

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота

освітній ступінь – магістр

на тему: **«МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПОПУЛЯЦІЙ З
УРАХУВАННЯМ ЗАТРИМКИ В ЧАСІ»**

Виконав: студент 2-го року навчання
освітньо-наукової програми
«Прикладна математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Капустян Михайло Сергійович

Керівник: Дутка В.А.,
старший викладач

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Магістерська робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
«_____» _____ 20____ р.

Київ – 2021

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	3
ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. Аналіз моделей динаміки чисельності із затримкою у часі.....	5
1.1. Моделі із запізненням	5
1.2. Лінійний аналіз популяційних моделей з запізненням: періодичні рішення.....	10
1.3. Модель популяції з нижньою критичною чисельністю	17
РОЗДІЛ 2. Розрахунок динаміки чисельності популяції з затримкою у часі та без за представленими моделями	21
2.1. Розрахунок динаміки популяцій за моделлю Лотка-Вольтерра.....	21
2.2. Розрахунок динаміки чисельності популяції з затримкою у часі за моделлю Ферхюльста.....	24
РОЗДІЛ 3. Модель взаємодії двох популяцій (хижак-жертва) з затримкою у часі.....	28
3.1. Представлення моделі взаємодії двох популяцій з затримкою у часі	28
3.2. Формування моделі та її реалізація, представлення отриманих розрахунків.....	30
ВИСНОВОК.....	40
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	42

АНОТАЦІЯ

Тема роботи: Моделювання взаємодії популяцій з урахуванням затримки в часі.

Мета роботи: дослідження математичних моделей, систем, алгоритмів. Поставлена мета передбачає вирішення наступних задач:

- аналіз предметної області;
- аналіз та пошук існуючих математичних моделей популяції для розрахунку динаміки чисельності популяції;
- практичне вирішення певних запропонованих моделей;
- розроблення власної математичної моделі виходячи з моделей які були дослідженні.

Об'єктом дослідження є моделі, увага яких спрямована на розрахунок динаміки популяції, та динаміки популяції з затримкою у часі, взаємодії популяції з урахуванням затримки у часі.

Потенційні застосування та практична цінність результатів дипломної роботи: здобуті рішення та висновки будуть корисними для прогнозування росту популяції в закритому середовищі, розмноження бактерії, для використання для певних розрахунків на фермерських господарствах тощо.

ВСТУП

Сьогодні кожен хоче передбачати та моделювати майбутнє, знати, що буде не тільки завтра, а і через рік-два та більше.

На сьогодні, на нашу радість, за допомогою комп'ютерних технологій стало можливим передбачити та розрахувати, як станеться та чи інша подія, не без допомоги математичних моделей.

У реальних екосистемах налічують десятки видів, що взаємодіють між собою. Сукупність популяцій, що функціонують, як цілісна одиниця у відведеному їй просторі фізичного природного середовища, являє собою біологічне угруповування. Чисельність цих популяцій з часом зазнає змін. Навіть якщо популяцію вважають незмінною, їх щільність зазнає змін, вікова структура, народжуваність, рівень виживання та інше, як правило, піддаються змінам.

Варто враховувати, що тип взаємодії між різними видами популяції може змінюватися від умов життя, стадії їх життєвих циклів, затримок у часі, змін клімату тощо.

Моделювання динаміки популяції та моделювання з затримкою у часі використовується на сьогодні для актуальних рішень, таких як:

- збереження зникаючих і рідкісних видів;
- прогнозування наслідків втручання людей у природу;
- прогнозування чисельності промислових популяцій.

На жаль, екологічна криза на сьогодні в сучасному світі становить велику загрозу для суспільства, за допомогою вирішення і дослідження цих питань є можливим хоча б спрогнозувати, коли це станеться та бути готовим.

РОЗДІЛ 1. Аналіз моделей динаміки чисельності із затримкою у часі

1.1. Моделі із запізненням

Один із недоліків популяційних моделей з однією змінною полягає в тому, що народжуваність починають враховувати з самого початку, хоча в реальному житті для досягнення статевої зрілості, так само як і для виношування плоду, потрібен час. Ми можемо врахувати подібну тимчасову затримку, розглянувши модель диференціального рівняння із запізненням наступного виду [9]:

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t), N(t - T)), \quad (1.1)$$

там де $T > 0$, запізнення є параметром. Подібна модель є розширенням логістичної моделі росту та являє собою диференціальне рівняння із запізненням:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \cdot \left(\frac{1 - (N(t - T))}{K} \right), \quad (1.2)$$

там де r , K і T – додатна константа, що говорить про те, що регуляторний ефект залежить скоріш не від чисельності популяції в момент часу t , а від чисельності популяції в більш ранній момент, тобто від $t - T$. Це рівняння само по собі є моделлю ефекту запізнення, який у дійсності повинен був би бути усередненням за чисельністю за попередні роки та висловлюватись інтегро-диференціальним рівнянням. Так, більш точною моделлю, ніж (1.2), є, наприклад, модель типу згортки:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{K} \cdot \int_{-\infty}^t w(t - s) \cdot N(s) ds \right), \quad (1.3)$$

там де $w(t)$ – це ваговий коефіцієнт, який показує, наскільки чисельність популяції в попередні роки важлива для визначення доступності ресурсів сьогодні. На практиці $w(t)$, зазвичай, прагне до нуля за більших позитивних та негативних t та досягає максимум за деяким репрезентативним часом T . В типовому випадку $w(t)$ має вигляд, представлений на рисунку 1.1. Якщо $w(t)$ дає більш гострий пік, у тому сенсі, що область навколо T більш вузька або пік має більшу амплітуду, то тоді у граничному випадку ми можемо вважати, що $w(t)$ апроксимується функцією Дірака:

$$\delta(t - T),$$

де

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) f(t) dt = f(T).$$

Рівняння (1.3) у цьому випадку спрощується до (1.2):

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - T - s) \cdot N(s) ds = N(t - T).$$

Рішення безневинного на вигляд рівняння (1.2), як правило, доводиться шукати шляхом обчислень. Варто відмітити, що для того, щоб знайти рішення для $t > 0$, нам потрібно знати $N(t)$ для всіх $-T \leq t \leq 0$. Ми, однак, можемо отримати деяке уявлення про те, який вид рішень (1.2) можливий, за допомогою наступного евристичного міркування.

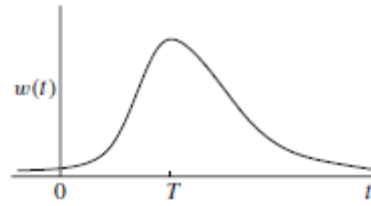


Рисунок 1.1 – Типова вагова функція $w(t)$ для узагальненого ефекту запізнення в моделі із запізненням (1.3), яка описує обмежений ріст популяції [9].

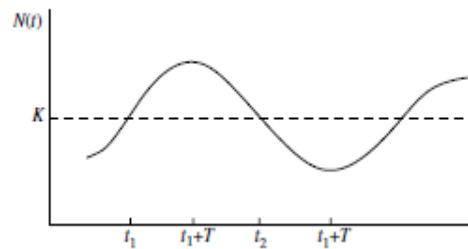


Рисунок 1.2 – Схематичне зображення періодичного рішення популяційної моделі із запізненням (1.2) [9].

Звернемось тепер до рисунку 1.2 та припустимо, що для деякого $t = t_1$ виконується $N(t_1) = K$ та що для деякого часу $t < t_1$ вірна нерівність $N(t-T) < K$. Тоді, відповідно до керуючого рівняння (1.2), оскільки $\frac{1 - N(t-T)}{K} > 0$, то $\frac{dN(t)}{dt} = 0$, і тоді $N(t)$ при t_1 буде знаходитись у стані росту. Коли $t = t_1 + T$, $N(t-T) = N(t_1) = K$, і тоді $\frac{dN}{dt} = 0$. Для $t_1 + T < t < t_2$ виконується нерівність $N(t-T) > K$, і таким чином $\frac{dN}{dt} < 0$ та $N(t)$ зменшується до тих пір, поки $t = t_2 + T$, оскільки $N(t_2 + T - T) = N(t_2) = K$. Тому існує можливість коливальної поведінки системи. Наприклад, у простому лінійному рівнянні із запізненням. Це рішення, як легко перевірити, періодично у часі.

Дійсно, рівняння (1.2) може володіти періодичними рішеннями типу стійкого граничного циклу у широкому діапазоні значень добутку rT , де r – це швидкість росту і T – запізнення. Якщо t_p – це період коливань, то $N(t + t_p) = N(t)$ для всіх t . Сутність стійкого граничного циклу полягає в тому, що якщо систему підвергнути деякому обуренню, то рішення, нехай і через фазове зрушення,

вертається до початкового періодичного рішення при $t \rightarrow \infty$. Періодична поведінка також незалежна від початкових умов.

З рисунку 1.2 та вищезгаданого евристичного міркування можна чекати, що період стійкого граничного циклу повинен бути у порядку $4T$. Як впливає з чисельних розрахунків саме так і відбувається для більшого діапазону добутків rT , який є безрозмірною величиною. Причина, за якою ми обираємо цю комбінацію величин полягає в тому, що (1.2) у безрозмірному вигляді приймає вигляд:

$$dN^* / dt^* = N^*(t^*) [1 - N^*(t^* - T^*)], \text{ де } N^* = N / K, t^* = rt, T^* = rT.$$

Втім, якщо щось суттєво змінюється залежно від rT , так це амплітуда коливання.

Наприклад для $rT = 1.6$, період $t_p \approx 4.03T$ та $N_{max}/N_{min} \approx 2.56$; $rT = 2.1$, $t_p \approx 4.54$, $N_{max}/N_{min} \approx 42.3$; $rT = 2.5$, $t_p \approx 5.36T$, $N_{max}/N_{min} \approx 2930$. Для більших величин rT період також змінюється значною мірою.

Ця проста модель із запізненням була використана в ряді практично важливих ситуацій. Так, наприклад, Мей (May) (1975) використав її для аналізу отриманих Ніколсоном (Nicholson) експериментальних даних по динаміці популяції зеленої м'ясної мухи (*Lucila curpina*), небезпечного ворогу австралійських вівчарів. Протягом майже двох років Ніколсон спостерігав за популяцією мухи, ретельно контролюючи температуру та харчування. Він виявив регулярні періодичні коливання чисельності з приблизною частотою у 30-40 днів. Застосувавши (1.2) до ситуації експерименту, можна побачити, що параметр K задається доступною кількістю їжі. Затримка T приблизно дорівнює часу, який потрібен личинці, щоб досягти зрілості. Тоді єдиним невідомим параметром залишається r – властива даній популяції швидкість росту. На рис. 1.2 показано порівняння моделі з експериментальними даними для величини $rT=2,1$, що відповідає періоду, рівному приблизно $4,54T$. Якщо ми приймемо, що спостережуваний період рівний 40 дням, період запізнення буде рівний

приблизно 9 дням, хоча істина тривалість запізнення зазвичай наближається до 11 днів. Як видно із моделі, якщо K збільшується в два рази, у відношення періодичності у часі нічого не змінюється, тому ми можемо застосувати масштабування, написав N/K для N ; це відсутність змін по відношенню від K як раз і спостерігалась [3].

Приємно бачити, що навіть така проста модель, як (1.2), може дати цілком прийнятні результати. Це пояснює широту використання моделей з запізненням у вивченні динаміки одиночних популяцій з періодичним поведінкою. Важливо, однак, не стати жертвою помилки про коректність і обґрунтованість моделі тільки на підставі того, що деякі її рішення так добре, навіть в чисельному відношенні, узгоджуються з даними експерименту. З експериментальних даних, представлених на рис. 1.2, ми бачимо відтворений "другий пік", який не міститься в рішенні (1.2). До того ж різниця між обчисленим запізненням в 9 днів і дійсним запізненням в 11 днів, по суті, дуже велика. Gurney et al. (1980) досліджував проблему, використовуючи більш складну модель із запізненням, яка показала ще кращий збіг з експерименту, включаючи два піки репродуктивної активності.

Інший приклад застосування моделі (1.2) до наявного матеріалу дає Мей (May) (1981), який розглядав популяцію лемінгів в околицях міста Черчіль в Канаді. Коливання чисельності відбуваються з чотирирічною циклічністю, при цьому тривалість вагітності $T = 0,75$ року. У цій моделі ефект винищення включений в єдине рівняння для чисельності нориць.

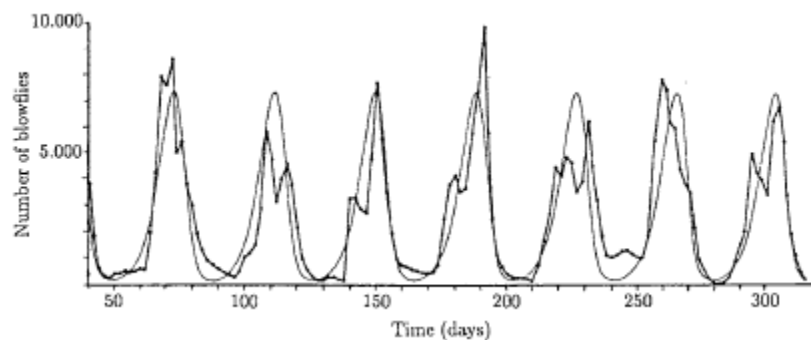


Рисунок 1.3 – Порівняння експериментальних даних Ніколсона (1957) для популяції австралійської мухи з рішенням моделі (1.2), де $rT = 2,1$ (З книги May 1975 р.) [9].

У статті, написаній Маєрс і Кребс (Myers and Krebs) (1974), обговорюються популяційні хвилі, властиві гризунам: зазвичай вони мають періодичність в 3-4 роки.

Не всі періодичні явища в популяціях так просто змоделювати. Одну з серйозних проблем представляють 13- і 17-річний цикли деяких видів сарани, тобто їх поява з інтервалом в 13 або 17 років.

Мабуть, тут також варто відзначити, що моделі росту популяції без запізнення, що складаються з одного звичайного диференціального рівняння (для однієї змінної), тобто моделі виду $dN/dt = f(N)$, не містять рішень типу граничних циклів.

Ми можемо бачити це з наступного міркування. Припустимо, що задача має періодичний розв'язок з періодом T , тобто $N(t+T) = N(t)$. Помноживши це рівняння на dN/dt і інтегруючи від t до $t+T$, отримуємо

$$\int_t^{t+T} \left(\frac{dN}{dt} \right)^2 dt = \int_t^{t+T} f(N) \frac{dN}{dt} dt = \int_{N(t)}^{N(t+T)} f(N) dN = 0,$$

так як $N(t+T) = N(t)$. Але інтеграл в лівій частині позитивний, оскільки $(dN/dt)^2$ не може тотожно дорівнювати нулю, що є протиріччям. Таким чином, рівняння з однією змінною $dN/dt = f(N)$ не може мати періодичних рішень [3].

1.2. Лінійний аналіз популяційних моделей з запізненням: періодичні рішення

Ми бачимо, що диференціальна модель з запізненням може змінити періодичні рішення типу граничного циклу. Одним з показників їх існування є

нестійкість стаціонарного стану і виникнення коливань, хоча, звичайно, цим справа не обмежується. Тут ми розглянемо лінеаризацію рівняння (1.2) поблизу рівноважних станів $N = 0$ та $N = K$. Малі відхилення від $N = 0$ задовольняють рівняння $dN/dt = rN$, яке показує, що стан $N=0$ нестійкий, так як N зростає експоненційно. Таким чином, ми повинні розглянути тільки збурення стаціонарного стану $N = K$.

Як і раніше, доцільно призвести модель (1.2) до безрозмірного вигляду, записавши

$$N^*(t) = N(t) / K, t^* = rt, T^* = rT, \quad (1.4)$$

де зірочки означають безрозмірні величини. Тепер, для спрощення запису можна відкинути зірочки, пам'ятаючи, однак, що тепер ми маємо справу з безрозмірними величинами; тоді (1.2) набуває вигляду:

$$dN(t)/dt = N(t) [1 - N(t - T)] \quad (1.5)$$

Тепер проведемо лінеаризацію поблизу стаціонарного стану $N=1$, записавши

$$N(t) = 1 + n(t) \Rightarrow dn(t)/dt \approx -n(t - T) \quad (1.6)$$

Ми шукаємо рішення (1.6) для $n(t)$ в вигляді

$$n(t) = ce^{\lambda t} \Rightarrow \lambda = -e^{-\lambda T}, \quad (1.7)$$

де c є константою, а власні значення λ – це рішення другого рівняння в (1.7), трансцендентного рівняння, в якому $T > 0$.

Знайти аналітичне рішення (1.7) зовсім не просто. Однак, все, що ми хочемо дізнатися з точки зору стійкості – це чи існують які-небудь рішення з Re

$\lambda > 0$, що на підставі першого рівняння (1.7) передбачає нестійкість, оскільки в цьому випадку $n(t)$ зростає експоненціально в часі.

Нехай $\lambda = \mu + i\omega$. Існує таке дійсне число μ_0 , що всі рішення λ другої частини (1.7) задовольняють умові $\operatorname{Re} \lambda < \mu_0$. Щоб переконатися в цьому, візьмемо модуль $|\lambda| = e^{-\mu T}$, тоді якщо $|\lambda| \rightarrow \infty$, то $e^{-\mu T} \rightarrow \infty$, що вимагає, щоб $\mu \rightarrow -\infty$. Таким чином, має існувати число μ_0 , яке обмежувало б $\operatorname{Re} \lambda$ зверху. Якщо ми введемо $z = 1/\lambda$ і $w(z) = 1 + ze^{-T/z}$, то $w(z)$ матиме сингулярність при $z = 0$. Тоді за теоремою Пікара поблизу $z = 0$ рівняння $w(z) = 0$ має нескінченно багато комплексних коренів. Таким чином, існує нескінченно багато коренів λ .

Далі ми візьмемо дійсну і вдавану частини трансцендентного рівняння в (1.7), а саме,

$$\mu = -e^{-\mu T} \cos \omega T, \quad \omega = e^{-\mu T} \sin \omega T \quad (1.8)$$

і визначимо діапазон T так, що $\mu < 0$. Тобто ми хочемо знайти такі умови, при яких верхня межа величини μ , μ_0 , є від'ємною. Спочатку варто розібратися з простим випадком, де λ – дійсне число, тобто $w=0$. Як випливає з (1.8), умова $w=0$ задовольняє друге рівняння (1.8), а перше рівняння набуває вигляду $\mu = -e^{-\mu T}$. У нього немає позитивних коренів $\mu > 0$, оскільки $e^{-\mu T} > 0$ для всіх μT , що також можна бачити, представивши кожен член рівняння як функцію μ і зазначивши, що графіки цих функцій можуть перетинатися при $T < 0$, тільки якщо $\mu < 0$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega = 0$. Як випливає з (1.8), якщо ω є рішенням, то таким же рішенням є і $-\omega$, так що ми можемо розглянути лише випадок $\omega > 0$ без втрати спільності. З першої частини (1.8) випливає, що умова $\mu < 0$ вимагає, щоб $\omega T < \pi/2$, так як $-e^{-\mu T} < 0$ для всіх μT . В принципі (1.8) визначає $\mu(T)$ і $\omega(T)$. Ми прагнемо дізнатися величину T , за якої $\mu(T)$ змінює знак з $\mu < 0$ на $\mu > 0$. З ростом T , починаючи від 0 , $\mu = 0$, вперше, коли $\omega T = \pi/2$. Із системи (1.8) ми бачимо, що якщо $\mu = 0$, то друге рівняння має єдине прийнятне рішення $\omega = 1$, яке має місце при $T = \pi/2$. Оскільки це перше рішення μ при зростаючому

T , то це дає біфуркаційне значення $T = T_c = \pi / 2$. Інший спосіб знайти це значення полягає в тому, щоб показати на підставі (1.18), що градієнт $\mu(T)$ при $\mu = 0$, а саме, $(\partial\mu / \partial T) T = \pi / 2 > 0$. Передбачаючи результат подальшого аналізу, що $\omega < 1$ для $T > \pi / 2$, відзначимо по ходу справи, що $(\partial\omega / \partial T) T = \pi / 2 < 0$. Таким чином, ми маємо:

$$0 < T < \pi/2 \quad (1.9)$$

як умова, накладене на T для стійкості рішення $N = 1$.

Повернувшись, нарешті, до розміреним величинам, ми бачимо, що стаціонарний стан $N(t) = K$ стійкий, якщо $0 < rT < \pi / 2$, і нестійкий, якщо $rT > \pi / 2$. В останньому випадку можна очікувати, що рішення буде демонструвати властивості стійкого граничного циклу. Критичне значення $rT = \pi / 2$ є біфуркаційним значенням, тобто таким значенням параметра, в нашому випадку rT , при якому характер рішення (1.2) різко змінюється, переходячи від стійкого стаціонарного стану до вирішення, що залежить від часу. Ефект запізнення в моделях зазвичай проявляється у вигляді зростання ймовірності нестійкості. У нашому випадку при збільшенні T вище біфуркаційного значення $T_c = \pi / 2r$, стаціонарний стан стає нестійким.

Поблизу біфуркаційного значення можна отримати першу оцінку періоду коливань. Розглянемо безрозмірне рівняння (1.5) і припустимо, що

$$T = T_c + \varepsilon = \pi/2 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.10)$$

Рішенням $\lambda = \mu + i\omega$ рівнянь (1.8) з найбільшим $\text{Re } \lambda$ при $T = \pi / 2$ є $\mu = 0$, $\omega = 1$. Для малих ε ми очікуємо, що μ і ω будуть відрізнятися від $\mu = 0$ і $\omega = 1$ також на малі величини, тому нехай

$$\mu = \delta, \quad \omega = 1 + \sigma, \quad 0 < \delta \ll 1, \quad |\sigma| \ll 1, \quad (1.11)$$

де δ та σ належить визначити. Підставляючи їх в друге рівняння (1.8) і розкладаючи по малим δ , σ і ε , отримуємо

$$1 + \sigma = \exp \left[-\delta \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \right] \sin \left[(1 + \sigma) \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \right] \rightarrow \sigma \approx -\frac{\pi \delta}{2}$$

в першому наближенні, в той час як перше рівняння (1.8) дає

$$\delta = -\exp \left[-\delta \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \right] \cos \left[(1 + \sigma) \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \right] \rightarrow \delta \approx \varepsilon + \frac{\pi \sigma}{2}$$

Вирішив їх одночасно, отримуємо

$$\delta \approx \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\pi^2}{4}}, \sigma \approx -\frac{\varepsilon \pi}{2(1 + \frac{\pi^2}{4})} \quad (1.12)$$

І, отже, близько точки біфуркації перше рівняння (1.7) разом з (1.6) дає

$$\begin{aligned} N(t) &= 1 + \operatorname{Re} [c \exp [\delta t + i(1 + \sigma)t]] \\ &\approx 1 + \operatorname{Re} \left\{ c \exp \left[\frac{\varepsilon t}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \right] \exp \left[it \left\{ 1 - \frac{\varepsilon \pi}{2(1 + \frac{\pi^2}{4})} \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Це показує, що нестабільність реалізується у вигляді наростаючих коливань з періодом

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{\sigma \pi}{2(1 + \frac{\varepsilon \pi^2}{4})}} \approx 2\pi$$

з точністю до $O(1)$ для малих ε . У стабільних одиницях - це $2\pi / r$, і, з точністю до $O(1)$, $rT = \pi / 2$, виходить, що період коливань дорівнює $4T$, як ми очікували на основі наведених вище інтуїтивних міркувань. Виходячи з численних результатів для вищенаведених граничних циклів, рішення з $rT = 1.6$ має період $4.03T$. При $rT = \pi / 2 + \varepsilon = 1.6$ це дає $\varepsilon \approx 0.029$, таким чином, з останнього рівняння випливає, що розмірний період з точністю до $O(\varepsilon)$ дорівнює

$$\frac{2T}{\pi} \frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon\pi}{2(1+\frac{\pi^2}{4})}} \approx 4.05T,$$

що мало відрізняється від отриманої чисельним рахунком величини $4.03T$. Коли $rT = 2.1$, це дає $\varepsilon \approx 0.53$ і відповідний період $5.26T$, який треба порівнювати з обчисленим періодом, рівним $4.54T$. Це ε занадто велике для проведеного нами аналізу першого порядку (ε^2 не можна знехтувати по відношенню до ε); точніші результати можна було б отримати, якби ми проводили аналіз з точністю до другого порядку.

Природна поява "повільного часу" εt в $N(t)$ в (1.13) передбачає, що для отримання повного нелінійного рішення (однаково вірного на "швидких" і "повільних" часах) поблизу біфуркаційних значеннях $rT = \pi / 2$ потрібно застосувати двухчасову асимптотичну методику. Використання цієї методики цілком можливо, про що сказано, наприклад, в книзі Мюррея (Murray) (1984), присвяченій навчальному опису і способам застосування асимптотичних методів.

Тема запізнювання або функціонально-диференціальних рівнянь стала тепер досить популярна. Введення в предмет можна знайти в математичній книзі Драйвера (Driver) (1977). Книга МакДональда (MacDonald) (1979) цілком присвячена тимчасовому запізнюванню в біологічних моделях. Хоча визначення якісних властивостей моделей з запізненням при дослідженні динаміки зростання популяцій, так само як і отримання нелінійних аналітичних рішень поблизу точки біфуркації часто цілком можливо, в цілому, для знаходження

приміських до використання кількісних результатів потрібно застосовувати чисельні методи [7].

Дуже корисна методика для визначень умов, необхідних для стійкості рішення лінійних рівнянь із запізненням, наведена в роботі Van Den Driessche і Zou (1998), яка дає оцінку параметричного простору стійкості. До цієї методики ми зараз і звернемося. Наведене вище рівняння (1.6) є окремим випадком загального рівняння

$$dy/dt = ay(t) + by(t - \tau), t > 0, \quad (1.14)$$

де τ - це запізнювання, a і b параметри-константи. Ми б, звичайно, могли провести аналіз, аналогічний тому, що був виконаний для рівняння (1.6), і отримати необхідні і достатні умови стійкості, визначивши, таким чином, параметричне простір, в якому стаціонарне стан є стійким. Нехай y_s - це стаціонарний стан $L[y(t)]$ - функція Ляпунова, якщо $L[y(t)] > 0$ для всіх $y(t) \neq y_s$, де y_s визначається з рішення $L[y(t)] = 0$ для всіх $y(t) = y_s$ (тобто L - це позитивно-визначена функція) і $dL[y(t)]/dt < 0$ для всіх $y(t) \neq y_s$. Якщо таку функцію можна знайти, то тоді y_s глобально асимптотично стійка, і ніяких рішень у вигляді замкнутих орбіт не виникає. Така функція Ляпунова може бути знайдена для (1.14); вона дається виразом:

$$L[y(t)] = y^2(t) + |b| \int_{t-\tau}^t y^2(s) ds,$$

де $y(t)$ - це рішення (1.14).

Покажемо, що це насправді функція Ляпунова. Звичайно $L > 0$ для всіх $y \neq 0$ та $L = 0$, коли $y(t) = y_s = 0$. Більше того,

$$\frac{dL}{dt} = 2y(t) \frac{dy}{dt} + |b|[y^2(t) - y^2(t - \tau)] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2ay^2(t) + 2|b|y(t)y(t - \tau) + |b|[y^2(t) - y^2(t - \tau)] \leq \\
&\leq 2ay^2(t) + |b|[y^2(t) + y^2(t - \tau)] + |b|[y^2(t) - \\
&\quad y^2(t - \tau)] = \\
&= 2(a + |b|)y^2(t) \leq \\
&\leq 0 \text{ для } a < -|b|
\end{aligned}$$

Отже, $L[y(t)]$ задовольняє всім умовам функції Ляпунова, і, таким чином, стаціонарний стан $y_s = 0$ є глобальним стійким для всіх $a < -|b|$, що і визначає параметричний простір, де стан $y = 0$ стійкий, а не тільки лінійно стійкий. Якщо провести повний аналіз стійкості, аналогічний зробленому нами для (1.6), то стане видно, що область стійкості насправді більша, але незначною мірою; в цілому в обох випадках їх загальна форма подібна.

1.3. Модель популяції з нижньою критичною чисельністю

У розглянутих раніше моделях приріст чисельності популяції (біомаси) передбачався прямо пропорційним чисельності. Це відповідає тільки тим популяціям, розмноження яких відбувається самоzapлідненням (наприклад, мікроорганізми). При цьому для більшості тварин характерно схрещування, що передбачає зустрічі між особинами різних статей одного й того ж виду. Отже, приріст популяції повинен враховувати кількість зустрічей між особинами. Таким чином, для різностатевої популяції в умовах необмежених ресурсів можна записати:

$$N = aN^2.$$

Дане рівняння добре описує той факт, що при низькій щільності популяції швидкість розмноження різко падає, оскільки ймовірність зустрічі двох особин різних статей зменшується при зниженні щільності популяції пропорційно квадрату щільності. Однак при великих густинах популяцій швидкість

розмноження лімітує вже не число зустрічей особин протилежної статі, а число самок в популяції. Формула, що враховує обидва цих ефекти, має вигляд

$$\dot{N} = a \cdot \frac{bN}{b + \tau N} \cdot N \quad (1.15)$$

Тут параметр $a > 0$ відображає різну кількість дитинчат у різних тварин; $\tau > 0$ – час виношування плоду; $b > 0$ – середній час між послідовними вагітностями самки. При низькій щільності популяції приріст пропорційний aN^2 , при високій – $(ab/\tau)N$. Однак щільність популяції не повинна опускатися нижче деякої критичної величини. При падінні щільності популяції нижче критичної середній час, протягом якого може відбутися запліднення, стає більше часу, протягом якого особина здатна до розмноження. У цьому випадку популяція вимирає. Цей ефект може бути врахований, якщо в формулу ввести доданок, що описує смертність, який буде прямо пропорційний чисельності:

$$\dot{N} = a \cdot \frac{bN}{b + \tau N} \cdot N - cN, \quad (1.16)$$

де cN – смертність, $c > 0$.

Рівняння (1.16) має два стаціонарних рішення: перше $N = 0$ і друге $N = cb/(ab - c\tau) = L$. Відповідні графіки $N(t)$ і $f(N)$ дані на рис. 1.4. З графіка видно, що рішення $N = 0$ стійке, а $N = L$ – нестійке. При початкових чисельностях $N_0 < L$ популяція вироджується, $N \rightarrow 0$, причому тим швидше, чим менше N_0 . Криві $N(t)$ при різних N_0 представлені на рис. 1.4. При $N_0 > L$, відповідно до (1.16), популяція необмежено розмножується.

Для різних видів значення нижньої критичної щільності L різне. Наприклад, для відновлення популяції ондатр досить однієї пари особин на тисячу квадратних кілометрів, а для американського мандрівного голуба

чисельність в сотні тисяч особин виявилася нижче критичної. Попри значну абсолютну чисельність популяції, вона була приречена на вимирання.

На даний час для ряду видів спостерігається падіння чисельності природних популяцій нижче критичного рівня, що означає неминучу загибель цих популяцій навіть за умови внесення до Червоної книги. Якщо деяких тварин ще можна зберегти в зоопарках і заповідниках в близьких до ідеальних умовах, то, наприклад, синіх китів врятувати вже навряд чи вдасться.

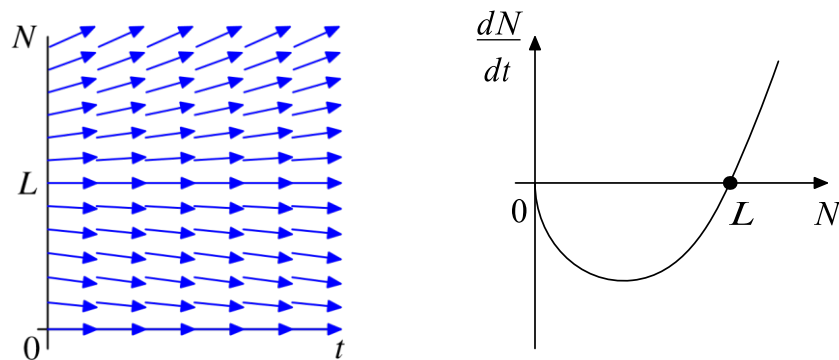


Рис 1.4 – Залежність чисельності популяції від часу та швидкості росту від чисельності.

Найбільш загальна формула, що враховує як нижню межу чисельності, так і внутрішньовидову конкуренцію, має вигляд рівняння Базикіна

$$\dot{N} = a \cdot \frac{bN^2}{b + \tau N} - cN - dN^2.$$

Ввівши нові змінні $N = \frac{b}{\tau}x$, $t = \frac{\tau}{ab}t'$ і позначивши $D = \frac{c\tau}{ab}$, $C = \frac{d}{a}$, приходимо до рівняння

$$\frac{dx}{dt'} = \left(\frac{x}{x+1} - D - Cx \right) \cdot x.$$

Положення рівноваги $N_1^* = 0$ локально стійке при будь-яких допустимих значеннях параметрів. Якщо $A = (c\tau + bd - ab)^2 - 4c\tau db > 0$ і $B = ab - c\tau - bd > 0$, то система має ще два положення рівноваги

$$N_2^* = \frac{B - \sqrt{A}}{2d\tau}, N_3^* = \frac{B + \sqrt{A}}{2d\tau},$$

де $N_2^*, N_3^* > 0$, одне з яких N_3^* – локально стійке, а інше N_2^* – локально нестійке.

Залежності чисельності N від часу та швидкості приросту N^* від чисельності представлені на рис. 1.5. $N = 0$ і $N = L$ – стійкі стаціонарні стани; $N = K$ – нестійке, що розділяє області тяжіння стійких станів рівноваги. Величини L і K різні для різних популяцій і можуть бути визначені тільки зі спостережень та експериментів.

Розглянуті ефекти характерні для рівняння Оллі

$$\dot{N} = a \cdot (N - K) \frac{L - N}{L} N, a > 0, L > K > 0.$$

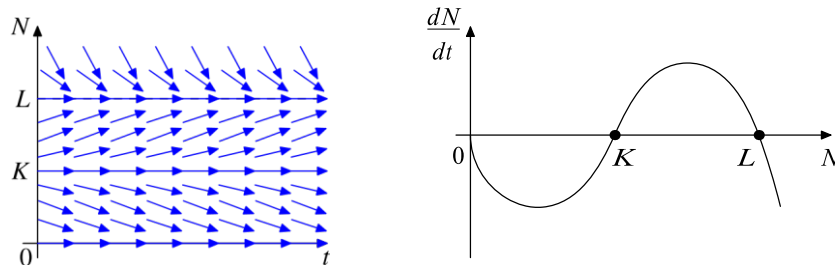


Рисунок 1.5 – Залежність чисельності популяції від часу та швидкості росту від чисельності.

Тут, як і в попередній моделі, присутня нижня критична чисельність L і місткість середовища K . Рівняння Базикіна містить більше параметрів і дозволяє більш точно врахувати характерні особливості популяції, однак (1.13) простіше та зручніше для застосування.

РОЗДІЛ 2. Розрахунок динаміки чисельності популяції з затримкою у часі та без за представленими моделями

2.1. Розрахунок динаміки популяцій за моделлю Лотка-Вольтерра

Дана модель використовується для прогнозування популяцій хижаків та їх жертв. Для використання моделі накладаються декілька умов:

- популяції вважаються закритими, тобто хижаки/жертви не покидають території і нові особини не приходять з зовні;
- припускається, що жертви не вмирають від хвороб та інших чинників, а лише з'їдаються хижаками. Для уточнення таких моментів просто вносяться зміни в коефіцієнт народжуваності для жертв;
- кількість їжі для жертви необмежена.

Отже, модель будується на двох диференціальних рівняннях. Перше рівняння – зміна популяції жертв описується так:

$$\frac{dN_1}{dt} = rN_1 - p_1N_1N_2 ,$$

де N_1 , N_2 – популяції жертв та хижаків, відповідно, r – коефіцієнт народжуваності жертви, p_1 - коефіцієнт хижості для жертви, тобто імовірність вмерти при зустрічі з хижаком.

Зміна популяції хижаків регулюється наступним рівнянням:

$$\frac{dN_2}{dt} = -dN_2 + p_2N_1N_2 ,$$

де d - коефіцієнт смертності хижака, p_2 - коефіцієнт хижості для хижака, тобто імовірність зловити їжу для розмноження.

Перейдемо до формування моделі в середовищі Excel:

	F	G	H	I
1	Народжуваність жертви	Смертність хижака	Коефіцієнт хижості для жертви	Коефіцієнт хижості для хижака
2	r	d	p1	p2
3	0,1	0,05	0,001	0,00005

Рисунок 2.1 – Таблиця початкових даних.

Введемо значення коефіцієнтів, що визначають наші популяції.

Для першого покоління впишемо певне співвідношення хижаків та жертв, нехай це буде 1000 жертв та 50 хижаків.

В друге на наступні покоління (розрахунок вівся для 250 поколінь) вводимо наступні формули:

	A	B	C
1	Покоління	Жертва	Хижак
2	1	1000	50
3	2	=B2+\$F\$3*B2-\$H\$3*C2*B2	=C2+(-1)*\$G\$3*C2+\$I\$3*B2*C2
4	3	=B3+\$F\$3*B3-\$H\$3*C3*B3	=C3+(-1)*\$G\$3*C3+\$I\$3*B3*C3
5	4	=B4+\$F\$3*B4-\$H\$3*C4*B4	=C4+(-1)*\$G\$3*C4+\$I\$3*B4*C4
6	5	=B5+\$F\$3*B5-\$H\$3*C5*B5	=C5+(-1)*\$G\$3*C5+\$I\$3*B5*C5
7	6	=B6+\$F\$3*B6-\$H\$3*C6*B6	=C6+(-1)*\$G\$3*C6+\$I\$3*B6*C6
8	7	=B7+\$F\$3*B7-\$H\$3*C7*B7	=C7+(-1)*\$G\$3*C7+\$I\$3*B7*C7
9	8	=B8+\$F\$3*B8-\$H\$3*C8*B8	=C8+(-1)*\$G\$3*C8+\$I\$3*B8*C8
10	9	=B9+\$F\$3*B9-\$H\$3*C9*B9	=C9+(-1)*\$G\$3*C9+\$I\$3*B9*C9
11	10	=B10+\$F\$3*B10-\$H\$3*C10*B10	=C10+(-1)*\$G\$3*C10+\$I\$3*B10*C1

Рисунок 2.2 – Формульний вигляд таблиці (скорочено до перших 9-ти поколінь).

	A	B	C
1	Покоління	Жертва	Хижак
2	1	1000	50
3	2	1050	50
4	3	1 103	50
5	4	1 157	50
6	5	1 215	51
7	6	1 275	51
8	7	1 337	52
9	8	1 401	53
10	9	1 467	54

Рисунок 2.3 – Числовий вигляд таблиці (скорочено до перших 9-ти поколінь).



Рисунок 2.4 – Графік коливання популяцій.

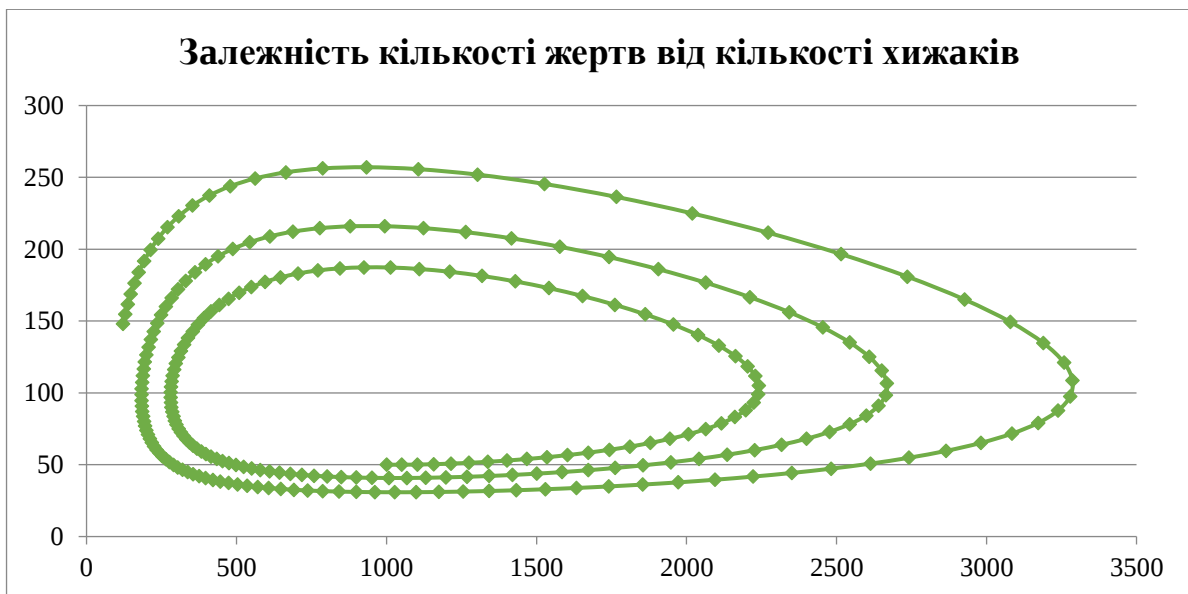


Рисунок 2.5 – Графік залежності популяції жертв від популяції хижаків.

Отже з графіків видно, що популяції коливаються з певним зсувом фази. Тобто спочатку стає багато жертв (бо мало хижаків), але з певною затримкою зростає і кількість хижаків, що в свою чергу зменшує кількість жертв, а відповідно і кількість хижаків. Такі коливання постійні і утворюють певні

концентричні кола, в рамках яких і відбуваються розвиток популяцій в реальних умовах.

2.2. Розрахунок динаміки чисельності популяції з затримкою у часі за моделлю Ферхюльста

Для моделювання чисельності $N(t)$ популяції широко використовується логістична модель (модель Ферхюльста):

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

в якій члени, що описують народжуваність і смертність $rN(t)$ і внутрішньовидову конкуренцію $rN(t) \frac{N(t)}{K}$ враховують чисельність популяції в досліджуваній момент часу t . Однак часто більш реалістичною є модель, в якій у члені, що описує конкуренцію, враховується чисельність популяції в попередні моменти часу $t - T$, ніж час t , тобто цей член має вигляд $rN(t) \frac{N(t-T)}{K}$, а рівняння, що описує швидкість зміни чисельності, стане таким

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{K} \right), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

де $T > 0$ – стала, яка може дорівнювати часові дозрівання особин до дорослого віку і т. п.

Змоделюємо цю модель в середовищі Excel:

	F	G	H	I	J
1	Початкова популяція	Коефіцієнт народжуваності	Коефіцієнт смертності	Швидкість росту популяції	Місткість середовища
2	N0			r	K
3	700 000 000	14,5	10,2	1,42	7 000 000 000

Рисунок 2.6 – Таблиця початкових даних.

	A	B	C
1	Часовий проміжок	N _i	N _i з врахуванням T=10
2	1	=F3	=F3
3	2	=B2*\$I\$3*(1-B2/\$J\$3)	=C2*\$I\$3*(1-C2/\$J\$3)
4	3	=B3*\$I\$3*(1-B3/\$J\$3)	=C3*\$I\$3*(1-C3/\$J\$3)
5	4	=B4*\$I\$3*(1-B4/\$J\$3)	=C4*\$I\$3*(1-C4/\$J\$3)
6	5	=B5*\$I\$3*(1-B5/\$J\$3)	=C5*\$I\$3*(1-C5/\$J\$3)
7	6	=B6*\$I\$3*(1-B6/\$J\$3)	=C6*\$I\$3*(1-C6/\$J\$3)
8	7	=B7*\$I\$3*(1-B7/\$J\$3)	=C7*\$I\$3*(1-C7/\$J\$3)
9	8	=B8*\$I\$3*(1-B8/\$J\$3)	=C8*\$I\$3*(1-C8/\$J\$3)
10	9	=B9*\$I\$3*(1-B9/\$J\$3)	=C9*\$I\$3*(1-C9/\$J\$3)
11	10	=B10*\$I\$3*(1-B10/\$J\$3)	=C10*\$I\$3*(1-C10/\$J\$3)
12	11	=B11*\$I\$3*(1-B11/\$J\$3)	=C11*\$I\$3*(1-(C11-C2)/\$J\$3)
13	12	=B12*\$I\$3*(1-B12/\$J\$3)	=C12*\$I\$3*(1-(C12-C3)/\$J\$3)
14	13	=B13*\$I\$3*(1-B13/\$J\$3)	=C13*\$I\$3*(1-(C13-C4)/\$J\$3)
15	14	=B14*\$I\$3*(1-B14/\$J\$3)	=C14*\$I\$3*(1-(C14-C5)/\$J\$3)
16	15	=B15*\$I\$3*(1-B15/\$J\$3)	=C15*\$I\$3*(1-(C15-C6)/\$J\$3)
17	16	=B16*\$I\$3*(1-B16/\$J\$3)	=C16*\$I\$3*(1-(C16-C7)/\$J\$3)
18	17	=B17*\$I\$3*(1-B17/\$J\$3)	=C17*\$I\$3*(1-(C17-C8)/\$J\$3)
19	18	=B18*\$I\$3*(1-B18/\$J\$3)	=C18*\$I\$3*(1-(C18-C9)/\$J\$3)

Рисунок 2.7 – Формульний вигляд таблиці (скорочено до перших 18-ти поколінь).

Після десятого покоління починаємо враховувати покоління, що йшли до цього.

	A	B	C
1	Часовий проміжок	N _i	N _i з врахуванням T=10
2	1	700 000 000	700 000 000
3	2	895 588 235	895 588 235
4	3	1 110 253 091	1 110 253 091
5	4	1 327 970 460	1 327 970 460
6	5	1 529 666 265	1 529 666 265
7	6	1 699 340 085	1 699 340 085
8	7	1 829 279 358	1 829 279 358
9	8	1 920 882 938	1 920 882 938
10	9	1 981 339 565	1 981 339 565
11	10	2 019 372 857	2 019 372 857
12	11	2 042 538 898	2 329 606 608
13	12	2 056 361 393	2 633 262 464
14	13	2 064 505 039	2 928 909 392
15	14	2 069 266 613	3 211 396 775
16	15	2 072 038 216	3 468 439 294
17	16	2 073 647 263	3 684 515 361
18	17	2 074 579 960	3 849 600 121
19	18	2 075 120 123	3 964 635 276
20	19	2 075 432 792	4 039 164 432
21	20	2 075 613 724	4 085 157 852
22	21	2 075 718 406	4 350 893 764
23	22	2 075 778 966	4 667 421 050

Рисунок 2.8 – Числовий вигляд таблиці (скорочено до перших 22-ти поколінь).

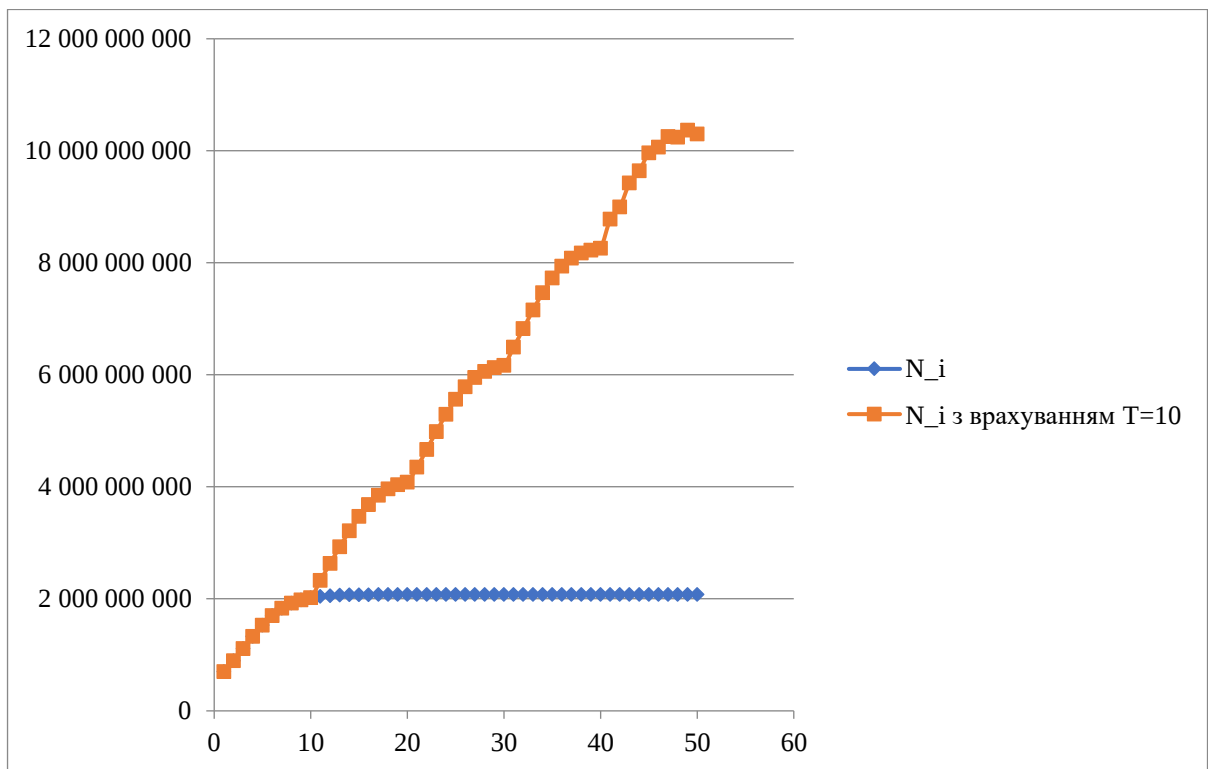


Рисунок 2.9 – Графік зміни популяції без врахування попередніх поколінь (синій) та з врахуванням зсуву в часі $T=10$ (помаранчевий).

Як видно з графіку залежності – популяція виходить на насичення, якщо не враховувати попередні покоління, проте з врахуванням часового зсуву зростання популяції відбувається стрибкоподібно, до певного числа. Після цього популяція падає, оскільки відбувається перенасичення.

РОЗДІЛ 3. Модель взаємодії двох популяцій (хижак-жертва) з затримкою у часі

3.1. Представлення моделі взаємодії двох популяцій з затримкою у часі

Для моделювання чисельності $N(t)$ популяції використовуємо наступну модель:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) = rN(t) - \frac{rN^2(t)}{K} = bN(t) - k_c N(t) + k_E N(t) - \frac{rN^2(t)}{K}, t > 0,$$

де $N(t)$ – чисельність популяції, r – швидкість збільшення популяції (тобто народжуваність); k_c – коефіцієнт смертності; k_E – коефіцієнт народжуваності.

Ця модель, яка описує народжуваність і смертність $rN(t)$ і внутрішньовидову конкуренцію $\frac{rN^2(t)}{K}$, враховує чисельність популяції в досліджуваній момент часу t . Однак часто більш реалістичною є модель, в якій у члені, що описує конкуренцію, враховується чисельність популяції в попередні моменти часу $t - T$, ніж час t , тобто цей член має вигляд $rN(t) \frac{N(t-T)}{K}$, а рівняння, що описує швидкість зміни чисельності, стане таким:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{K} \right), t > 0, \quad (3.1)$$

де $T > 0$ – стала, яка дорівнює часові дозрівання особин до дорослого віку і т. п.

Спробуємо врахувати реальні взаємини двох популяцій – хижаків та жертв. Це вперше зробив американський вчений А.Дж. Лотка (A.J. Lotka) в 1925 р, а в 1926 р незалежно від нього і більш докладно – італійський вчений В. Вольтерра

(V. Volterra). У моделі, відомої зараз як Рівняння Лотка-Вольтерра, розглядається взаємодія двох популяцій – хижака і жертви.

Дана модель використовується для прогнозування популяцій хижаків та їх жертв. Для використання моделі накладаються декілька умов:

- популяції вважаються закритими, тобто хижаки/жертви не покидають території і нові особини не приходять з зовні;
- припускається, що жертви не вмирають від хвороб та інших чинників, а лише з'їдаються хижаками. Для уточнення таких моментів просто вносяться зміни в коефіцієнт народжуваності для жертв;
- кількість їжі для жертви необмежена.

Чисельність популяції жертви N_1 буде змінюватися в часі (залежачи також від чисельності популяції хижака N_2) за таким рівнянням:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = k_{E1}N_1(t) - p_1N_1(t)N_2(t), \quad (3.3)$$

де N_1 – чисельність популяції жертви, N_2 – чисельність популяції хижака, k_{E1} – швидкість збільшення популяції жертви (тобто народжуваність), p_1 – коефіцієнт хижацтва для жертви (ймовірність того, що при зустрічі з хижакom жертва буде з'їдена).

Таким чином, збільшення чисельності жертви в одиницю часу (вираз зліва від знаку рівності і є зміна чисельності $dN_1(t)$ за одиницю часу dt) відбувається за рахунок народження нових особин (швидкість розмноження на кількість особин), а спад – за рахунок поїдання хижаками (ця величина пропорційна чисельності жертви, тому що чим більше, тим вище ймовірність зустрічі з хижакom, чисельності самого хижака і ймовірності того, що жертва при цій зустрічі загине p_1).

Приріст популяції хижака описується таким рівнянням:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -k_{c2}N_2(t) + p_2N_1(t)N_2(t) \quad (3.2)$$

де N_1 – чисельність популяції жертви, N_2 – чисельність популяції хижака, k_{c2} – смертність хижака, p_2 – коефіцієнт хижацтва (якась величина, яка вказує на "дохід", отриманий хижакom при поїданні жертви).

Зростання популяції хижака в одиницю часу пропорційний якості харчування (мається на увазі, що саме харчуванням обмежується народжуваність хижака, хоча явно це ніде не вказано), а спад відбувається за рахунок природної смертності.

3.2. Формування моделі та її реалізація, представлення отриманих розрахунків

З урахуванням формули отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= k_{E1} \left[r_1 N_1(t) \left(1 - \frac{N_1(t-T)}{K_1} \right) \right] - p_1 \left[r_1 N_1(t) \left(1 - \frac{N_1(t-T)}{K_1} \right) \right] \left[r_2 N_2(t) \left(1 - \frac{N_2(t-T)}{K_2} \right) \right], \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= -k_{c2} \left[r_2 N_2(t) \left(1 - \frac{N_2(t-T)}{K_2} \right) \right] + p_2 \left[r_1 N_1(t) \left(1 - \frac{N_1(t-T)}{K_1} \right) \right] \left[r_2 N_2(t) \left(1 - \frac{N_2(t-T)}{K_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо три варіанти моделей взаємодії популяцій «хижак-жертва»: без врахування попередніх поколінь, а також з затримкою у часі $T = 5$ та $T = 10$.

Перейдемо до формування моделей в середовищі Excel.

Введемо початкові дані – значення коефіцієнтів, що визначають наші популяції (рис. 3.1–3.2):

	F	G	H	I	J
1	Народжуваність жертви	Смертність жертви	Швидкість росту популяції жертви	Коефіцієнт хижості для жертви	Місткість середовища жертви
2	k_{E1}	k_{e1}	r_1	p_1	K_1
3	0,11	0,09	1,22	0,0015	9 000

Рис. 3.1 - Таблиця початкових даних для популяції жертв.

	K	L	M	N	O
1	Народжуваність хижака	Смертність хижака	Швидкість росту популяції хижака	Коефіцієнт хижості для хижака	Місткість середовища хижака
2	k_{E2}	k_{e2}	r_2	p_2	K_2
3	0,09	0,06	1,50	0,00005	500

Рисунок 3.2 - Таблиця початкових даних для популяції хижаків.

Для першого покоління приймемо певне співвідношення хижаків та жертв, нехай це буде 900 жертв та 50 хижаків.

Для кожної моделі вводимо наступні формули (розрахунок вівся для 250 поколінь):

- модель взаємодії популяцій хижаків та жертв без врахування попередніх поколінь (рис. 3.3):

	A	B
1	Покоління	Жертва
2	1	900
3	2	=B2+\$F\$3*(H\$3*B2*(1-(B2/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B2*(1-(B2/J\$3)))*(\$M\$3*C2*(1-C2/\$O\$3))
4	3	=B3+\$F\$3*(H\$3*B3*(1-(B3/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B3*(1-(B3/J\$3)))*(\$M\$3*C3*(1-C3/\$O\$3))
5	4	=B4+\$F\$3*(H\$3*B4*(1-(B4/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B4*(1-(B4/J\$3)))*(\$M\$3*C4*(1-C4/\$O\$3))
6	5	=B5+\$F\$3*(H\$3*B5*(1-(B5/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B5*(1-(B5/J\$3)))*(\$M\$3*C5*(1-C5/\$O\$3))
7	6	=B6+\$F\$3*(H\$3*B6*(1-(B6/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B6*(1-(B6/J\$3)))*(\$M\$3*C6*(1-C6/\$O\$3))
8	7	=B7+\$F\$3*(H\$3*B7*(1-(B7/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B7*(1-(B7/J\$3)))*(\$M\$3*C7*(1-C7/\$O\$3))
9	8	=B8+\$F\$3*(H\$3*B8*(1-(B8/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B8*(1-(B8/J\$3)))*(\$M\$3*C8*(1-C8/\$O\$3))
10	9	=B9+\$F\$3*(H\$3*B9*(1-(B9/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B9*(1-(B9/J\$3)))*(\$M\$3*C9*(1-C9/\$O\$3))
11	10	=B10+\$F\$3*(H\$3*B10*(1-(B10/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B10*(1-(B10/J\$3)))*(\$M\$3*C10*(1-C10/\$O\$3))
12	11	=B11+\$F\$3*(H\$3*B11*(1-(B11/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B11*(1-(B11/J\$3)))*(\$M\$3*C11*(1-C11/\$O\$3))
13	12	=B12+\$F\$3*(H\$3*B12*(1-(B12/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B12*(1-(B12/J\$3)))*(\$M\$3*C12*(1-C12/\$O\$3))
14	13	=B13+\$F\$3*(H\$3*B13*(1-(B13/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B13*(1-(B13/J\$3)))*(\$M\$3*C13*(1-C13/\$O\$3))
15	14	=B14+\$F\$3*(H\$3*B14*(1-(B14/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B14*(1-(B14/J\$3)))*(\$M\$3*C14*(1-C14/\$O\$3))
16	15	=B15+\$F\$3*(H\$3*B15*(1-(B15/J\$3)))-I\$3*(H\$3*B15*(1-(B15/J\$3)))*(\$M\$3*C15*(1-C15/\$O\$3))

	A	C
1	Покоління	Хижак
2	1	50
3	2	=C2+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C2*(1-C2/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B2*(1-(B2/J\$3)))*(\$M\$3*C2*(1-C2/\$O\$3))
4	3	=C3+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C3*(1-C3/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B3*(1-(B3/J\$3)))*(\$M\$3*C3*(1-C3/\$O\$3))
5	4	=C4+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C4*(1-C4/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B4*(1-(B4/J\$3)))*(\$M\$3*C4*(1-C4/\$O\$3))
6	5	=C5+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C5*(1-C5/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B5*(1-(B5/J\$3)))*(\$M\$3*C5*(1-C5/\$O\$3))
7	6	=C6+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C6*(1-C6/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B6*(1-(B6/J\$3)))*(\$M\$3*C6*(1-C6/\$O\$3))
8	7	=C7+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C7*(1-C7/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B7*(1-(B7/J\$3)))*(\$M\$3*C7*(1-C7/\$O\$3))
9	8	=C8+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C8*(1-C8/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B8*(1-(B8/J\$3)))*(\$M\$3*C8*(1-C8/\$O\$3))
10	9	=C9+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C9*(1-C9/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B9*(1-(B9/J\$3)))*(\$M\$3*C9*(1-C9/\$O\$3))
11	10	=C10+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C10*(1-C10/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B10*(1-(B10/J\$3)))*(\$M\$3*C10*(1-C10/\$O\$3))
12	11	=C11+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C11*(1-C11/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B11*(1-(B11/J\$3)))*(\$M\$3*C11*(1-C11/\$O\$3))
13	12	=C12+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C12*(1-C12/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B12*(1-(B12/J\$3)))*(\$M\$3*C12*(1-C12/\$O\$3))
14	13	=C13+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C13*(1-C13/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B13*(1-(B13/J\$3)))*(\$M\$3*C13*(1-C13/\$O\$3))
15	14	=C14+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C14*(1-C14/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B14*(1-(B14/J\$3)))*(\$M\$3*C14*(1-C14/\$O\$3))
16	15	=C15+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C15*(1-C15/\$O\$3))+N\$3*(H\$3*B15*(1-(B15/J\$3)))*(\$M\$3*C15*(1-C15/\$O\$3))

Рисунок 3.3 - Формульний вигляд таблиці чисельності жертв та хижаків без врахування попередніх поколінь (скорочено до перших 15-ти поколінь).

- модель взаємодії популяцій хижаків та жертв з затримкою у часі $T = 5$ (рис. 3.4). З другого до п'ятого покоління вводимо формули без врахування T , а починаючи з шостого покоління починаємо враховувати покоління, що йшли до цього:

A		B
1	Покоління	Жертва з врахуванням $T=5$
2	1	900
3	2	$=B2+FS3*(HS3*B2*(1-(B2/J3)))-IS3*(HS3*B2*(1-(B2/J3)))*(MS3*C2*(1-C2/O3))$
4	3	$=B3+FS3*(HS3*B3*(1-(B3/J3)))-IS3*(HS3*B3*(1-(B3/J3)))*(MS3*C3*(1-C3/O3))$
5	4	$=B4+FS3*(HS3*B4*(1-(B4/J3)))-IS3*(HS3*B4*(1-(B4/J3)))*(MS3*C4*(1-C4/O3))$
6	5	$=B5+FS3*(HS3*B5*(1-(B5/J3)))-IS3*(HS3*B5*(1-(B5/J3)))*(MS3*C5*(1-C5/O3))$
7	6	$=B6+FS3*(HS3*B6*(1-(B6-B2)/J3))-IS3*(HS3*B6*(1-(B6-B2)/J3))*(MS3*C6*(1-(C6-C2)/O3))$
8	7	$=B7+FS3*(HS3*B7*(1-(B7-B3)/J3))-IS3*(HS3*B7*(1-(B7-B3)/J3))*(MS3*C7*(1-(C7-C3)/O3))$
9	8	$=B8+FS3*(HS3*B8*(1-(B8-B4)/J3))-IS3*(HS3*B8*(1-(B8-B4)/J3))*(MS3*C8*(1-(C8-C4)/O3))$
10	9	$=B9+FS3*(HS3*B9*(1-(B9-B5)/J3))-IS3*(HS3*B9*(1-(B9-B5)/J3))*(MS3*C9*(1-(C9-C5)/O3))$
11	10	$=B10+FS3*(HS3*B10*(1-(B10-B6)/J3))-IS3*(HS3*B10*(1-(B10-B6)/J3))*(MS3*C10*(1-(C10-C6)/O3))$
12	11	$=B11+FS3*(HS3*B11*(1-(B11-B7)/J3))-IS3*(HS3*B11*(1-(B11-B7)/J3))*(MS3*C11*(1-(C11-C7)/O3))$
13	12	$=B12+FS3*(HS3*B12*(1-(B12-B8)/J3))-IS3*(HS3*B12*(1-(B12-B8)/J3))*(MS3*C12*(1-(C12-C8)/O3))$
14	13	$=B13+FS3*(HS3*B13*(1-(B13-B9)/J3))-IS3*(HS3*B13*(1-(B13-B9)/J3))*(MS3*C13*(1-(C13-C9)/O3))$
15	14	$=B14+FS3*(HS3*B14*(1-(B14-B10)/J3))-IS3*(HS3*B14*(1-(B14-B10)/J3))*(MS3*C14*(1-(C14-C10)/O3))$
16	15	$=B15+FS3*(HS3*B15*(1-(B15-B11)/J3))-IS3*(HS3*B15*(1-(B15-B11)/J3))*(MS3*C15*(1-(C15-C11)/O3))$

A		C
1	Покоління	Хижак з врахуванням $T=5$
2	1	50
3	2	$=C2+(-1)*L3*(MS3*C2*(1-C2/O3))+N3*(HS3*B2*(1-(B2/J3)))*(MS3*C2*(1-C2/O3))$
4	3	$=C3+(-1)*L3*(MS3*C3*(1-C3/O3))+N3*(HS3*B3*(1-(B3/J3)))*(MS3*C3*(1-C3/O3))$
5	4	$=C4+(-1)*L3*(MS3*C4*(1-C4/O3))+N3*(HS3*B4*(1-(B4/J3)))*(MS3*C4*(1-C4/O3))$
6	5	$=C5+(-1)*L3*(MS3*C5*(1-C5/O3))+N3*(HS3*B5*(1-(B5/J3)))*(MS3*C5*(1-C5/O3))$
7	6	$=C6+(-1)*L3*(MS3*C6*(1-(C6-C2)/O3))+N3*(HS3*B6*(1-(B6-B2)/J3))*(MS3*C6*(1-(C6-C2)/O3))$
8	7	$=C7+(-1)*L3*(MS3*C7*(1-(C7-C3)/O3))+N3*(HS3*B7*(1-(B7-B3)/J3))*(MS3*C7*(1-(C7-C3)/O3))$
9	8	$=C8+(-1)*L3*(MS3*C8*(1-(C8-C4)/O3))+N3*(HS3*B8*(1-(B8-B4)/J3))*(MS3*C8*(1-(C8-C4)/O3))$
10	9	$=C9+(-1)*L3*(MS3*C9*(1-(C9-C5)/O3))+N3*(HS3*B9*(1-(B9-B5)/J3))*(MS3*C9*(1-(C9-C5)/O3))$
11	10	$=C10+(-1)*L3*(MS3*C10*(1-(C10-C6)/O3))+N3*(HS3*B10*(1-(B10-B6)/J3))*(MS3*C10*(1-(C10-C6)/O3))$
12	11	$=C11+(-1)*L3*(MS3*C11*(1-(C11-C7)/O3))+N3*(HS3*B11*(1-(B11-B7)/J3))*(MS3*C11*(1-(C11-C7)/O3))$
13	12	$=C12+(-1)*L3*(MS3*C12*(1-(C12-C8)/O3))+N3*(HS3*B12*(1-(B12-B8)/J3))*(MS3*C12*(1-(C12-C8)/O3))$
14	13	$=C13+(-1)*L3*(MS3*C13*(1-(C13-C9)/O3))+N3*(HS3*B13*(1-(B13-B9)/J3))*(MS3*C13*(1-(C13-C9)/O3))$
15	14	$=C14+(-1)*L3*(MS3*C14*(1-(C14-C10)/O3))+N3*(HS3*B14*(1-(B14-B10)/J3))*(MS3*C14*(1-(C14-C10)/O3))$
16	15	$=C15+(-1)*L3*(MS3*C15*(1-(C15-C11)/O3))+N3*(HS3*B15*(1-(B15-B11)/J3))*(MS3*C15*(1-(C15-C11)/O3))$

Рисунок 3.4 - Формульний вигляд таблиці чисельності жертв та хижаків з затримкою у часі $T = 5$ (скорочено до перших 15-ти поколінь).

- модель взаємодії популяцій хижаків та жертв з затримкою у часі $T = 10$ (рис. 3.5). З другого до десятого покоління вводимо формули без врахування T , а починаючи з одинадцятого покоління починаємо враховувати покоління, що йшли до цього:

A		B
1	Покоління	Жертва з врахуванням $T=10$
2	1	900
3	2	$=B2+\$F\$3*(\$H\$3*B2*(1-(B2/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B2*(1-(B2/\$J\$3)))*(\$M\$3*C2*(1-C2/\$O\$3))$
4	3	$=B3+\$F\$3*(\$H\$3*B3*(1-(B3/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B3*(1-(B3/\$J\$3)))*(\$M\$3*C3*(1-C3/\$O\$3))$
5	4	$=B4+\$F\$3*(\$H\$3*B4*(1-(B4/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B4*(1-(B4/\$J\$3)))*(\$M\$3*C4*(1-C4/\$O\$3))$
6	5	$=B5+\$F\$3*(\$H\$3*B5*(1-(B5/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B5*(1-(B5/\$J\$3)))*(\$M\$3*C5*(1-C5/\$O\$3))$
7	6	$=B6+\$F\$3*(\$H\$3*B6*(1-(B6/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B6*(1-(B6/\$J\$3)))*(\$M\$3*C6*(1-C6/\$O\$3))$
8	7	$=B7+\$F\$3*(\$H\$3*B7*(1-(B7/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B7*(1-(B7/\$J\$3)))*(\$M\$3*C7*(1-C7/\$O\$3))$
9	8	$=B8+\$F\$3*(\$H\$3*B8*(1-(B8/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B8*(1-(B8/\$J\$3)))*(\$M\$3*C8*(1-C8/\$O\$3))$
10	9	$=B9+\$F\$3*(\$H\$3*B9*(1-(B9/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B9*(1-(B9/\$J\$3)))*(\$M\$3*C9*(1-C9/\$O\$3))$
11	10	$=B10+\$F\$3*(\$H\$3*B10*(1-(B10/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B10*(1-(B10/\$J\$3)))*(\$M\$3*C10*(1-C10/\$O\$3))$
12	11	$=B11+\$F\$3*(\$H\$3*B11*(1-(B11-B2)/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B11*(1-(B11-B2)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C11*(1-(C11-C2)/\$O\$3))$
13	12	$=B12+\$F\$3*(\$H\$3*B12*(1-(B12-B3)/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B12*(1-(B12-B3)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C12*(1-(C12-C3)/\$O\$3))$
14	13	$=B13+\$F\$3*(\$H\$3*B13*(1-(B13-B4)/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B13*(1-(B13-B4)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C13*(1-(C13-C4)/\$O\$3))$
15	14	$=B14+\$F\$3*(\$H\$3*B14*(1-(B14-B5)/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B14*(1-(B14-B5)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C14*(1-(C14-C5)/\$O\$3))$
16	15	$=B15+\$F\$3*(\$H\$3*B15*(1-(B15-B6)/\$J\$3)))-\$I\$3*(\$H\$3*B15*(1-(B15-B6)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C15*(1-(C15-C6)/\$O\$3))$

A		C
1	Покоління	Хижак з врахуванням $T=10$
2	1	50
3	2	$=C2+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C2*(1-C2/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B2*(1-(B2/\$J\$3)))*(\$M\$3*C2*(1-C2/\$O\$3))$
4	3	$=C3+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C3*(1-C3/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B3*(1-(B3/\$J\$3)))*(\$M\$3*C3*(1-C3/\$O\$3))$
5	4	$=C4+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C4*(1-C4/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B4*(1-(B4/\$J\$3)))*(\$M\$3*C4*(1-C4/\$O\$3))$
6	5	$=C5+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C5*(1-C5/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B5*(1-(B5/\$J\$3)))*(\$M\$3*C5*(1-C5/\$O\$3))$
7	6	$=C6+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C6*(1-C6/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B6*(1-(B6/\$J\$3)))*(\$M\$3*C6*(1-C6/\$O\$3))$
8	7	$=C7+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C7*(1-C7/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B7*(1-(B7/\$J\$3)))*(\$M\$3*C7*(1-C7/\$O\$3))$
9	8	$=C8+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C8*(1-C8/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B8*(1-(B8/\$J\$3)))*(\$M\$3*C8*(1-C8/\$O\$3))$
10	9	$=C9+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C9*(1-C9/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B9*(1-(B9/\$J\$3)))*(\$M\$3*C9*(1-C9/\$O\$3))$
11	10	$=C10+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C10*(1-C10/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B10*(1-(B10/\$J\$3)))*(\$M\$3*C10*(1-C10/\$O\$3))$
12	11	$=C11+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C11*(1-(C11-C2)/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B11*(1-(B11-B2)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C11*(1-(C11-C2)/\$O\$3))$
13	12	$=C12+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C12*(1-(C12-C3)/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B12*(1-(B12-B3)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C12*(1-(C12-C3)/\$O\$3))$
14	13	$=C13+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C13*(1-(C13-C4)/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B13*(1-(B13-B4)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C13*(1-(C13-C4)/\$O\$3))$
15	14	$=C14+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C14*(1-(C14-C5)/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B14*(1-(B14-B5)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C14*(1-(C14-C5)/\$O\$3))$
16	15	$=C15+(-1)*\$L\$3*(\$M\$3*C15*(1-(C15-C6)/\$O\$3))+\$N\$3*(\$H\$3*B15*(1-(B15-B6)/\$J\$3)))*(\$M\$3*C15*(1-(C15-C6)/\$O\$3))$

Рисунок 3.5 - Формульний вигляд таблиці чисельності жертв та хижаків з затримкою у часі $T = 10$ (скорочено до перших 15-ти поколінь).

Отримуємо наступні результати чисельності популяцій жертв та хижаків для моделей, що розглядаються, тобто без врахування попередніх поколінь, з затримкою у часі $T = 5$ та $T = 10$ (рис. 3.6).

З графіків (рис. 3.7–3.10), які відображають взаємодії популяцій хижаків та жертв для кожної моделі, видно, що популяції коливаються з певним зсувом фази. Тобто спочатку стає багато жертв (бо мало хижаків), але з певною затримкою зростає і кількість хижаків, що в свою чергу зменшує кількість жертв, а відповідно і кількість хижаків. Такі коливання постійні і утворюють певні концентричні кола, в рамках яких і відбуваються розвиток популяцій в реальних

умовах. Як бачимо, у порівнянні з моделлю без врахування попередніх поколінь в моделях з врахуванням часового зсуву відбувається з часом більш істотне збільшення розміру амплітуди коливань чисельності популяцій жертв та хижаків. При цьому спостерігається стрімкіше зростання розмаху амплітуд при більшій величині затримки у часі.

Покоління	Жертва	Хижак	Жертва з врахуванням $T=5$	Хижак з врахуванням $T=5$	Жертва з врахуванням $T=10$	Хижак з врахуванням $T=10$
1	900	50	900	50	900	50
2	909	49	909	49	909	49
3	919	49	919	49	919	49
4	930	48	930	48	930	48
5	943	47	943	47	943	47
6	957	47	946	47	957	47
7	972	46	950	47	972	46
8	988	46	954	47	988	46
9	1 005	46	959	47	1 005	46
10	1 024	45	965	47	1 024	45
11	1 043	45	970	47	1 033	45
12	1 063	45	976	47	1 042	45
13	1 085	45	983	46	1 051	46
14	1 106	44	989	46	1 059	46
15	1 129	44	996	46	1 068	46
16	1 152	44	1 002	47	1 075	46
17	1 175	44	1 009	47	1 082	47
18	1 199	45	1 015	47	1 089	47
19	1 222	45	1 021	47	1 094	48
20	1 246	45	1 027	47	1 099	48
21	1 269	45	1 032	47	1 102	49
22	1 291	46	1 037	47	1 104	49
23	1 313	46	1 042	48	1 105	50
24	1 334	47	1 046	48	1 104	50
25	1 354	47	1 049	48	1 101	51
26	1 373	48	1 051	48	1 097	51
27	1 390	49	1 053	49	1 092	52
28	1 406	50	1 054	49	1 085	52
29	1 419	51	1 054	49	1 077	53
30	1 431	51	1 053	50	1 067	53

Рисунок 3.6 - Числовий вигляд таблиць чисельності жертв та хижаків (скорочено до перших 30-ти поколінь).

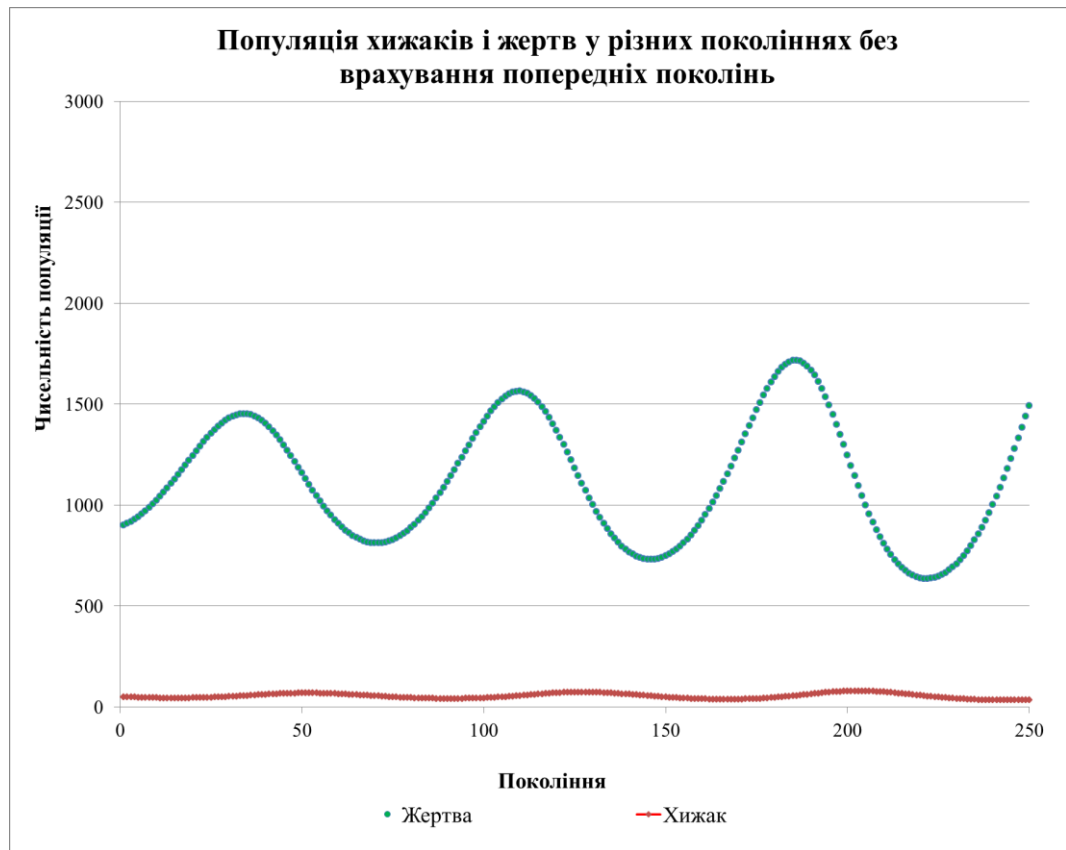


Рисунок 3.7 - Графік коливання популяцій без врахування попередніх поколінь.

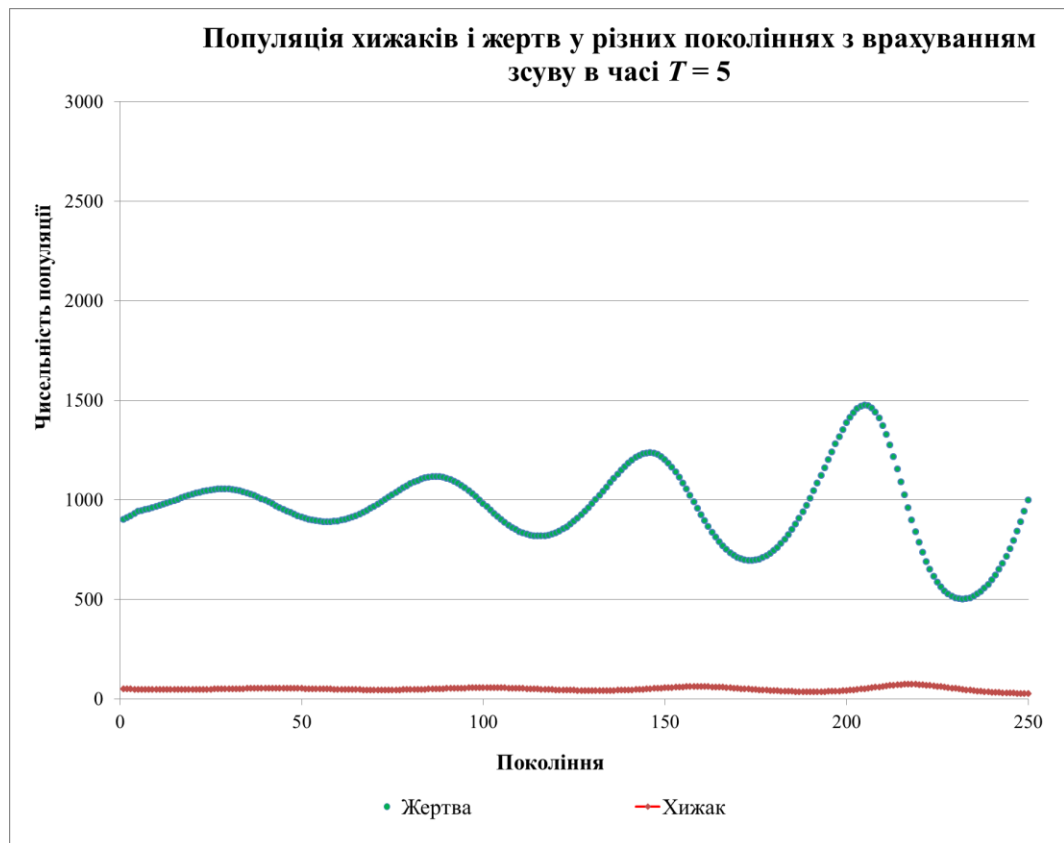
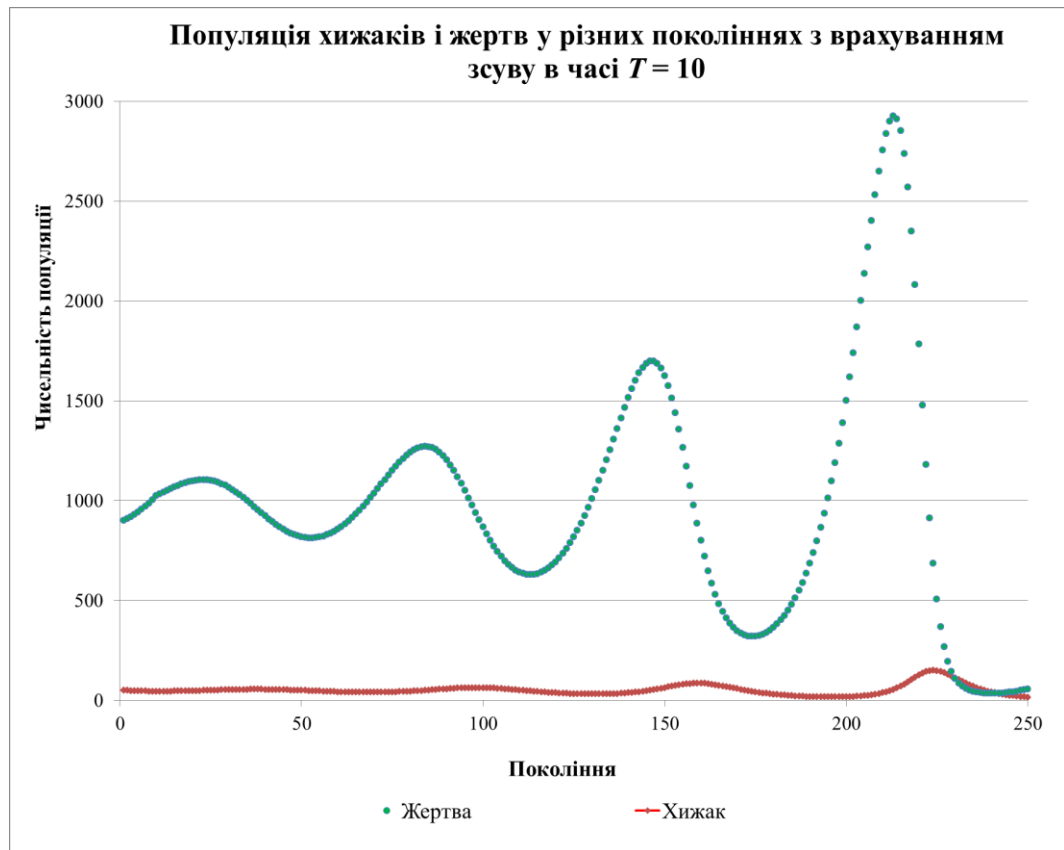


Рисунок 3.8 - Графік коливання популяцій з врахуванням зсуву в часі $T = 5$.



Риунок 3.9 - Графік коливання популяцій з врахуванням зсуву в часі $T = 10$.

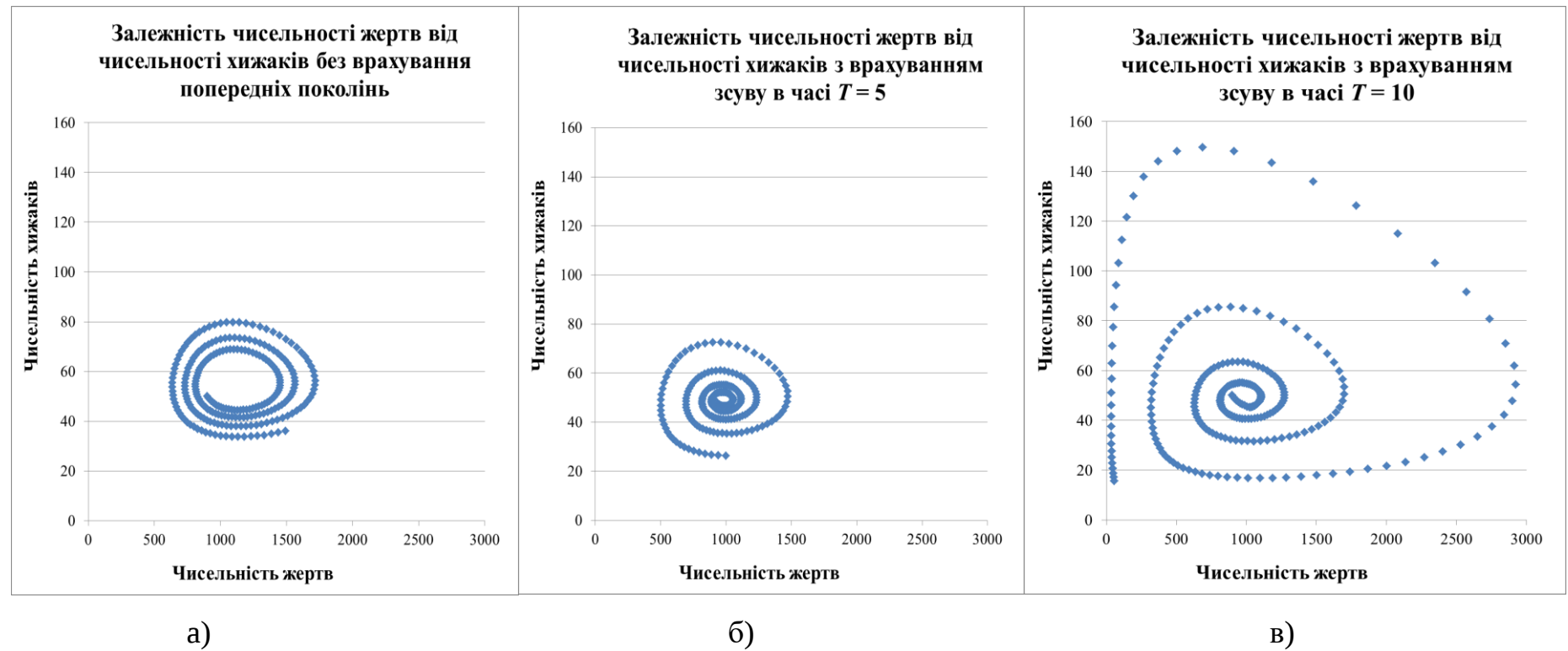


Рис. 3.10 - Графіки залежності популяції жертв від популяції хижаків:

а) без врахування попередніх поколінь; б) з врахуванням зсуву в часі $T = 5$; в) з врахуванням зсуву в часі $T = 10$.

ВИСНОВОК

Кожна популяція, не важливо чи це популяція мікроорганізмів чи тварин чи рослин чи будь-яка екосистема – буде являти собою живу систему, якій властива саморегуляція, динамічний чи пасивний розвиток, сталий чи прогресивний розвиток та темп розмноження в ній організмів. Але насамперед вона не існує ізольованою, а разом з популяцією інших видів.

Тому при моделюванні розрахунку росту популяції треба враховувати вплив багатьох чинників, наприклад таких як затримка у часі, взаємодія двох популяцій, місткість середовища, взаємодію між хижаком та жертвою, час дозрівання особи тощо.

Розрахунки по моделі Ферхльюста демонструє розвиток популяції з умовою затримки у часі та з урахуванням основних факторів які впливають на розвиток динаміки популяції. Модель Лотка-Вольтерра показує динаміку популяції хижака жертви в одній системі.

Розроблена власна модель виходячи з моделей які були досліджені. Вона враховує реальні взаємини двох популяцій – хижак та жертва. Для використання моделі накладались такі умови як:

- популяції вважаються закритими, тобто хижаки/жертви не покидають території і нові особини не приходять з зовні.
- припускається, що жертви не вмирають від хвороб та інших чинників, а лише з'їдаються хижаками. Для уточнення таких моментів просто вносяться зміни в коефіцієнт народжуваності для жертв.
- кількість їжі для жертви необмежена.

Отримані результати можна вважати більш точними за результати розрахунків за модель Лотка-Вольтерра бо відслідковується більше чинників взаємодій саме двох популяцій в закритому середовищі з урахуванням затримки у часі.

Взагалі робота повинна стати корисною для ведення господарств, ферм та навіть запобігання за допомогою математичних розрахунків екологічної катастрофи в певному закритому середовищі чи водоймі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Капустян М.С курсова робота за темою: «Моделювання динаміки чисельності популяцій з урахуванням затримки у часі» 2020р. 36с
2. Хенсон М. А. Динамічне моделювання популяцій мікробних клітин. *Curr Opin Biotech.* 2003 (№14(5)). С. 460-467.
3. Britton, N. F. (2003). Population dynamics of interacting species. In *Essential Mathematical Biology* (pp. 47-82). Springer, London.
4. Charlebois, D. A. & Kaern, M. (2013). An accelerated method for simulating population dynamics. *Communications in Computational Physics*, 14(2), 461-476.
5. Ewens, W. J. (2004). *Mathematical population genetics* (Vol. 27). Springer-Verlag, New York.
6. Foerster, H. V. (1959). Some remarks on changing populations *The Kinetics of Cellular Proliferation*, ed. FS Jr. New York.
7. Gunawardena, J. Моделі біології: «Точні описи нашого патетичного мислення» , *BMC Biol.* 2014 (№12(1)). С. 1-11.
8. Huiqin, J., Jinzhi, L. (2014). A mathematical model of cell population dynamics with autophagy response to starvation. *Mathematical biosciences*, 258, 1-10.
9. Murray, J. D. (2001). *Mathematical Biology II: spatial models and biomedical applications* (Vol. 3). Springer-Verlag.
10. Patsch, K. et al. (2016). Single cell dynamic phenotyping. *Scientific reports*, 6(1), 1-15.
11. Мобіус В., Лаан Л. Фізико-математичне моделювання в експериментальних роботах. 2015. 163 с.
12. Volterra V. 1931. *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie.* Gauthiers-Villars, Paris, 214 pp.
13. von Voerster H. 1959. Some remarks on changing populations// *The kinetics of Cellular Proliferation* (Ed. F. Stohlman), Grune and Stratton, N.Y.: 382-407.
14. Wangersky P.G., Canningham W.J. 1957. Time lag in prey-predator models// *Ecology* 38: 136-139.

15. Verhulst P.F. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement// Corresp. Math. et Phys. 10: 113-121.