 0$. Тоді існують такі матриці $G(t,\tau)$ і $\Gamma(\tau)$ розмірності $m \times m$ і $p \times m$ відповідно, які визначаються однозначно, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (9)–(11) зображається формулами

$$z(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\tau)y(\tau)d\tau\ , \qquad (18)$$

$$\mu = \sigma + \int_0^T \Gamma(\tau)y(\tau)d\tau\ , \qquad (19)$$

де вектор-функція $h(t)$ і вектор σ є розв'язком задачі (9)–(11) при $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Припустимо, що матриця *M(t),* яка є у нашому розпорядженні, підібрана таким чином, що однорідна імпульсна система

$$\frac{dz(t)}{dt} + M(t)z(t) = 0\,,\ t \in [0;T] \setminus \{t_i\}\ , \qquad (20)$$

$$z(t_i+0) = S_i\, z(t_i-0)\,,\ i = \overline{1,l} \qquad (21)$$

задовольняє всі умови теореми про існування і єдиність розв'язків, сформульовані в [1]. Отже, існує матрицант розглядуваної системи $X(t)$, який при $t_i < t < t_{i+1}$ має вигляд

$$X(t) = U(t,\,t_i)\,S_i\,U(t_i,\,t_{i-1})\,S_{i-1}\,\ldots S_1\,U(t_1,\,t_0)\ ,$$

тут $t_0 = 0$, а $U(t,\tau)$ — розв'язок матричної задачі Коші

$$\frac{dX(t)}{dt} + M(t)X(t) = O\,,\ X(\tau) = E\,,$$

де E — одинична матриця розмірності $m \times m$.

Відзначимо, що за допомогою матрицанту *X(t)* множина всіх розв'язків імпульсної системи (20), (21) подається у вигляді

$$z(t) = X(t)c\,,\ c \in \mathbb{R}^m\ ,$$

Тоді, як це встановлено в [1], розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом (9), (10), який задовольняє початкову умову $z(0) = \gamma$, записується у вигляді

$$z(t) = X(t)\gamma + \int_0^t X(t,\tau)y(\tau)d\tau - \int_0^t X(t,\tau)C(\tau)d\tau\,\mu\,,\ t \neq t_i\,, \qquad (22)$$

$$X(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)\,.$$

Для визначення параметра $\mu \in \mathbb{R}^p$, $p = ml$, підставимо вираз (22) в умови (11), в результаті чого отримаємо

$$\int_0^T \Phi_s(t)X(t)dt\,\gamma + \int_0^T \Phi_s(t)\left\{\int_0^t X(t,\tau)y(\tau)d\tau\right\}dt - \int_0^T \Phi_s(t)\left\{\int_0^t X(t,\tau)C(\tau)d\tau\right\}dt\,\mu = \alpha_s\,,$$

$$s = \overline{1,l}\ , \qquad (23)$$

Ввівши позначення

$$D = \int_0^T \Phi(t) \left\{ \int_0^T X(t,\tau) \right\} dt \,, \tag{24}$$

$$d = \int_0^T \Phi(t) X(t) dt\, \gamma - \alpha + \\ + \int_0^T \Phi(t) \left\{ \int_0^T X(t,\tau) y(\tau) \tau) \right\} dt \,, \tag{25}$$

де $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \vdots \\ \Phi_l(t) \end{pmatrix}$ — $(p \times m)$-вимірна матриця,

складена з $m \times m$-вимірних матриць $\Phi_s(t)$, а

$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_l \end{pmatrix}$ — p-вимірний вектор, складений з m-вимірних векторів α_s, які фігурують в умові (11), система (23) набуває вигляду

$$D\mu = d \,. \tag{26}$$

Визначник матриці D не дорівнює нулю, оскільки у противному разі однорідна система (15)-(17) мала б нетривіальний розв'язок, що суперечить припущенню. Тому існує обернена матриця D^{-1}, за допомогою якої розв'язок рівняння (26) виражається формулою

$$\mu = D^{-1} d \,. \tag{27}$$

На основі формул (25), (27) маємо

$$\mu = D^{-1} \left\{ \int_0^T \Phi(t) X(t) dt\, \gamma - \alpha \right\} + \\ + \int_0^T \left\{ \int_0^T D^{-1} \Phi(t) X(t,\tau) dt \right\} y(\tau) d\tau \,,$$

або, поклавши для спрощення запису

$$\sigma = D^{-1} \left\{ \int_0^T \Phi(t) X(t) dt\, \gamma - \alpha \right\} \,, \\ \Gamma(\tau) = \int_0^T D^{-1} \Phi(t) X(t,\tau) dt \,, \tag{28}$$

$$\mu = \sigma + \int_0^T \Gamma(\tau) y(\tau) d\tau \,.$$

Підставивши (28) в (22), знаходимо

$$z(t) = X(t)\gamma + \int_0^T \theta(t-\tau) X(t,\tau) y(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t X(t,\tau) C(\tau) d\tau\, \sigma - \\ - \int_0^t X(t,\tau) C(\tau) d\tau \int_0^T \Gamma(\tau) y(\tau) d\tau = \\ = h(t) + \int_0^T G(t,\tau) y(\tau) d\tau \,, \tag{29}$$

де

$$h(t) = X(t)\gamma - \int_0^t X(t,\tau) c(\tau) d\tau\, \sigma \,,$$

$$G(t,\tau) = \theta(t-\tau) X(t,\tau) - \int_0^t X(t,s) C(s) ds\, \Gamma(\tau) \,,$$

$\theta(t-\tau)$ — функція Хевісайда.

Отже, встановлено, що єдиний розв'язок задачі (9)-(11) зображається формулами (28) і (29), тобто формулами (18), (19).
Теорему доведено.

Підставивши (19) у (6), отримаємо для керування зображення

$$u(t) = r(t) + \int_0^T R(t,\tau) y(\tau) d\tau \,, \tag{30}$$

а підставивши (18), (30) — у (4), маємо для вектор-функції $x(t)$ формулу

$$x(t) = k(t) + \int_0^T K(t,\tau) y(\tau) d\tau \,, \tag{31}$$

в яких

$$r(t) = B(t)\sigma, \; k(t) = h(t) + r(t); \\ R(t,\tau) = B(t)\Gamma(\tau), \; K(t,\tau) = G(t,\tau) + R(t,\tau),$$

Якщо тепер підставити (18) у (13), то, виконавши нескладні перетворення, одержуємо для визначення вектор-функції $y(t)$ інтегральне рівняння

$$y(t) = p(t) + \int_0^T L(t,\tau) y(\tau) d\tau \,, \tag{32}$$

де

$$p(t) = f(t) + N(t)h(t)\,,\ L(t,\tau) = N(t)G(t,\tau)\,.$$

Отже, питання розв'язуваності задачі (1)-(3) звелось до аналогічного питання для інтегрального рівняння (32). Рівносильність задачі (1)-(3) і інтегрального рівняння (32) можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 2. *Якщо $y^*(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння (32), то вектор-функція*

$$x^*(t) = k(t) + \int_0^T K(t,\tau)y^*(\tau)d\tau$$

і вектори

$$\lambda_i^* = \{B(t_i+0) - S_i\,B(t_i-0)\}\,\mu^*\,,\ i = \overline{1,l}\,, \tag{33}$$

де

$$\mu^* = \sigma + \int_0^T \Gamma(\tau)y^*(\tau)d\tau\,,$$

є розв'язком задачі (1)–(3).

Якщо вектор-функція $x^*(t)$ і вектори λ_i^*, $i = \overline{1,l}$ — розв'язок задачі (1)–(3), то вектор-функція

$$y^*(t) = \frac{dz^*(t)}{dt} + M(t)z^*(t) + C(t)\mu^*\,,$$

в якій

$$z^*(t) = x^*(t) - u^*(t)\,,\ u^*(t) = B(t)\mu^*\,,$$

а невідомий параметр μ^* визначається з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (33), є розв'язком інтегрального рівняння (32).

1. *Самойленко А. М., Перестюк* Я. *А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища шк., 1987.— 288с.

2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.— К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995.— 319 с.

3. *Самойленко А. М., РонтоН. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— К.: Наук, думка, 1992.— 280 с.

4. *Лучка А. Ю., Захарійченко Ю. О.* Дослідження систем диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнями // Нелінійні коливання.— 2000.— 3, № 2.— С. 218-225.

Yu. O. Zakhariychenko

THE INVESTIGATION METHOD OF IMPULSE SYSTEMS OF DEFFERENTIAL EQUATIONS WITH AN IMPULSE EFFECT

The system of differential equations with an impulse effect at fixed moments of time and with parameters is studied. The equivalence of the impulse system of differential equations with restrictions and parameters in impulse conditions to integral equations is established. An efficient method is proposedfor examining solutions of these problems.