

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Факультету інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь — бакалавр

на тему: **«ЕКСТРЕМАЛЬНІ ГРАФИ»**

Виконав: студент 4-го року навчання,

Освітньої програми «Прикладна

математика»,

спеціальності 113 Прикладна

математика

Васюра Владислав Віталійович

Керівник: Тимошкевич Л.М.,

ст. викладач, кандидат фіз.-мат. наук

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена з

оцінкою _____

Секретар ЕК _____

« _____ » _____ 20 ____ р.

Київ - 2022

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Факультету інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
проф., д.ф-м.н., Б. В. Олійник

(підпис)

„____” _____ 2022 р.

Індивідуальне завдання

для кваліфікаційної роботи

студенту 4 курсу, факультету інформатики
Васюрі Владиславу Віталійовичу

Тема: Екстремальні графи.

Зміст кваліфікаційної роботи:

Зміст

Анотація

Вступ

Екстремальна теорія графів

Огляд ключових теорема екстремальної теорії графів

Власні дослідження: твердження та задачі

Висновки

Список літератури

Дата видачі “____” _____ 2021р.

Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено “ _____ ” _____ 2022 р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	19.10.2021			
2.	Ознайомлення з темою та літературою.	21.11.2021			
3.	Розробка плану та структури роботи.	12.02.2022			
4.	Робота з науковою літературою.	21.04.2022			
5.	Збір, розв’язок та оформлення задач.	03.05.2022			
6.	Підготовка роботи до передзахисту.	13.06.2022			
7.	Підготовка роботи до захисту.	20.06.2022			

Науковий керівник _____

(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____

(ПІБ)

Зміст

Анотація	5
Вступ	7
1 РОЗДІЛ: Екстремальна теорія графів	9
1.1 Основні відомості	9
1.2 Основні поняття з теорії графів	9
1.3 Спадкові властивості графів	13
1.4 Прикладне застосування	14
2 РОЗДІЛ: Огляд ключових теорема екстремальної теорії графів	15
2.1 Планарні графи	15
2.2 Графи без повних підграфів	17
2.3 Теорема Турана для дерев	18
3 РОЗДІЛ: Власні дослідження: твердження та задачі	21
3.1 Доведення тверджень про екстремальні графи	21
3.1.1 Заборонені ланцюги	21
3.2 Власні формулювання та розв'язання задач	28
3.2.1 Фреш-фест “Тімбілд”	28
3.2.2 Вечір-знайомств	29
3.2.3 Гра в точки	29
3.2.4 Андріївські вечорниці	30
Висновки	31
Список літератури	32

Анотація

Метою кваліфікаційної роботи є систематизація основних результатів екстремальної теорії графів, дослідження екстремальних графів, що не містять ланцюги та демонстрація застосування розглянутих теорем на задачах власного формулювання.

У роботі було досліджено ключові теореми та твердження екстремальної теорії графів. Систематизовано інформацію щодо деяких розділів цієї теорії. Також знайдено результат та доведено три випадки не існування ланцюгів у графах певної довжини. Ще було сформульовано та розв'язано декілька задач на доведені та розглянуті твердження.

Перелік умовних позначень

$G = (V, E)$ — простий неорієнтований граф з множини вершин V та множиною ребер E

$d(v)$ — степінь вершини v

$ex(n, K)$ — максимальна кількість ребер для K -вільного графа на n вершинах

$ex(p, K_n)$ — найбільше ребер у графах з p вершинами, які не містять підграф K_n .

K_n — повний граф на n вершинах

K_r^s — r -граф з клікою розміру s

$\delta(G) = \min_{x \in V(G)} d(x)$

Вступ

Наскільки великою має бути група людей, щоб гарантувати, що або вісім людей взаємно знають один одного, або що вісім людей є спільно незнайомими людьми? Скільки максимум офіцерів можна розмістити на стандартній шаховій дошці так, щоб двоє з них не нападали один на одного? Чи існують оптимальні, справедливі експериментальні проекти, за допомогою яких ми можемо взаємно порівнювати тринадцять конкуруючих марок автомобілів без необхідності безпосередньо порівнювати всі сімдесят вісім можливих пар марок? Ці проблеми є прикладами екстремальних задач у комбінаториці та теорії графів, субдисципліні математики, яка передбачає зовсім інший спосіб мислення щодо таких областей, як алгебра, геометрія та числення.

Екстремальна теорія графів винила на початку XX століття після доведення теореми Мантеля у 1907 році, в якій стверджується що зв'язний граф порядку $n \geq 3$ і розміру $m > \lfloor n^2/4 \rfloor$ містить трикутник.[\[16\]](#) Наступний вагомий поштовх стався тоді, як Туран у 1941 році написав доведення теореми, яка показує графи порядку n , які не містять повного графа K_k порядку k , і є екстремальними щодо розміру.[\[3\]](#) В подальшому, теорема Турана стане мотивацією для пошуку таких результатів, як теорема Ердеша-Стоуна (1946).[\[2\]](#) Також Чао і Новацькі у тисяча довели що графи Турана хроматично єдині.[\[6\]](#) Пор та Вуд, досліджуючи геометричні властивості графів, дали нижню оцінку будь-якого тривимірного вкладення графа Турана.[\[7\]](#)

В інтернет просторі знаходиться велика кількість інформації щодо екстремальних графів, але вона є не систематизованою і в деяких випадках дуже складною для розуміння, тому метою даної роботи є систематизувати та описати зібрану інформацію, сформулювати власні доведення деяким

відомим твердженням та придумати задачі на ці твердження, які можуть використовуватись на олімпіадах чи конкурсах.

Наукове завдання:

- Систематизація основних результатів екстремальної теорії графів
- Дослідження екстремальних графів, що не містять ланцюги
- Демонстрація прикладного застосування розглянутих у роботі ключових теорем до розв'язування олімпіадних задач

1 РОЗДІЛ: Екстремальна теорія графів

1.1 Основні відомості

Основним твердженням всієї теорії екстремальних графів є теорема Мантеля, доведена в 1907 році, яка каже, що будь-який граф з n -вершин без трикутника містить не більше $\lfloor n^2/4 \rfloor$ ребер. Це очевидно найкращий з можливих варіантів, так як можна розбити множину з n вершин на два набори розміру $\lfloor n/2 \rfloor$ і $\lfloor n/2 \rfloor$ і утворити повний дводольний граф між ними. Цей граф не має трикутників і $\lfloor n^2/4 \rfloor$ ребер. Потім Туран узагальнив результат Мантеля для випадку будь-якої кількості незалежних вершин тисяча дев'ятсот сорок першого року. Розширенням результату Турана стала Теорема Ердеса-Стоуна у тисяча дев'ятсот сорок шостому році. Але так як цей результат для деяких науковців був не показовим, тому що він пов'язує хроматичне число з кількістю ребер яка є максимальною в H -безкоштовному графі, то був придуманий альтернативний доказ у тисяча дев'ятсот сімдесят п'ятому році і показаний у Лемі регулярності Семереді. Вона є одним з найпотужніших інструментів у теорії екстремальних графів, особливо при вивченні великих щільних графів. Грубо кажучи, лема про регулярність Семереді говорить, що жоден граф не є цілком випадковим, оскільки кожен граф принаймні дещо випадковий.

1.2 Основні поняття з теорії графів

Означення 1.2.1. Графом називається сукупність точок (вершин) і ліній (ребер), що їх з'єднують.

Означення 1.2.2 Загальний неорієнтований граф – це сукупність $G = (V, E, L)$, яка складається з трьох множин: V, E, L .

- V – множина вершин;
- E – множина ребер;
- L – множина петель.

Означення 1.2.3 Ребро називається **інцидентним** тим вершинам, які воно з'єднує, а вершини, які з'єднані таким ребром, називаються **суміжними**.

Означення 1.2.4 Якщо кінці ребра належать одній вершині, то таке ребро називається **петлею**.

Означення 1.2.5 Вершини, які не належать кінцям жодного з ребер у графі, називаються **ізольованими**.

Означення 1.2.6 **Степенем вершини** називається число ребер яким належить ця вершина. Якщо степені всіх вершин дорівнюють k , то граф називають **регулярним графом** зі степенем k .

Означення 1.2.7 Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара його вершин зв'язна.

Означення 1.2.8 Граф, у якому будь-яка пара вершин з'єднана ребрами, називається **повним**.

Означення 1.2.9 Повний граф завжди є зв'язним, але не всякий зв'язний граф є повним.

Означення 1.2.10 **Ланцюг** – це послідовність виду $Q = x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_l u_l$, де ребра $u_0, u_1, \dots, u_l$ різні і ребро u_i з'єднує (в будь-якому напрямі) вершини x_{i-1} та x_i ($i = 1, 2, \dots, l$) графу $M = (V, E, L)$.

Означення 1.2.11 Ланцюг, в якому будь-яка вершина не зустрічається двічі, називається **простим**.

Означення 1.2.12 **Циклом** називається ланцюг, в якому початкова і кінцева вершина збігаються.

Означення 1.2.13 Якщо цикл через кожну вершину проходить лише один раз, то такий цикл називається **простим**.

Означення 1.2.14 **Довжиною** ланцюга (циклу) називається кількість ребер цього ланцюга (циклу).

Означення 1.2.15 Граф без циклів називається **лісом**.

Означення 1.2.16 Дерево – зв'язний граф без циклів.

Означення 1.2.17 Граф називається **ейлеровим**, якщо у ньому існує цикл, що містить кожне ребро (по одному разу).

Означення 1.2.18 Граф називається **гамільтоновим**, якщо у ньому існує простий цикл, що містить кожну вершину (по одному разу).

Означення 1.2.19 Дводольний граф – це граф, вершини якого можна розділити на дві непорожні множини, що не перетинаються, так, що вершини однієї множини попарно не суміжні між собою, але можуть бути з'єднані з вершинами іншої множини.

Означення 1.2.20 Дворегулярним графом є дводольний граф, в якому є лише два різні степені вершин, по одному для кожного набору вершинного дводілу.

Означення 1.2.21 Міст – ребро, видалення якого збільшує кількість компонент зв'язності. Рівнозначне визначення, ребро є мостом тоді і тільки тоді, коли вони не входять до жодного циклу.

Означення 1.2.22 Компонента зв'язності неорієнтованого графа – це підграф, в якому будь-які дві вершини зв'язані одна з одною шляхами, і вони не зв'язані з ніякими вершинами, що не входять в цю компоненту зв'язності.

Означення 1.2.23 Дві вершини графа називаються **незв'язними**, якщо у графі не існує жодного шляху, що пов'язує їх. Граф називається **незв'язним**, якщо хоча б дві вершини його незв'язні.

Означення 1.2.24 Обхват графа – це довжина його найдовшого простого циклу.

Означення 1.2.25 Кліка – це набір взаємо суміжних вершин.

Означення 1.2.26 Граф називається **щільним**, якщо кількість його ребер близька до максимальної. Граф з малою кількістю ребер називається **розрідженим**.

Означення 1.2.27 Якщо ребра має однакові початок і кінець, то їх називають **кратними** ребрами, а граф, в якому вони присутні, називається **мультиграфом**.

Означення 1.2.28 Петля – ребро, що виходить і заходить в одну і ту ж вершину. Граф, в якому є петлі, називається **псевдографом**.

Означення 1.2.29 Два графа U і V **ізоморфні**, якщо в цих графах існує бієкція між безліччями їх вершин: кожні 2 вершини в графі U з'єднані в тому і тільки тому випадку, якщо в графі V пов'язані ті ж вершини.

Означення 1.2.30 Граф $L_1 = (V_1, E_1)$ називається **підграфом** графа $L = (V, E)$, якщо $V_1 \subseteq V$ та $E_1 \subseteq E$.

Означення 1.2.31 Розфарбування називають правильним, якщо кольори суміжних вершин не співпадають. Граф, для якого існує правильне k -розфарбування, називають розфарбованим графом.

Означення 1.2.32 Мінімальне число m , для якого існує правильне розфарбування графа G називається **хроматичним числом** цього графа і позначається $\chi(G)$.

Означення 1.2.33 Якщо $\chi_p(G) = k$, то граф G називають k -хроматичним.

Тобто його вершини можна розфарбувати k різними кольорами так, що у будь-якого ребра інцидентні вершини матимуть різний колір.

Означення 1.2.34 Правильне k -розфарбування графа G при $\chi_p(G) = k$ називають **мінімальним**.

Означення 1.2.35 Хроматичне число незв'язного графа дорівнює максимальному з хроматичних чисел його компонент зв'язності.

Означення 1.2.36 Під нижніми оцінками хроматичного числа будемо розуміти нерівності виду $\chi(G) \geq c$, де c – деяка константа, що обчислюється на графі G .

Означення 1.2.37 Верхня оцінка хроматичного числа – це нерівності виду $\chi(G) \leq c$, де c – деяка константа, що обчислюється на графі G .

1.3 Спадкові властивості графів

Властивість P графів називається спадковою, якщо з її виконання для графа G випливає її виконання і для будь-якого графа G .

Нехай $P(n)$ позначає найбільше число ребер в графі з спадковою властивістю P , який містить n вершин. Графи $G(V, E)$ з спадковою властивістю P , для яких виконується $|E| = P(|V|)$ називаються екстремальними.

Теорема 1.3.1 *Якщо P - спадкова властивість графів, то*

$$P(n) \leq \frac{n}{n-2} \times P(n-1), n \geq 3.$$

Доведення. Нехай $G(V, E)$ - граф з спадковою властивістю P , $|V| \geq 3$, і $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Розглянемо графи

$$G_i = G - v_i = (V_i, E_i): V_i = V \setminus \{v_i\}, |E_i| = |E| - d_G(v_i), i = 1, \dots, n.$$

Графи G_i - також мають спадкову властивість P , звідки

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leq P(n-1)$$

при всіх $i=1, \dots, n$. Склавши всі нерівності отримаємо

$$n \times |E| - \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \leq n \times P(n-1)$$

За формулою Ойлера для степенів вершин

$$\sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2 \times |E|, \text{ тому } |E| \leq \frac{n}{n-2} \times P(n-1)$$

Нерівність виконується для будь-якого графа з спадковою властивістю P , отже, і для графа $G(V, E)$ з $|E| = P(n)$.

1.4 Прикладне застосування

Екстремальна теорію графів широко застосовують у логістиці. Багато новітніх транспортних систем використовують теорію графів щоб збирати дані про місцезнаходження автомобілів через навігатори і таким чином передавати інформацію водіям де, з якою швидкістю їхати, де можна проїхати швидше більш довгим шляхом через певні чинники, і через це зменшується загальне навантаження на дороги в країнах. Також теорію графів використовують авіакомпанії, які хочуть з'єднати між собою велику кількість точок (в нашому випадку міст) найефективнішим способом, для того щоб придумати систему перевезення для великої кількості пасажирів і зі зменшенням кількості можливих поїздок. Під час реалізації цієї системи диспечери якось повинні переконатися, що велика кількість літаків знаходяться там де вони повинні бути і що вони не зіштовхнуться між собою в певний момент. Це все було б неможливе без екстремальної теорії графів. Також графами можна зобразити, наприклад, схеми якихось доріг, географічні карти різних видів, молекули хімічних сполук, зв'язки між декількома людьми або групою людей. Також дану теорію застосовують при проектуванні блок-схем різних програм та схем управління, при дослідженні автоматів, логічних ланцюгів, її застосовують в економіці, статистиці, хімії, тощо.

Цікавим і корисним прикладом застосування теорії графів у реальному житті є робота Наталії Левенкової [\[5\]](#). У своїй науковій статті вона використала теорію графів для вирішення проблем, які пов'язані з реальними мережами. Однією із проблем стала модель мережі сексуальних контактів, а інша включала в себе кримінальні мережі. Головним рушієм початку дослідження структури базової моделі мережі сексуальних контактів стало те, що за допомогою неї можна дослідити інфекції, які можуть передаватися виключно статевим шляхом. У даній роботі авторка

створила просторову динамічну модель мережі на основі практичних даних та математично довела рівнозначність певних заходів, які стосуються окремих параметрів моделі. Дослідження ринків наркотиків і злочинних груп, які працюють всередині них, важливо, щоб боротися з ними найефективнішими способами. Таким чином авторка дослідила ефективність чотирьох різноманітних стратегій втручання, на меті у яких була ліквідація мереж продажів наркотиків: заходи щодо особистості, які ґрунтуються на високому рівні діяльності; втручання, що поєднує перші дві стратегії; заходи щодо особистості, засновані на ролях; а також випадкове втручання. За результати дослідження було визначено, що найбільш ефективним є використання стратегія щодо осіб з урахуванням високого рівня і ролі в мережах.

2 РОЗДІЛ: Огляд ключових теорема екстремальної теорії графів

2.1 Планарні графи

В багатьох випадках взагалі не має значення, як зобразити граф на площині у вигляді малюнка, через те що ізоморфні графи подібні за структурою. Існують певні ситуації у яких потрібно, щоб зображення графа на площині було в межах певних умов. Для прикладу, якщо граф є моделлю якогось водопроводу, де вершинами є пожежні гідранти, а ребрами, відповідно, є труби між ними, то потрібно таким чином розташувати їх на площині, щоб не було будь-яких перетинів. Тепер можемо сказати про визначення плоского графа. Граф називають *плоским*, якщо його діаграму можна зобразити на площині так, щоб лінії, які є

ребрами графа мали спільні точки тільки у вершинах графа. Дане зображення називають *плоскою картою графа*. Граф називають *планарним*, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу.[\[15\]](#)

Інакше граф $G = (V, E)$ називається *планарним*, якщо його можна зобразити на площину так, щоб кожній вершині $v \in V$ відповідає точка площини, причому різним вершинам відповідають різні точки; кожному ребру $(v, w) \in E$ - неперервна крива, що з'єднує точки, які відповідають вершинам v, w , і не проходять через точки, що відповідають іншим вершинам; крім того, криві, що відповідають різним ребрам, що не перетинаються за винятком своїх кінців.

Теорема 2.1.1 (Формула Ойлера для планарних графів)

У будь-якому зв'язному планарному графі виконується формула Ойлера

$$|V| - |E| + |P| = 2$$

Доведення. Нехай $G = (V, E)$ - зв'язний плоский граф з $n=|V|$ вершинами, а $T = (V, E_T)$ - деяке його кістякове дерево. Дерево T має тільки одну зовнішню грань. Кількість ребер дерева $T \in |E_T| = |V| - 1$. Отже, для кістякового дерева T дане твердження виконується.

Тепер послідно будемо проводити в дереві T ребра графа G із множини E . При цьому кількість вершин $|V|$ залишатиметься незмінною, а загальна кількість ребер і граней буде збільшуватись на одиницю. Отже виходить що формула Ойлера виконується після кожного такого крока, тому вона буде виконуватись і для графа G , який вийде після завершення всіх кроків.[\[9\]](#)

Теорема 2.1.2 Найбільша кількість ребер у планарному графі

(без петель і кратних ребер) з n ($n > 3$), вершинами дорівнює $3n - 6$.

Доведення. Розглянемо зв'язні графи. Нехай $G = (V, E)$ - зв'язний планарний граф з V -вершинами і E -ребрами. Розглянемо укладання графа

G на площині і нехай E_i - число ребер, що зустрічаються при обході кордону i -ю грані в цій укладці $i=1, \dots, p$.

Тоді $\sum_{i=1}^p E_i = 2E$, так як кожне ребро або розділяє дві грані, а значить рахується при обході кордонів цих двох граней, або лежить в одній з граней, а значить при обході її кордони рахуються двічі. З зв'язності графа і $V \geq 3$ отримуємо $E_i \geq 3$, звідки $3P \leq 2V$ або $P \leq \frac{2}{3}E$.

За формулою Ойлера $P = E - V + 2$, тому $E \leq 3V - 6$. [9]

Наслідок 2.1.1 Найбільша кількість граней укладання планарного графа (без петель і кратних ребер) з n , $n > 3$, вершинами дорівнює $2n - 4$. [9]

Верхні оцінки з теореми 2.1.2 і наслідка 2.1.1 для кількості граней та ребер планарного графа на n вершинах досягаються на графах - триангуляціях. Це графи, у яких кожна грань, включаючи зовнішню, обмежена циклом довжини три.

2.2 Графи без повних підграфів

Твердження 2.2.1 Відсутність у графах підграфа K_n - спадкова властивість. Позначення: $ex(p, K_n)$ - найбільше ребер у графах з p вершинами, які не містять підграф K_n .

Теорема 2.2.1 Теорема Турана

При $p \geq 1$, $n \geq 3$ справджується рівність

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} \text{ де } r - \text{остача при діленні на } (n-1).$$

Теорема 2.2.2 Теорема Фаудре і Шелпа [16]

Якщо $n = kt + r$ і $0 \leq r \leq t$, тоді

$$ex(n, P_{k+1}) = tC(k, 2) + C(r, 2)$$

2.3 Теорема Турана для дерев

Оцінімо $ex(n, T)$ де T — дерево з $t + 1$ вершиною (вважатимемо, що завжди $t \geq 1$). Нижня межа може бути досягнута взявши неперетинне об'єднання клік маючи на увазі що $ex(n, T) \geq \frac{n(t-1)}{2}$.

Твердження 2.3.1 Існує нескінченно багато натуральних чисел n , для яких виконується нерівність $ex(n, T) \geq \frac{n(t-1)}{2}$. [1]

Доведення. Для $n:t$ ми можемо стверджувати що $ex(n, T) \geq \frac{n(t-1)}{2}$ виконується. Достатньо в якості прикладу графа G з $\frac{n(t-1)}{2}$ кількістю ребер взяти $m = \frac{n}{t}$ клік розміром t .

Твердження 2.3.2 Якщо G має m ребер, то G має підграф H з мінімальним степенем $\delta(H) > \frac{m}{n}$

Доведення. Якщо $\delta(G) > \frac{m}{n}$, то твердження виконується, в якості H можна розглянути сам граф G . Інакше, оберемо $v \in V$, де $d(v) \leq \frac{m}{n}$ і видалимо цю вершину з графа. Виходить що новий середній степінь є принаймні

$$\frac{\sum_{i=1}^p d(i) - \frac{2m}{n}}{n-1} = \frac{2m(1 - \frac{1}{n})}{n(1 - \frac{1}{n})} = \frac{2m}{n}$$

отже, середній степінь ніколи не зменшується. Продовжуючи таким чином, ми в кінцевому підсумку отримуємо необхідний нам підграф. [1]

Твердження 2.3.3 Для кожного дерева T на $t + 1$ вершинах ми маємо $ex(n, T) < n(t - 1)$

Доведення. Якщо G має $n(t - 1)$ ребро, то за наведеним вище твердженням він має підграф H з мінімальним степенем принаймні t . Тому

залишається лише довести, що $\delta(H) \geq t$. Тоді H має копію кожного дерева розміром $t+1$. Оскільки кожне дерево має листок, то ми можемо впорядкувати вершини $v_1, v_2, \dots, v_{t+1}$ таких що кожна v_i з'єднана точно до однієї вершини $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$. Припустимо що ми вже знайшли в H копію дерева яке охоплює $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ тепер ми хочемо знайти вершину для представлення v_i і таким чином знайти копію дерева яке охоплює $v_1, v_2, \dots, v_i$. Припустимо v_i з'єднується з v_j , $1 \leq j \leq i-1$, таким чином нам потрібно знайти сусіда v_j що не належить до $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$. Так як $d(v_j) \geq t$ і v_j має щонайбільше $t-1$ сусіда серед вершин $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ ми можемо знайти таку вершину, якою будемо вважати v_i . [11]

Твердження 2.3.4 Кожен граф має цикл/шлях довжиною хоча б $\delta(G) + 1$

Доведення. Проведемо найдовший шлях на графі $x_1, x_2, \dots, x_m$. Всі сусіди з x_m повинні бути на цьому шляху. Один з них разом з x_m замикає принаймні цикл довжини $d(x_m) + 1 \geq \delta(G) + 1$. [11]

Теорема 2.3.1 (Дірака) Якщо $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ тоді G має гамільтонів цикл.

Доведення. Розглянемо шлях $x_1, x_2, \dots, x_m$ максимальної довжини. Всі сусіди з x_1 і x_m знаходяться на цьому шляху також. Ми стверджуємо що існує $1 \leq i \leq m-1$ такий що $(x_1, x_{i+1}) \in E$ і $(x_1, x_m) \in E$. В щонайменше $n/2$ вершин $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ (які становлять не більше $n-1$ вершини) з'єднані з x_m , і на щонайменше $n/2$ x_i вершини такі, що x_{i+1} з'єднані з x_1 . За принципом принципу Діріхле існує x_i , яка виконує обидві умови.

Зараз, $x_1, x_2, \dots, x_i, x_m, \dots, x_{i+1}, x_1$ є циклом довжини m . Якщо $n=m$, все справджується. В іншому випадку достатньо показати вершину за межами циклу, який з'єднаний з нею (яка утворює шлях довжиною $m + 1$). Це виконується, якщо G зв'язний, і впливає безпосередньо з $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ (оскільки кожні дві вершини або з'єднані або мають спільного сусіда). [1]

Твердження 2.3.5 Якщо G зв'язний, тоді G має шлях довжиною $\min \{n, 2\delta(G) + 1\}$. [1]

Якщо G не містить підграфів, ізоморфних графу H , то такий граф G будемо називати H -вільним.

Теорема 2.3.2 (Ердеша-Галаї)

Якщо $G \in P_{t+1}$ -вільним графом, то $m \leq \frac{(t-1)n}{2}$. Крім того, рівність справедлива лише коли G є неперетинним об'єднанням K_t 's.

Доведення. Візьмемо індукцію по n . Якщо $n \leq t$, то твердження вірне. Якщо G не зв'язаний, ми можемо застосувати індукцію до кожного зі зв'язаних компонентів G .

Припустимо, що G – зв'язний.

Тоді наша мета – це показати, що $m \leq \frac{(t-1)n}{2}$. Оскільки G зв'язний і $n > t$, ми робимо висновок, що $G \in K_t$ -вільним. Також, якщо $\delta(G) \geq \frac{t}{2}$, тоді за твердженням 2.3.5 G має шлях довжини $\min \{n, t + 1\} \geq t + 1$, і приходимо до суперечності. Отже, припустимо, що G має вершину зі степенем $\leq \frac{t-1}{2}$. Видаляємо цю вершину, і отримуємо з індукції, використовуючи припущення, що $G \in K_t$ -вільним та P_{t+1} -вільним, і тоді кількість ребер у новому графі строго менше ніж $\frac{(t-1)(n-1)}{2}$. Оскільки ми

видалили вершину зі степенем $\leq \frac{t-1}{2}$, ми отримуємо, що загальна кількість ребер $m < \frac{t-1}{2} + \frac{(t-1)(n-1)}{2} = \frac{n(t-1)}{2}$. [\[1\]](#)

3 РОЗДІЛ: Власні дослідження: твердження та задачі

3.1 Доведення тверджень про екстремальні графи

3.1.1 Заборонені ланцюги

Знайти скільки може максимально мати ребер граф:

а) $ex(n, P_3)$

б) $ex(n, P_4)$

в) $ex(n, P_5)$

Розв'язання

а) Для $ex(n, P_3)$ розглянемо два випадки при $m = 2k$ та $m = 2k + 1$. Нехай $m = 2k$. Оскільки граф не повинен містити шляхи довжиною два, то степінь кожної вершини ≤ 1 . Тоді з твердження що у будь-якому графі $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

випливає

$$\frac{\sum_{v=1}^p \deg(v)}{2} = |E| \leq \frac{\sum_{v=1}^{2k} 1}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

Тепер нехай $m = 2k + 1$.

$$\frac{\sum_{v=1}^p \deg(v)}{2} = |E| \leq \frac{\sum_{v=1}^{2k+1} 1}{2} = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$$

При максимальній кількості ребер з непарною кількістю вершин лише одна вершина буде мати степінь нуль, тоді всі інші одиницю, через те, що половини ребра не існує в графі. Таким чином немає різниці чи парні кількість вершин чи ні, максимальна кількість ребер без P_3 дорівнюватиме $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

б) Спочатку розглянемо приклад повного дводольного графа $K_{1,n-1}$

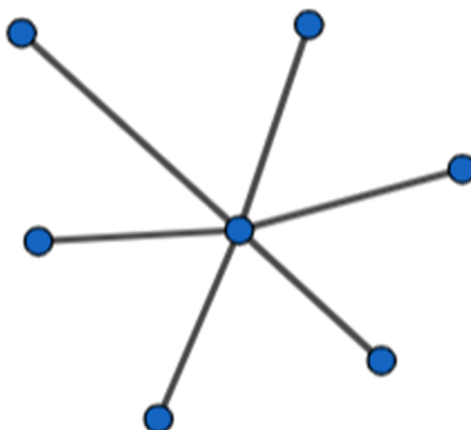


Рис 1 : Повний дводольний граф

В цьому прикладі не буде ланцюга довжини принаймні 3 і ми маємо $n-1$ ребро, тобто ми вже можемо сказати що наш граф $ex(n, P_4) \geq n - 1$

Тепер спробуємо побудувати на n ребрах. Розглянемо граф на 4 вершинах у якого не буде ланцюга довжиною три. Всього є 2 випадки такого графа, всі інші будуть ізоморфні ним.

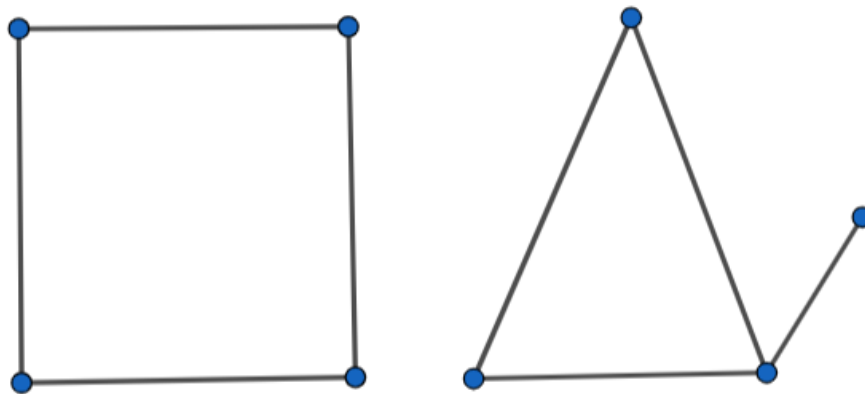


Рис. 2

Тобто для $ex(n, P_4) = 3$, тобто досягається оцінка $n-1$.

Якщо в графі n вершин і хоча б n ребер, то там обов'язково буде цикл, якби циклу не було то це був би ліс. Ми знаємо що дерево на n вершинах має $n-1$ ребро, а якщо це ліс то буде $n-k$ ребер де k -компонент зв'язності.

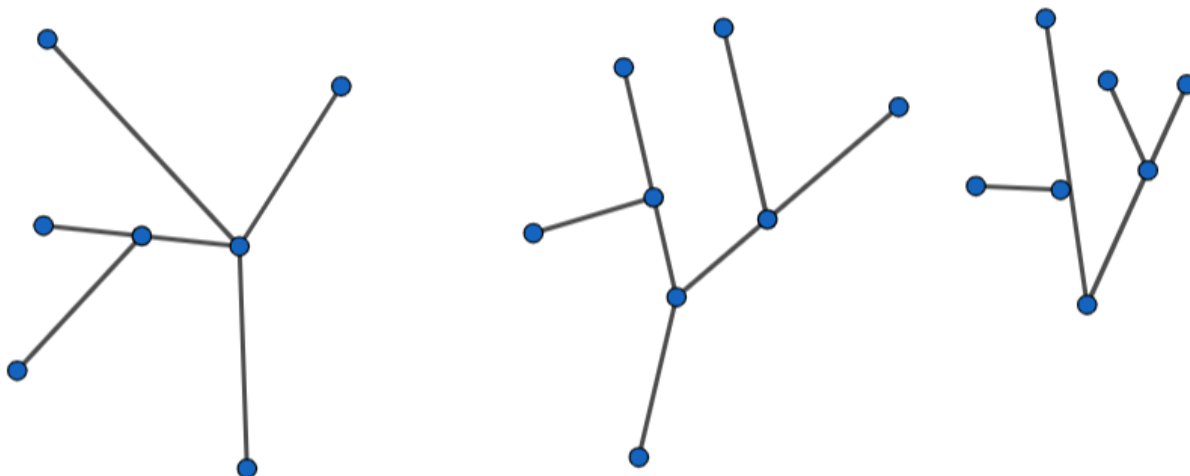


Рис. 3 : Ліс

Тобто ми розуміємо що в графі без циклів максимум ребер може бути на одну менше ніж вершин. І тому якщо ми беремо хоча б n ребер в графі на n вершинах то там обов'язково буде цикл.

Якщо в графі k -сть ребер більша рівні за k -сть вершин $|E(G)| \geq |V(G)|$, то там точно буде цикл. Якщо цей цикл довжини хоча б чотири то там буде

ланцюг довжини хоча б три. Якщо там немає циклу хоча б чотири, то там є цикл довжини три. Тоді ми можемо відокремити 2 випадки.

Коли $n \div 3 \text{ ex}(n, P_4) = n$.

Доведемо це методом математичної індукції.

База індукції:

$k < n$. При цих n ланцюга довжиною три точно не буде.

Індукційний перехід:

Нехай припущення індукції справджується для $k < n \rightarrow n$.

Припустимо що в графі на n вершинах строго більше ніж n ребер, тоді там точно є цикл. В графі не може бути цикл довжини принаймні чотири, тому там цикл довжини три.

Вершини цього циклу не можуть бути суміжні до якихось вершин не з цього циклу. Тому що, якщо якась вершина v з цього циклу була з'єднана з якоюсь вершиною u не з цього циклу, тоді б існував ланцюг довжиною три. Такого бути не може, тому цей цикл це окремий компонент зв'язності. Тоді ми з графу викидаємо ці три вершини і ці три ребра.

Тепер від графу на n вершинах переходимо до графу на $n-3$ вершинах без ланцюгів довжини три.

За припущенням індукції на тому графі ребер не більше ніж $n-3$ значить на початковому графі також не більше ніж n .

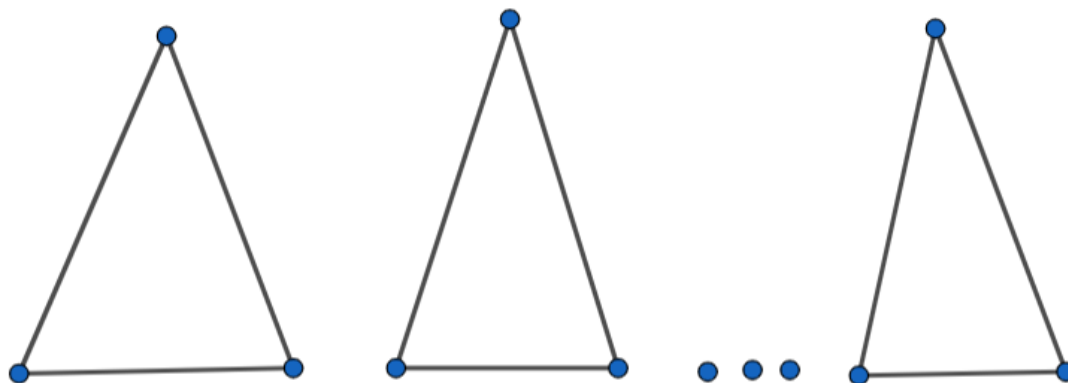


Рис. 4

Коли n не кратне 3, то $ex(n, P_4) = n$.

Для доведення цього факту використаємо доведення вище

Якщо n не ділиться на 3, то за припущенням індукції $n-3$ теж не ділиться, отже там ребер не більше ніж $n-4$ а в початковому не більше ніж $n-1$.

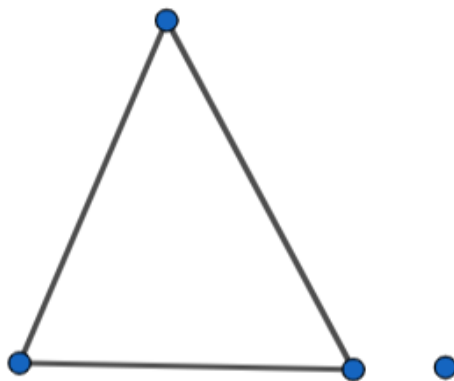


Рис. 5

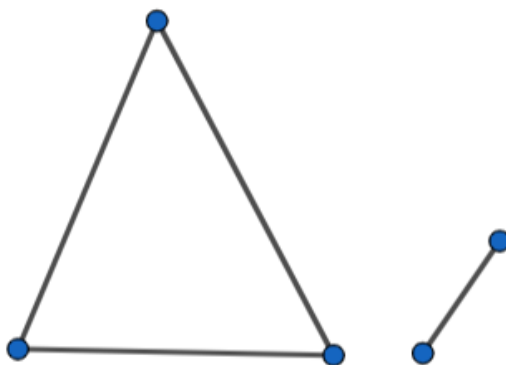


Рис. 6

в) З теореми 2.2.2 якщо $n = 4k + r$, $0 \leq r \leq 3$, то

$$ex(n, P_5) = k \times C_4^2 + C_r^2$$

Покажемо існування графа, в якого немає ланцюгів довжини чотири з такою кількістю ребер якщо вершин n . Поділимо n з остачею на чотири, нехай це $4k + r$, тоді беремо об'єднання клік які не перетинаються на чотирьох вершинах кількості k і беремо кліку на r вершинах (якщо $r \neq 0$)

Для всіх інших випадків доведемо це методом математичної індукції.

База індукції: $n=1,2,3,4$, при цих значень наше твердження справджується.

Індукційний перехід: $k < n \rightarrow n$

Розглядаємо граф G з n вершинами $|V(G)| = n$

Якщо в графі немає циклів, тоді, що $n - 1 \leq 6k + \frac{r(r-1)}{2}$. Перевіримо це підставивши чотири варіанти остачі.

Якщо $n \div 4$, то

$$4k - 1 \leq 6k$$

Якщо n дає остачу 1 при діленні на 4, то

$$4k \leq 6k$$

Якщо n дає остачу 2 при діленні на 4, то

$$4k + 1 \leq 6k + 1$$

Якщо n дає остачу 3 при діленні на 4, то

$$4k + 2 \leq 6k + 3$$

Припустимо що в графі є цикл. Тоді там не може бути циклу довжини ≥ 5 , бо тоді існуватиме ланцюг ≥ 4 . Тоді розглянемо існування циклу на чотирьох вершинах. Нехай в цей цикл входять вершини v_1, v_2, v_3 і v_4 , тоді можемо сказати що з цих вершин не може виходити вершина в іншу вершину.

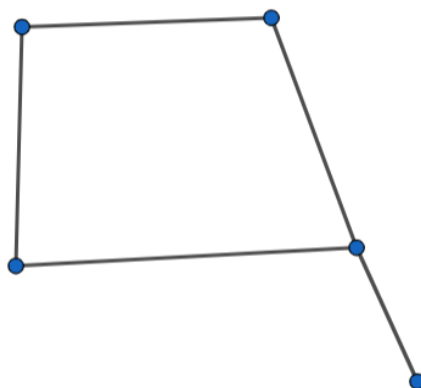


Рис. 7

Виходить, якщо є цикл, то його вершини будуть утворювати окрему компоненту зв'язності, і в ній максимум ребер буде шість. Ми забираємо 4 вершини і максимум 6 ребер і переходимо до графа на $n - 4$ вершинах. За припущенням індукції максимальна кількість ребер в одержаному графі дорівнює $(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1) \times 6 + C_r^2 + 6 = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor 6 + C_r^2$, і тоді все виконується.

Зауважимо, що якщо сам граф G не зв'язний, то з того, що для його підграфів виконуються оцінки $\Rightarrow$ що і для всього графа ця оцінка також виконується. Тому достатньо розглядати далі лише зв'язні графи.

Якщо в графі лише один цикл довжини три і більше циклів взагалі немає, то виходить, що кількість ребер дорівнює кількості вершин, тому що, якщо ми видалимо будь-яку вершину цикла, то залишиться дерево і тоді оцінка виконується.

Якщо цикл довжини три не один, тоді розглянувши три випадки бачимо що вони всі не підходять під наші умови, бо або існує цикл довжини 4, або ж існує ланцюг довжини 4.

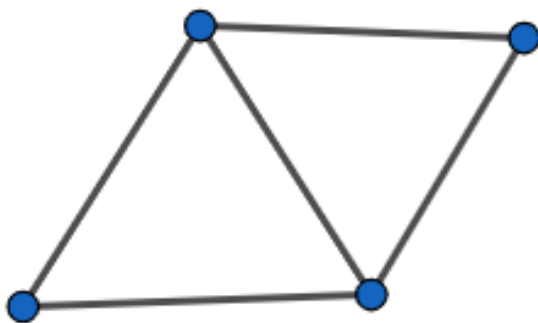


Рис.9

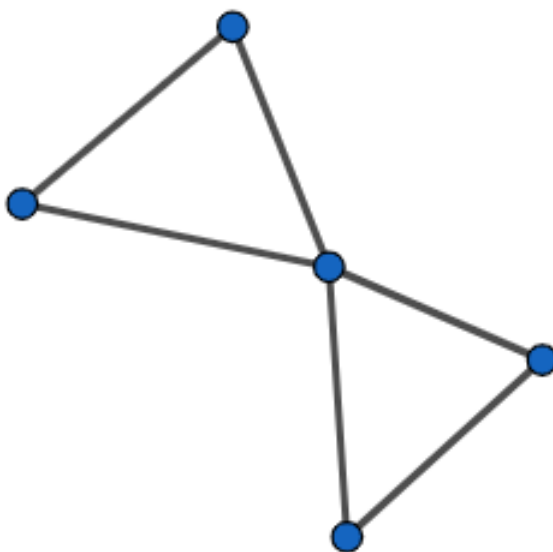


Рис. 10

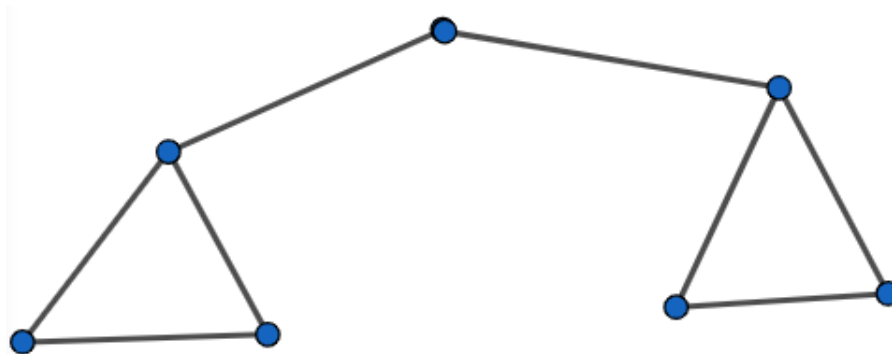


Рис.11

3.2 Власні формулювання та розв'язання задач

3.2.1 Фреш-фест “Тімбілд”

Кожного року в Києво-Могилянській академії для першокурсників організовується Фреш-фест “Тімбілд”, головною метою якої є перезнайти їх між собою. У 2018 році на цю локацію зареєструвалось 485 студентів, тому було вирішено зробити групи по 4 особи для економії часу. Скільки максимум до фреш-фесту може бути серед них пар знайомих, щоб не існувало 4 першокурсників, серед яких є принаймні три пари знайомих?

Розв'язання. Нехай студенти це вершини деякого графа. Між двома вершинами проводиться ребро якщо ці два студенти були знайомі раніше. Щоб у групі з чотирьох людей було максимум три пари між собою знайомих, потрібно щоб наш граф не містив ланцюга довжиною 3. Це випадок $ex(n, P_4)$.

Підставимо дані нашої задачі.

$$ex(485, P_4)$$

Оскільки наша k -сть студентів націло не ділиться на три, то максимальна k -сть ребер дорівнюватиме $n-1$, тому на Фреш-фесті маємо 484 пари студентів яких можна зібрати в групи по 4 людини так, щоб їм було цікаво знайомитись.

Відповідь: 484.

3.2.2 Вечір-знайомств

Розглянемо 150 студентів першокурсників таких, що деякі з них знайомі (знайомство вважаємо взаємним). Ми знаємо що станом на Моглинську подію “Вечір знайомств” серед них є 900 пар знайомих. Потрібно довести що можна обрати якусь підгрупу студентів таку, що кожен студент знає принаймні 7 інших студентів цієї підгрупи.

Розв’язання.

Маємо граф G в якого $m = 900$ — ребер, $n = 150$ — вершин, тоді за твердженням 2.3.2 у нас існує підграф H в якого мінімальна степінь більша за $\frac{900}{150} = 6$. Оскільки $6 \leq 7$, то наше твердження справджується і справді є підгрупа студентів, в якій кожен студент знає принаймні 7 інших студентів цієї підгрупи.

3.2.3 Гра в точки

На парі з Теорії графів викладач запропонував студентам пограти в гру. Він намалював на дошці 12 точок і сказав по черзі з’єднувати пари точок. Довести, що якщо вже проведено приймі 60 ребер і отримано певний граф G , то для довільного дерева на семи вершинах цей граф містить ізоморфний цьому дереву підграф.

Розв’язання. Якщо наш граф G має $n(t - 1) = 12 * (6 - 1) = 60$ — ребер, то за [твердженням 2.3.3](#) він має підграф H з мінімальним степенем 6. Використовуючи доведення з [твердження 2.3.3](#) показуємо, що $\delta(H) \geq 6$ і тоді можемо сказати що для довільного графа на семи вершинах цей граф містить ізоморфний цьому дереву підграф.

3.2.4 Андріївські вечорниці

На події Андріївські вечорниці прийшли студенти і відомо що кожен студент знає вже 7 інших студентів. Довести що тоді існує ланцюг довжини принаймі 8, тобто ми можемо обрати 8 студентів так що перший знає другого, другий третього, , сьомий знає восьмого.

Розв'язання. Скориставшись [твердженням 2.3.4](#) проведемо найдовший шлях студентів 1, 2, ..., 8. Всі знайомі з восьмим студентом повинні бути на цьому шляху. Один з них разом з восьмим замикає принаймні цикл довжини дев'ять, а отже існує ланцюг довжини вісім.

Висновки

Екстремальна теорія графів — це гілка теорії графів, яка вивчає екстремальні (максимальні і мінімальні) властивості графів, які задовольняють певним умовам.

Робота містить три розділи.

В першому розділі описані основні відомості щодо екстремальної теорії графів, її історія та науковці які так чи інакше дотикалися до цієї галузі математики. У другому підрозділі показанні основні означення, теореми, твердження які були використані під час дослідження цієї теми. Третій підрозділ містить інформацію про спадкові властивості графів. В четвертому підрозділі розповідається про прикладне застосування екстремальної теорії графів, в яких сферах вона застосовується та як робить вирішення деяких задач простішим.

Другий розділ містить розгалуження тем екстремальних графів. В першому підрозділі другого розділу міститься інформація про планарні графи та важливі теореми цієї області екстремальної теорії графів. Другий підрозділ містить формулювання теорем щодо графів без повних підграфів.

Третій розділ присвячений формулювання та розв'язанню власно сформульованих задач. Він включає авторські доведенні часткових випадків теореми Фаудре і Шелпа (випадки для забороненого ланцюга довжини 2, 3 та 4) та розв'язанні задач з використанням цих тверджень.

Список літератури

1. Asaf Shapira. Extremal Graph Theory, 2016
2. Simonovits M. Introduction to Extremal Graph Theory. Budapest: Alfred Renyi Mathematical Institute, 2006.
3. McClintock J. Extremal Graphs Theory for Book-Embeddings. M. Sc. Thesis, University of
4. Melbourne Department of Mathematics and Statistics, 2012.
5. Levenkova Natalya. Applications of graph theory to real-world networks // Mathematics&Statistics, FacultyofScience, 2014 – [Електронний ресурс]: <http://handle.unsw.edu.au/1959.4/53918>
6. Chong-Yun Chao, George A. Novacky. On maximally saturated graphs. Discrete Mathematics, Volume 41, Issue 2, 1982
7. Attila Por, David R Wood. Proc. Int. Symp. Graph Drawing (GD 2004). Lecture ' Notes in Computer Science no. 3383, Springer-Verlag, 2005
8. Llado A. An Introduction to Extremal Graph Theory. CIMPA-UNESCO-Indonesia School on
9. Трохимчук Р.М., Нікітченко М.С. Дискретна математика у прикладах і задачах. Київський університет, 2017, 248с. ISBN: 978-966-439-929-3.
10. Боллобас, Бела. Теорія екстремальних графіків, Нью-Йорк, 2004, Публікації в Дуврі, ISBN 978-0-486-43596-1.
11. Теорія екстремальних графів [Електронний ресурс] : https://uk.upwiki.one/wiki/Extremal_graph_theory#CITEREFBollob%C3%A1s2004
12. Бобрицька Г.С. Прикладне застосування теорії графів у різних сферах життя суспільства та окремої особистості //

Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 3(13). – С. 26-30.

- 13.Бондарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики (для студентів-інформатиків). К.: НаУКМА, 2007
- 14.Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах: Навчальний посібник. К.: ВПЦ "Київський університет 2004
- 15.Фізико-математична освіта : науковий журнал. Вип. 3 (13)/ Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. – Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2017. – 204 с.
- 16.Jonathan L. Gross, Jay Yellen. Handbook of graph theory (Discrete mathematics and its applications), 2003.