Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота

освітньо-науковий рівень - магістр

на тему: «ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИМИ ПОЛЯМИ НА ГРАФАХ»

Виконав: студент 2-го року навчання,
Спеціальності
124 Системний аналіз
Случинський Дмитро Юрійович
Керівник: Чорней Р.К.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Рецензент: ________________________________
Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою ____________
Секретар ЕК________________________
____
«__» ____________ 2024 р.

Київ — 2024

Зміст

Тема: Оптимальні стратегії в задачах керування випадковими полями на графах

Календарний план виконніння роботи

№	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1	Вибір теми дипломної роботи.	08.10.2023	
2	Огляд необхідної літератури за темою роботи.	11.12.2023	
3	Визначення основних завдань дипломної роботи.	15.01.2024	
4	Побудова моделі	17.03.2024	
5	Програмна реалізація	10.04.2024	
6	Попередній захист	17.05.2024	
7	Аналіз результатів	25.05.2024	
8	Захист магістерської роботи	07.06.2024	

Анотація

Оптимальні стратегії в задачах керування випадковими полями на графах

У роботі розглядаються задачі керування випадковими полями на графах та їх застосування до стохастичних клітинних автоматів. Об'єктом дослідження є стохастичні клітинні автомати, а предметом дослідження є локальні стратегії керування. Метою роботи є дослідження оптимальних локальних стратегій керування для стохастичних клітинних автоматів, які мінімізують середні втрати системи за одиницю часу.

Моделлю є система стохастичних клітинних автоматів, яка являє собою скінченний неорієнтований граф, де кожен автомат взаємодіє тільки зі своїми сусідами. Кожен з автоматів перебуває в одному зі станів та приймає вхідні сигнали, які є керуванням. Ймовірність переходу між станами автоматів залежить від вхідних сигналів та станів сусідів. Функцією втрат є сумарні збитки від зміни стану системи та керування. Для великих систем задача оптимізації є складною або неможливою через важкі розрахунки. Тому запропоновано використовувати локальні стратегії замість глобальних, щоб забезпечити зменшення кількості обчислень.

Теоретичні результати були використані для моделювання процесу керування гасіння лісових пожеж, де територія лісу розглядається як двовимірна сітка. Кожна клітина на сітці є частиною лісу і має один зі станів: Alive (живий), Fire (горить) або Burnt (згорів). Для керування

пожежею вводиться множина рішень для кожної клітини: Extinguish (гасити), Leave (залишити). Була реалізована програма на мові програмування Python. Вона знаходить оптимальне керування та реалізує його в кожен момент часу $t = 0, 1, 2, \ldots$. Користувач має змогу спостерігати за зміною системи через графічний інтерфейс.

Результатом роботи є модель керування стохастичними клітинними автоматами на основі локальних стратегій, які забезпечує ефективне зменшення обчислювальної складності. Здійснено моделювання процесу керування розповсюдженням лісових пожеж, що дозволяє визначати та застосовувати оптимальні стратегії керування. У роботі проведено порівняння локальних та глобальних стратегій, а також локальних стратегій із наївною стратегією та стратегією гасіння всіх сісідів навколо осередку пожежі. Показано, що локальні стратегії забезпечують близькі до глобальних стратегії результати з меншими обчислювальними витратами.

Ключові слова: стохастичні клітинні автомати,допустимі стаціонарні марковські стратегії, оптимальне керування, локальні стратегії, глобальні стратегії, лісові пожежі.

1 Вступ

Однією з основних проблем сучасної науки та техніки є розробка ефективних стратегій управління для складних систем. У таких системах прийняття оптимальних рішень часто базується на обробці великого обсягу даних і врахуванні численних взаємодій між окремими елементами. Одним з перспективних підходів до моделювання таких систем є використання клітинних автоматів. Клітинні автомати дозволяють моделювати поведінку складних систем, де стан кожного елемента залежить від стану його сусідів. Це особливо корисно для дослідження оптимальних стратегій керування, оскільки дозволяє проводити численні експерименти та оцінювати ефективність різних підходів.

У цій роботі ми зосередимося на розробці та аналізі оптимальних локальних стратегій керування в системах клітинних автоматів, використовуючи модель лісових пожеж як приклад. Модель лісових пожеж обрана для наочності та практичної значущості, оскільки вона ілюструє, як локальні взаємодії можуть призводити до глобальних змін у системі.

Основна мета цієї роботи — змоделювати систему стохастичних клітинних автоматів та розрахувати локальні стратегії керування, які забезпечують оптимальне функціонування системи в умовах обмежених обчислювальних ресурсів і високої складності. Важливим аспектом дослідження є порівняння локальних та глобальних стратегій управління, оцінка їхньої ефективності до практичного застосування.

Для досягнення цієї мети ми поставили перед собою наступні завдання:

- Розробка математичної моделі: створити математичну модель поширення лісових пожеж на основі клітинних автоматів. Кожна клітина в моделі може перебувати в одному з трьох станів: Alive (жива), Fire (палаюча), або Burnt (згоріла). Переходи між станами визначаються ймовірностями, які залежать від стану клітини та її сусідів.

- Програмна реалізація: розробити програмний застосунок на мові Python для симуляції поширення лісових пожеж та тестування різних стратегій управління. Застосунок має забезпечити візуалізацію стану системи в різні моменти часу та включати інструменти для налаштування параметрів моделі.

- Порівняння глобальних і локальних стратегій: порівняти ефективність глобальних і локальних стратегій управління. Глобальні стратегії враховують стан всієї системи, що значно ускладнює розрахунки для великих сіток. Локальні стратегії, навпаки, базуються на стані окремих клітин та їх найближчих сусідів, що спрощує обчислення. Провести експерименти для порівняння цих підходів та оцінки їх ефективності.

- Розробка і тестування альтернативних стратегій: дослідити альтернативні стратегії, такі як гасіння всіх палаючих клітин або запобігання поширенню пожежі шляхом гасіння суміжних живих клітин. Провести симуляції для оцінки їх ефективності порівняно з локальними стратегіями.

Об'єктом дослідження є система стохастичних клітинних автоматів, що моделює ландшафт з лісовими пожежами. Дослідження охоплює як теоретичні аспекти існування та оптимальності стратегій управління, так і практичні аспекти реалізації та тестування моделей за допомогою комп'ютерної симуляції.

Очікується, що результати цього дослідження нададуть нові інсайти щодо ефективних підходів до управління складними системами, продемонструють переваги локальних стратегій та визначать умови, за яких ці стратегії можуть бути оптимальними. Це може мати вагомі практичні застосування для розробки систем управління різноманітними процесами, включаючи природні та техногенні системи, що сприятиме підвищенню їхньої ефективності та надійності.

2 Локальне керування марковськими процесами з дискретним часом і простором станів у вигляді графу

Теоретичний матеріал цього розділу має реферативний характер. Всі використані означення, теореми, наслідки, формули та поняття є запозиченими з роботи [1].

2.1 Марковський процес з локально взаємодіючими синхронними компонентами

Задамо скінченний неорієнтований граф $G = (V, B)$, де V - множина вершин, а B - множина ребер. Даний граф буде визначати структуру взаємодії моєї системи. Позначимо $\{k, j\}$ ребро графа, що з'єднує вершини k та j. Околицею вершини $k \in V$ називатимемо множину $N(k) = \{j : \{k, j\} \in B\} - \{k\}$, тобто всі вершини з'єднані з вершиною k ребрами. Водночас $\widetilde{N}(k) = N(k) \cup \{k\}$ є повним околом: множина вершин з'єднаних з вершиною k ребрами включаючи вершину k.

Нехай $X_i = \{x_i^1, \dots, x_i^{n_i}\}$ – локальний простір станів у вершині i, що належить до V. Тоді $X = \underset{i \in V}{\times} X_i$ – глобальний простір станів системи. Для кожної підмножини вершин $K \subset V$,
$x_K := (x_k, k \in K) \in X_K = \underset{i \in K}{\times} X_i$ вектор, що описує стани у вершинах K.

Означення 2.1 (Дискретне випадкове поле)**.** *Випадкова величина* $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, що приймає значення в* X *називаетъся (дискретним)* *випадковим полем над $G = (V, B)$. Випадкові величини, що набувають значень з X позначаються ξ_K, а для $K = \{k\}$ - ξ_k.*

Означення 2.2 (Дискретне Марковське випадкове поле). *Дискретне випадкове поле ξ над $G = (V, B)$ називається (дискретним) Марковським випадковим полем, якщо виконується наступна умова:*

$$\mathbb{P}(\xi_k = x_k | \xi_{V-\{k\}} = x_{V-\{k\}}) = \mathbb{P}(\xi_k = x_k | \xi_{N(k)} = x_{N(k)}), \quad \forall x \in X.$$

Оскільки наша система змінюється з часом, будемо вважати, що еволюція системи описується тим, що значення X_k з k - ї вершини в момент часу t залежить від попереднього стану всієї системи через значення вершин її повного околу $\widetilde{N}(k)$ у попередній момент часу $t-1$. Отже, якщо t приймає дискретні значення, то зміна системи описується Марковським процесом з дискретним часом:

$$\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \ldots\}$$

Означення 2.3 (Локальність та синхронність). *Нехай $\xi = \{\xi^t : t = 0, 1, \ldots\}$ – Марковський процес із дискретним часом та простором станів X для G. Тоді перехідні ймовірності ξ будемо називати локальними, якщо :*

$$\mathbb{P}(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} | \xi^t = x^t, \ldots, \xi^0 = x^0) = \mathbb{P}(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} | \xi^t_{\widetilde{N}(k)} = x^t_{\widetilde{N}(k)}),$$

Тоді ймовірності ξ будемо називати синхронними,якщо :

$$\mathbb{P}(\xi_K^{t+1} = x_K^{t+1} | \xi^t = x^t) = \prod_{k \in K} \mathbb{P}(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} | \xi^t = x^t).$$

Процес ξ, що задовольняє одночасно умови локальності та синхронності називається Марковським процесом з синхронними компонентами, що взаємодіють локально.

Наслідок 2.1. *Для будь-якого моменту часу $t \in \mathbb{N}$ можемо знайти механізм переходу з часом для випадкових полів:*

$$\mathbb{P}(\xi_K^{t+1} = x_K^{t+1} | \xi^t = x^t) = \prod_{k \in K} \mathbb{P}(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} | \xi_{\widetilde{N}(k)}^t = x_{\widetilde{N}(k)}^t)$$

$$K \subset V, x^t, x^{t+1} \in X$$

2.2 Локальне керування Марковського процесу з дискретним часом

Означення 2.4 (Набір можливих дій)**.** *Набір можливих дій використовуємий особою, що приймає рішення у вершині i позначимо A_i. Тоді загальний набір дій на графі G буде сукупністю всіх A_i, тобто:*

$$A = \underset{i \in V}{\times} A_i$$

Зазначимо, що A_i є скінченною множиною і незалежить від часу.

Означення 2.5 (Історія станів)**.** *Нехай $h_i^t = (x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{t-1}, x_i^t)$ є історією станів вершини i в момент часу t. Тоді $h^t = \{h_i^t : i \in V\}$ - загальна історія системи в час $t \in N$*

Означення 2.6 (Залежні від історії рішення)**.** *Будемо визначати* *залежні від історії рішення в час* t

$$\Delta^t = \Delta^t(x^0, x^1, \dots, x^t) = \{\Delta_i^t : i \in V\} \in \bigtimes_{i \in V} A_i$$

Означення 2.7 (Допустимість дій)**.** *Неприпустимість дій, залежних від часу та стану визначається фіксацією для будь-якої вершини* $i \in V$ *і будь-якої конфігурацією(стану) системи* $x \in X$ *набору* $A_i^t(x)$ *для* Δ_i^t *під час* t*, якщо* $\xi^t = x$*.*

Означення 2.8 (Рандомізовнана стратегія)**.** *Рандомізована стратегія (політика)* $\pi = \{\pi^t : t \in \mathbb{N}\}$ *для керування системою з взаємодіючими компонентами та простором дій у формі добутку визначається як вектор локальних політик* $\pi = (\pi_i, i \in V)$*, де для вузла* i $\pi_i = \{\pi_i^0, \dots, \pi_i^t, \dots\}$ *є послідовністю ймовірностей переходу* $\pi_i^t = \pi_{it}(\cdot \mid x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$*. Таким чином,* π_i^t *є ймовірнісною мірою на* $(A_i, \mathfrak{A}_i)$ *для будь-яких* $(x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$ *і залежить від історії* $h^t = (x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$ *системи до* t*-го переходу. Тому для всіх* $B_i \in \mathfrak{A}_i$ *маємо*

$$\Pr\{\alpha_i^t \in B_i \mid \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^1, \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = x^t\} = \\ = \pi_i^t(B_i \mid x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t).$$

Означення 2.9 (Локальна стратегія)**.** *Визначимо керування так само, як в (2.4). Якщо рішення* Δ_i^t *для вузла* $i \in V$ *прийняте на основі історії повного околу* $\widetilde{N}(i)$ *для* i *в час* $t = 0, 1, \dots$*.*

$$\Delta_i^t(x^0_{\widetilde{N}(i)}, x^1_{\widetilde{N}(i)}, \dots, x^t_{\widetilde{N}(i)}) = \Delta_i^t$$

Тоді послідовність рішень

$$\delta_i = \{\Delta_i^t, t \in N\}$$

Називатимемо локальною стратегією для вершини i.

Означення 2.10 (Допустимість рішень)**.** *Для будь-якої вершини $i \in V$ і стану системи в її повному околі $x_{\widetilde{N}(i)}$ в момент часу t у вузлі i, $A_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})$ є множиною допустимих рішень для Δ_i^t в момент часу t, якщо $\xi_{\widetilde{N}(i)}^t = x_{\widetilde{N}(i)}$. Тоді множину допустимих рішень для всієї системи в момент часу t визначатимемо:*

$$A^t(x) = \times_{i \in V} A_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})$$

Означення 2.11. *Для локальної чистої (детермінованої) стратегії Δ в момент часу $t = 0, 1, \ldots$ рішення Δ_i^t для вузла i приймається на основі історії повного околу $\widetilde{N}(i)$ вузла i, тобто на основі $x^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^t_{\widetilde{N}(i)}$.*
Отже, ми можемо розглядати послідовності прийняття рішень, що залежать від історії $\Delta_i^t\left(x^0, \ldots, x^t\right) = \Delta_i^t\left(x^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^t_{\widetilde{N}(i)}\right)$ як функції, визначені на просторі $X^{t+1}_{\widetilde{N}(i)} = \underbrace{X_{\widetilde{N}(i)} \times \cdots \times X_{\widetilde{N}(i)}}_{\text{(t+1)-times}}$ зі значеннями в A_i.

Означення 2.12 (Локальна чиста стратегія)**.** *Локальна чиста стратегія $\Delta = (\Delta_i : i \in V)$ визначається функціями $\Delta_i = (\Delta_i^t, t \geq 0)$*

та їхніми значеннями.

$$\Delta_i^0(x^0_{\widetilde{N}(i)}), \ldots, \Delta_i^t(x^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^t_{\widetilde{N}(i)}), \ldots$$

Означення 2.13 (Локальна марковська стратегія)**.** *Локальна стратегія $\Delta = (\Delta_i : i \in V)$ називається локальною марковською стратегією, якщо для всіх $x^0, x^1, \ldots, x^t \in X$ $\Delta_i^t(x^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^t_{\widetilde{N}(i)}) = \Delta_i^t(x^t_{\widetilde{N}(i)}), i \in V$, тобто кожна локальна функція прийняття рішень Δ_i^t залежить тільки від станів повного околу вершини i в той самий час t.*

Означення 2.14 (Стаціонарна локальна марковська стратегія)**.** *Локальна марковська стратегія $\Delta = (\Delta_i : i \in V)$ є стаціонарною (локальною марковою), якщо для всіх t' та t'' виконується наступна умова:*

$$\Delta_i^{t'}(x_{\widetilde{N}(i)}) \equiv \Delta_i^{t''}(x_{\widetilde{N}(i)}), i \in V$$

Означення 2.15 (Допустима марковська стратегія)**.** *Локальна стратегія Δ називається допустимою, якщо для кожного $t \in \mathbb{N}$*

$$\Delta^t\left(x^0, \ldots, x^{t-1}, x^t\right) = \{\Delta_i^t\left(x^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, x^t_{\widetilde{N}(i)}\right) : i \in V\} \in A^t(x^t).$$

Клас всіх допустимих детермінованих локальних стратегій позначається $\mathcal{LD}$; підклас допустимих локальних стратегій маркова позначається $\mathcal{LD}_M$.

Означення 2.16 (Допустима локальна стаціонарна марковська стратегія)**.** *Допустимою локальною стаціонарною марківською* *стратегією Δ називатимемо стратегію, яка задовольняє умови стаціонарності, локальності та допустимості з означень 3.13 - 3.15.*

Означення 2.17 (Керований марковський процес)**.** *Пара (ξ, Δ) називається керованим процесом з локально взаємодіючими синхронними компонентами відносно скінченного графу взаємодії $\Gamma = (V, B)$, якщо:*

- $\xi = (\xi^t : t \in \mathbb{N})$ *є марковським випадковим полем з дискретним часом і простором станів $X = \times_{i \in V} X_i$,*
- $\Delta = (\Delta_i : i \in V)$ *є допустимою локальною стаціонарною марковська стратегією*
- *Ядра переходів ξ визначається наступним чином: якщо*

$$0 < \Pr\{\xi^0 = x^0, \Delta^0(\xi^0) = a^0, \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \Delta^{t-1}(\xi^0, \dots, \xi^{t-1}) =$$

$$= a^{t-1}, \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = a\},$$

тоді

$$\begin{aligned}
&\Pr\{\xi_K^{t+1} = x_K \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0(\xi^0) = a^0, \dots, \xi^{t-1} = \\
&x^{t-1}, \Delta^{t-1}(\xi^0, \dots, \xi^{t-1}) = a^{t-1}, \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = a\} \\
&= \Pr\{\xi_K^{t+1} = x_K \mid \xi^0 = x^0, \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = a\} \\
&= \Pr\{\xi_K^{t+1} = x_K \mid \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = a\} \\
&= \prod_{j \in K} \Pr\{\xi_j^{t+1} = x_j \mid \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = a\} \\
&= \prod_{j \in K} \Pr\{\xi_j^{t+1} = x_j \mid \xi_{\widetilde{N}(j)}^t = y_{\widetilde{N}(j)}, \Delta_j^t(\xi_{\widetilde{N}(j)}^0, \dots, \xi_{\widetilde{N}(j)}^t) = a_j\}
\end{aligned}$$

$= \prod_{j\in K} Q_j(x_j \mid y_{\widetilde{N}(j)}, a_j) = Q_K(x_K \mid y, a), \quad K \subseteq V, y \in X, a \in A(y),$

де $Q_j(x_j \mid y_{\widetilde{N}(j)}, a_j)$ *є локально визначеними ядрами переходів, що визначають інваріантні в часі закони руху системи. У випадку* $K = V$*:*

$$Q(x \mid y, a) = \Pr\{\xi^{t+1} = x \mid \xi^t = y, \Delta^t = a\}.$$

Очевидно, що $\sum_{x\in X} Q(x \mid y, a) = 1, y \in X, a \in A$.

2.3 Оптимальна стратегія

Визначимо критерій оцінки стратегії, як середні очікувані витрати на одиницю часу. Ми розглядаємо функції витрат, які є стаціонарними в часі, і тільки детерміновані стратегії Δ. Тому, якщо в момент часу $t \in \mathbb{N}$ система знаходиться в стані $\xi^t = x^t$ і приймається рішення про дію $\alpha^t = a^t$, то система несе (однокрокові) витрати $r(x^t, a^t) \geq 0$. Ми розглядаємо мінімаксний критерій витрат. Середні очікувані витрати до часу T, коли ξ починається з $\xi^0 = x^0$ і застосовується стратегія Δ, становлять

$$\rho(x^0, \Delta) = \limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}^{\Delta}_{x^0} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t) :=$$

$$:= \limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}^{\Delta}_{x^0} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t)),$$

де $\mathbb{E}^{\Delta}_{x^0}$ - математичне сподівання, пов'язане з керованим процесом (ξ, Δ), якщо $\xi^0 = x^0$.

Завдання полягає в тому, щоб знайти стратегію Δ, яка мінімізує асимптотичні середні очікувані витрати.

Означення 2.18 (Оптимальна стратегія)**.** *Стратегія* $\Delta^* \in \mathcal{LS}_P$ *називається оптимальною в межах класу* $\mathcal{LS}_P$ *допустимих детермінованих (чистих) локальних стратегій, якщо*

$$\rho(x^0, \Delta^*) = \inf_{\Delta \in \mathcal{LS}_\mathcal{P}} \rho(x^0, \Delta) \quad \textit{для всіх} \quad x^0 \in X.$$

Теорема 2.1 (Існування оптимальної стратегії)**.** *Розглянемо керований процес* (ξ, Δ) *з локально взаємодіючими синхронними компонентами відносно до графа взаємодії* $\Gamma = (V, B)$ *згідно (2.16) з кінцевим простором станів* X *для* ξ *і кінцевим простором керувань* A*. Нехай множини допустимих дій* $A_t(\cdot)$ *не залежать від* t*. Тоді в класі* $\mathcal{LS}_P$ *допустимих детермінованих локальних стратегій існує оптимальна стратегія (2.18) яка належить до класу* $\mathcal{LS}_P$ *стаціонарних марковських детермінованих політик.*

3 Керований стохастичний клітинний автомат

3.1 Стохастичний клітинний автомат

Задамо впорядковану послідовність синхронізованих кінцевих автоматів. Час є дискретним $t \in \mathbb{N}$. Основним скінченним неорієнтованим графом є $\Gamma = (V, B)$, де $V = \{1, 2, 3, \dots S\}$ - це множина клітинних автоматів. В свою чергу околом вузла $i \in V$ будемо називати $N(i) = \{j \in V \setminus \{i\} : (i, j) \in B\}$. Повним околом $\widetilde{N}(i) = N(i) \cup \{i\}$.

Можливі стани автомата $i \in X_i, |X_i| < \infty$, набір вихідних сигналів (він же й керування) $I_i, |I_i| < \infty$, а вихідних сигналів $O_i, |O_i| < \infty$.

Вихідний процес позначимо як $a_i^t \in I_i, i \in V$. Він не залежить від історії системи, а також від вхідних процесів інших автоматів.

Процес станів системи автоматів визначається наступним чином:

$$\xi = \left(\left(\xi_i^t : i \in V\right) : t \in \mathbb{N}\right),$$

а вихідний процес:

$$\gamma = \left(\left(\gamma_i^t : i \in V\right) : t \in \mathbb{N}\right).$$

Якщо в момент часу t автомат i знаходиться в стані $\xi_i^t = x_i \in X_i$, і в той самий момент часу отримується сигнал керування $\alpha_i^t = y_i \in I_i$ в вершині i, то в час $t + 1$ внутрішній стан автомата стає i є $\xi_i^{t+1} = \tilde{x}_i$, а виходить сигнал $\gamma_i^{t+1} = o_i \in O_i$, з ймовірністю

$$Q_i \left(x_i : i \in \widetilde{N}(i), y_i; \widetilde{x}_i, o_i \right) =$$

$$= \Pr \left(\xi_i^{t+1} = \widetilde{x}_i, \gamma_i^{t+1} = o_i \mid \alpha_i^t = y_i, \xi_i^t = x_i, i \in \widetilde{N}(i) \right),$$

де

$$Q_i : (\times_{i \in \widetilde{N}(i)} X_i \times I_i) \times (X_i \times O_i) \to [0, 1], \quad j \in \{2, \ldots, S-1\}$$

є функцією щільності підрахунку переходів. Q_1 та Q_S визначаються аналогічно.

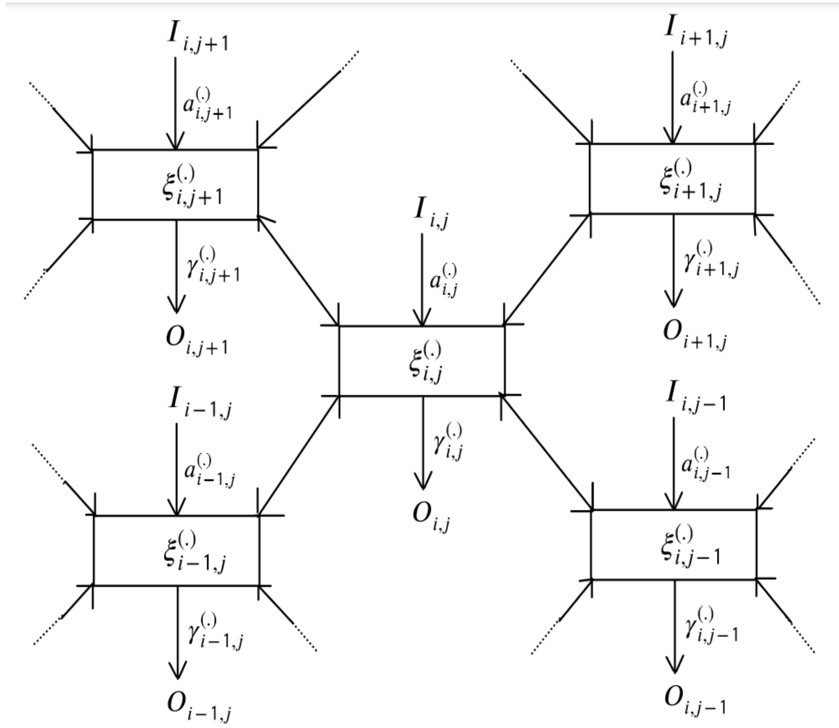
Очевидно, що:

$$\sum_{i=1}^{S} Q_i \left(x_i : i \in \widetilde{N}(i), y_i; \widetilde{x}_i, o_i \right) = 1$$

3.2 Винагороди

Запишемо невідємну функцію оцінювання, що є сукупною функцією однокрокових витрат на керування та функціонування системи, які залежать від вхідного сигналу (керування) a_i^t, стану системи в час t ξ_i^t та вихідного сигналу в наступний момент часу $t+1$ γ_i^{t+1} відповідно для кожного автомата i:

$$r(\xi_i^t, a_i^t, \gamma_i^{t+1}) \geq 0.$$



Приклад системи клітинних автоматів

Тоді сукупну функцію витрат R^t системи визначимо:

$$R^t = \sum_{i=1}^{S} r(\xi_i^t, a_i^t, \gamma_i^{t+1}),$$

а функцію витрат за весь час:

$$R^* = \sum_{t=0}^{t-1} R^T.$$

Задачею оптимального керування є оптимізація керування, тобто процесу a_i^t, так щоб мінімізувати або максимізувати функцію глобальних витрат системи за весь час R^*.

3.3 Стратегія керування

Стратегією керування $\delta = (\delta_i^t, t \in \mathbb{N}, i \in V)$ будемо називати набір вхідних сигналів, які надсилаються клітинному автомату особою, що приймає рішення. Вибір конкретного сигналу ґрунтується на історії повного околу автомату, тобто історії станів власне конкретного автомату та його сусідів, і прийнятих в минулому рішень. Історію станів автомата $i \in V$ в час t позначимо

$$h_i^t = (x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^t), x_i^t \in X_i,$$

а історію прийнятих рішень

$$\delta_i^{t-1} = (a_i^0, a_i^1, \dots, a_i^{t-1}), a_i^k \in I_i.$$

Аналогічно для історії повного околу

$$h_{\widetilde{N}(i)}^t = ((x_j^0 : j \in \widetilde{N}(i)), (x_j^1 : j \in \widetilde{N}(i)), \dots, (x_j^t : j \in \widetilde{N}(i))), x_i^t \in X_i.$$

Тоді, ймовірність отримати вхідний сигнал $a_i^t = y_i \in I_i$:

$$Pr(a_i^t = y_i \mid \xi_j^0 = x_j^0 : j \in \tilde{N}(i), a_i^0 = y_i^0, \xi_j^1 = x_j^1 : j \in \tilde{N}(i), a_i^1 = y_i^1, \dots$$
$$\dots, \xi_j^{t-1} = x_j^{t-1} : j \in \tilde{N}(i), a_i^{t-1} = y_i^{t-1}, \xi_j^t = x_j^t : j \in \tilde{N}(i)) =$$
$$= Pr(a_i^t = y_i^t \mid h_{\tilde{N}(i)}^t, \delta_i^{t-1}).$$

Зауважимо, що

$$\sum_{y_i \in I_i} Pr(a_i^t = y_i^t \mid h_{\tilde{N}(i)}^t, \delta_i^{t-1}) = 1.$$

Така стратегія є рандомізованою (2.8). Звузимо клас цієї стратегії, додавши додаткові умови.

Якщо стратегія δ буде залежати тільки від поточного стану x_i та його околу $x_j : j \in N(i)$, тобто повного околу $x_j : j \in \widetilde{N}(i)$, така стратегія буде марківською:

$$Pr(a_i^t = y_i^t \mid h_{\tilde{N}(i)}^t, \delta_i^{t-1}) = Pr(a_i^t = y_i^t \mid \xi_j^t = x_j : j \in \tilde{N}(i)).$$

Якщо імовірність вибору стратегії δ для конкретного стану автомата $i \in V$ незалежить від часу, то така стратегія буде стаціонарною допустимою:

$$Pr(\cdot \mid \xi_j^{t'} = x_j : j \in \tilde{N}(i)) = Pr(\cdot \mid \xi_j^{t''} = x_j : j \in \tilde{N}(i)), \forall t' \neq t''.$$

Якщо для всіх станів $x_i \in X_i$ автомата $i \in V$ та його околу його сигнал обирається однозначно, тобто ймовірність отримати вхідний сигнал є одноточковою мірою. Такі допустимі стаціонарні стратегії є детермінованими:

$$Pr(\cdot \mid \xi_j^t = x_j : j \in \tilde{N}(i)), \forall x_i \in X_i \text{ — одноточкова міра.}$$

Виокремо два види стратегій - глобальні та локальні.

Глобальними стратегіями будемо вважати такі, що застосовуються до всієї системи загалом. Наприклад, маємо S клітинних автоматів з простором станів X_i, множиною вхідних сигналів I_i для кожного $i \in V$. Кількість станів системи n буде дорівнювати добутку $n = \prod_{i=1}^{S} |X_i|$. Станом системи є сукупність станів всіх автоматів

$\phi_k = \{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_S = x_S\}$, де $k = 1, \ldots, n$; $x_i \in X_i$. Тоді глобальною стратегією буде:

$$\delta = (\delta_k | \phi = \phi_k),\ \delta_k = (y_1, y_2, \ldots, y_S), k = 1, \ldots, n,\ y_i \in I_i.$$

Натомість локальними стратегіями будемо вважати такі, що застосовуються лише до одного, окремого, автомата. Наприклад, для автомата i та його колу $j \in N(i)$, які мають простори станів X_i та X_j відповідно, кількість станів n буде дорівнювати $n = |X_i| \prod_{j \in N(i)} |X_j|$. Множина вхідних сигналів автомата i є I_i. Самі стани позначимо $\phi_k = \{\xi_i = x_i, \xi_j = x_j : j \in N(i)\}$, де $k = 1, \ldots, n$.
Тоді локальною стратегією буде:

$$\delta = (y_k | \phi = \phi_k),\, y_k \in I_i, k = 1, \ldots, n.$$

3.4 Оптимальна стратегія

В силу теореми (2.1) надалі в цій роботі будуть розглядатися виключно допустимі стаціонарні марковські детерміновані стратегії, оскільки ми можемо обмежитись лише ними.

Сформуюємо наступні теореми з [3] та [2] відповідно:

Теорема 3.1 (Існування оптимальної стратегії). *Розглянемо систему синхронних локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів, задану на графі $G(V, B)$ зі скінченним простором станів X_i та скінченним простором керувань I_i, $i \in V$. Нехай множина допустимих керувань системою не залежить від моменту часу t.*

Тоді серед множини усіх допустимих стаціонарних марковських детермінованих стратегій існує оптимальна стратегія δ^*.

Теорема 3.2 (Ергодичність системи автоматів)**.** *Процес еволюції системи синхронних локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів ергодичний і його єдиний граничний та стаціонарний розподіл $\pi^\delta = (\pi^\delta(\phi_k) : k = 1, 2 \ldots, n)$ такий, що:*

$$\pi^\delta(\phi_k) = \pi^\delta(x_1, x_2, \ldots, x_S) = \prod_{i=1}^{S}(\frac{(1 - p(x_i, y_i))}{p(x_i, y_i)})G(\phi_k)^{-1}$$

,де $p(x_i, y_i)$ ймовірність i-го клітинного автомата залишитись в стані x_i, якщо на вхід був поданий сигнал y_i, $G(\phi_k)$ — нормуюча константа, ϕ_n стан системи, n - кількість можливих станів системи.

Введемо механізм покращення стратегії керування [2]:
1) Для обраної стратегії δ і для певної (невідомої) функції $v = (v(\phi_k) : k = 1, ..., n)$ розв'язується система рівнянь:

$$\begin{cases} R^\delta_{\phi_k} + v(\phi_k) = r(\phi_k, \delta_k) + \sum_{p=1}^{n} Q(\phi_p \mid \phi_k, \delta_k) v(\phi_p), k = 1, ..., n \\ \sum_{k=1}^{n} \pi^{\delta_k} v(\phi_k) = 0 \end{cases}$$

2)Для кожного $k = 1, \ldots, n$ визначимо $\mathcal{A}_k$ як множину рішень δ_k, що задовольняє

$$\sum_{i=1}^{n} Q(\phi_i \mid \phi_k, \delta^*_k) R^\delta_{\phi_i} < R^\delta_{\phi_k}$$

або, якщо жодне рішення не задовольняє нерівність, множину, яка задовольняє

$$\sum_{i=1}^{n} Q(\phi_i \mid \phi_k, \delta_k^*) R_{\phi_i}^{\delta} = R_{\phi_k}^{\delta}$$

і при цьому:

$$r(\phi_k, \delta_k^*) + \sum_{p=1}^{n} Q(\phi_p \mid \phi_k, \delta_k^*) v(\phi_p) \leq r(\phi_k, \delta_k) + \sum_{p=1}^{n} Q(\phi_p \mid \phi_k, \delta_k) v(\phi_p) =$$
$$= R^{\delta}(\phi_k) + v^{\delta}(\phi_k).$$

3)Для всіх можливих станів системи ϕ_k, для яких множина $\mathcal{A}_k$ непорожня, змінюємо керування δ_k на $\delta_k^* \in \mathcal{A}_k$, таким чином, формуючи нову стратегію δ^*, повторюємо процедуру покращення. Якщо ж $\forall k = 1, \ldots, n : \mathcal{A}_k = \emptyset$, то стратегія δ є оптимальною.

4 Задача оптимального керування гасінням пожеж

4.1 Постановка задачі

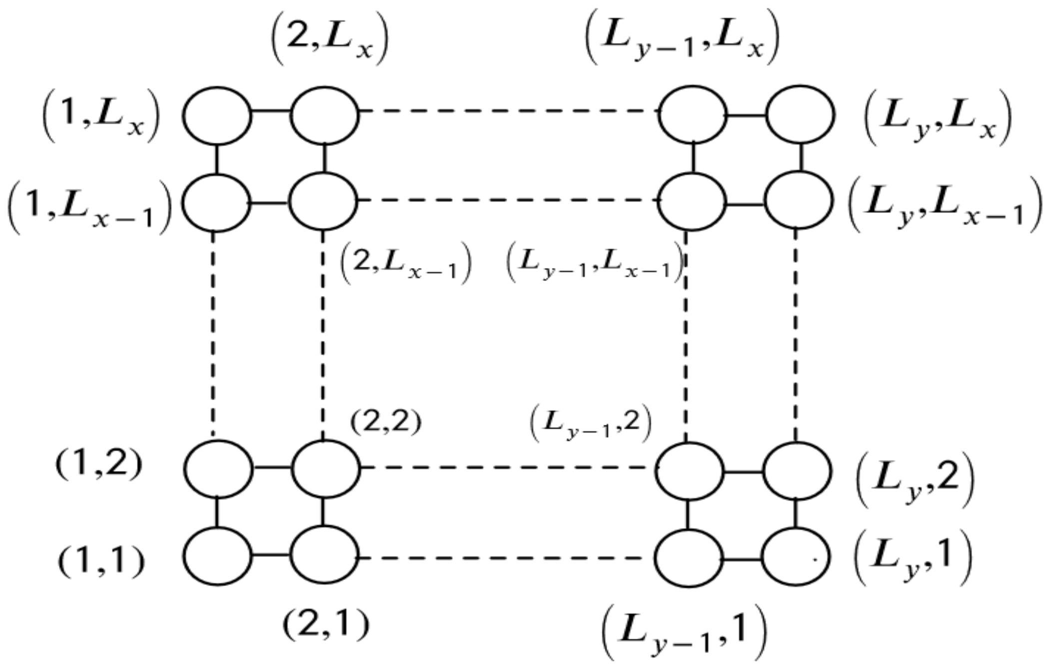
В даній роботі розглядається модель поширення лісових пожеж, аналогічна представленій в статті [4].

Модель лісової пожежі базується на поданні ландшафту у вигляді двовимірної решітки розміром $L_x \times L_y$, де кожна клітина є клітинним автоматом, що має наступні властивості:

- її позиція в решітці є (i, j), де $i = 1, ..., L_x$ — це стовпець, а $j = 1, ..., L_y$ — рядок
- має скінченний набір внутрішніх станів $x_{i,j} \in X_{i,j} = \{A, F, B\}$, де: A (Alive) — жива клітина, яка може зайнятись; F (Fire) — клітина, що горить; B (Burnt) — згоріла клітина;
- межує з сусідніми клітинами (автоматами), які визначаються околом фон Неймана першого порядку, включаючи чотири клітини навколо.

В кожен момент часу t на клітину подається один з двох сигналів $a_{i,j}^t \in I_{i,j} = \{Extinguish, Leave\}$. Вони презентують рішення застосувати протипожежні заходи, наприклад полити вогнегасною речовиною, водою, окопати частину лісу тощо, або залишити все як є.

Еволюція системи відбувається в кілька етапів. Спочатку генерується ліс. Для кожної комірки визначається її початковий стан - Alive.



Двовимірна решітка

Після створення початкової конфігурації лісу, кожна клітина в стані Alive має малу ймовірність p_0 загорітися самостійно, незалежно від наявності палаючих сусідів. Поширення пожежі відбувається таким чином: якщо в момент часу t клітина знаходиться в стані Alive, і серед її сусідів є хоча б одна клітина в стані Fire, то її стан може змінитися на Fire з певною ймовірністю. Цей процес повторюється, поки є клітини, які можуть загорітися.

Кожна клітина в стані Fire може згоріти повністю і перейти в стан Burnt. Це означає, що рослинність повністю вигоріла. Якщо ж здійснюється спроба гасіння пожежі у клітині, яка знаходиться в стані Fire, то її стан може змінитися на Alive.

Клітина, яка згоріла, з часом може відновитися. Якщо в момент часу t серед її сусідів немає палаючих клітин і є хоча б одна клітина в стані Alive, то її стан може змінитися на Alive. Якщо хоча б одна сусідня клітина горить, ця ймовірність дорівнює нулю.

Позначимо ймовірності так:

- p_0 — ймовірність того, що жива комірка загориться самостійно.
- p_F — ймовірність того, що жива комірка загориться через горіння сусідів.
- p_B — ймовірність того, що палаюча комірка згорить.
- p_A — ймовірність того, що згоріла комірка відновиться.

Якість керування будемо оцінювати визначивши невід'ємну функцію однокрокових витрат $r(\xi_{i,j}^t, a_{i,j}^t)$ яка залежить від стану клітини та стратегії гасіння, обраної в той самий час. Витратами будемо вважати вартість гасіння g та умовний збиток від стану частини лісу f.

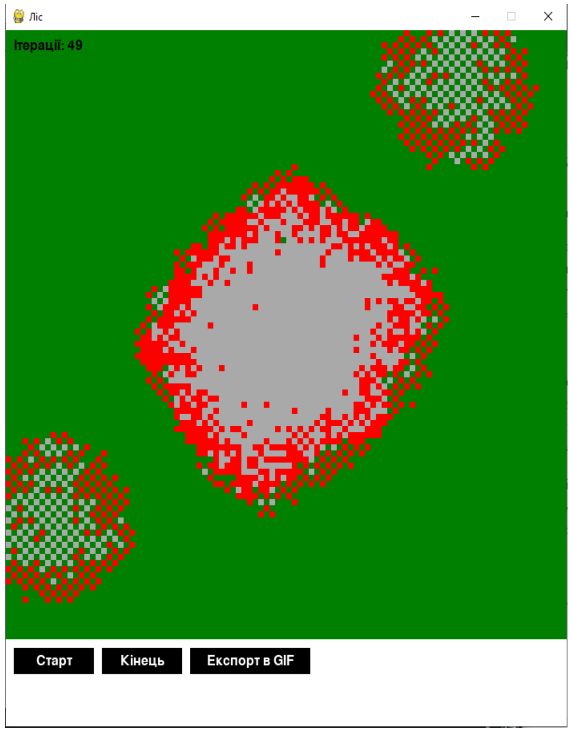
Тоді сукупна функція витрат R^t в час t буде дорівнювати:

$$R^t = \sum_{(i,j)\in S} r(\xi_{i,j}^t, a_{i,j}^t) = \sum_{(i,j)\in S} (f(\xi_{i,j}^t) + g(a_{i,j}^t)),$$

а, відповідно, функція витрат за весь час:

$$R^* = \sum_{t=0}^{t-1} R^t.$$

Задачею оптимального керування є мінімізація глобальної функції витрат R* за допомогою вибору оптимальної стратегії δ.



Інтерфейс програми

4.2 Програмна реалізація

Для подальшого аналізу моделі, було створено програмний застосунок на мові програмування Python. Ліс є прямокутником розміром $n \times m$. Кожному зі станів Alive, Fire, Burnt відповідає окремий колір: зелений,червоний та сірий відповідно. Окремо виведений лічильник ітерацій. Нижче розташовані кнопки керування: Старт, Кінець, Експорт в GIF. Всі розміри та кольори можна налаштувати окремо.

Щоб симулювати поширення пожежі, необхідно задати ймовірності переходу між станами. Для спрощення розрахунків та моделі, ймовірності будуть однакові для кожного автомату. Індикаторна функція $I(x)$ дорівнює 1 коли $x = Extinguish$, і 0 в інших випадках.

- Якщо клітина знаходиться в стані Alive, то в залежності від наявності поряд палаючих сусідів та вхідного сигналу вона матиме наступні ймовірності переходу:

$$p_{A \to F} \begin{cases} 10^{-6}, \text{якщо поряд нема палаючих сусідів} \\ 0.3 + 0.1 * x_F - 0.2 * I(a_{i,j}),\ x_F \text{ - кількість палаючих сусідів} \end{cases}$$

- Якщо клітина знаходиться в стані Fire:

$$p_{F \to A} \begin{cases} 0.9 - 0.2 * x_F, \text{ якщо } I(a_{i,j}) = 1,\ x_F \text{ - кількість палаючих сусідів} \\ 0, \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

$$p_{F \to B} = 0.1 - 0.04 * x_{F,A},\ x_{F,A} \text{ - кількість палаючих та живих сусідів}$$

- Якщо клітина знаходиться в стані Burnt і поряд нема палаючих клітин:

$$p_{B \to A} = 10^{-4} + 10^{-3} * x_A + 10^{-2} * I(a_{i,j}),\ x_A \text{ - кількість живих сусідів}$$

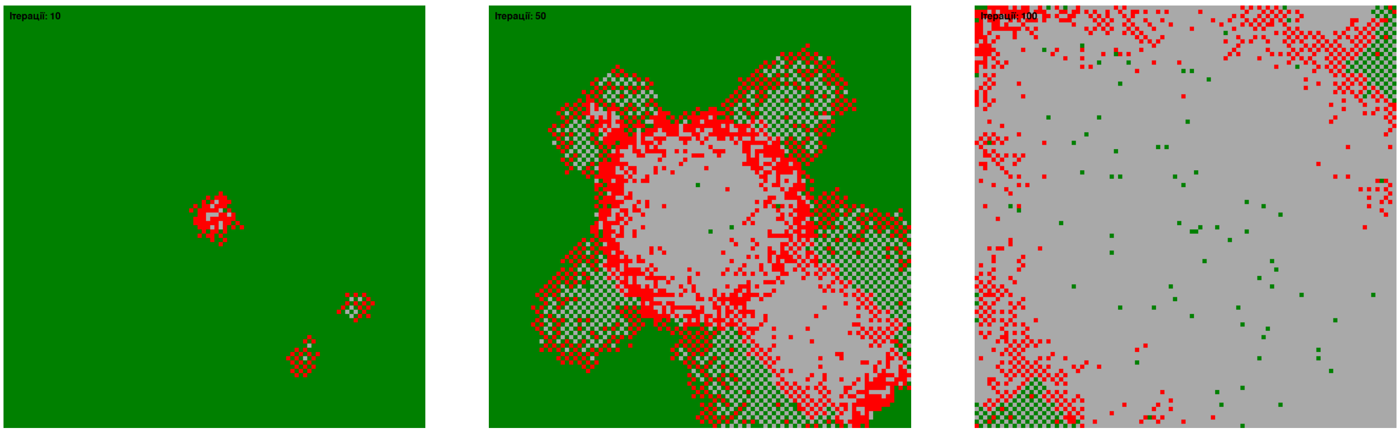
- Ймовірності $p_{A \to B}$, $p_{B \to F}$, а також $p_{B \to A}$, за умови наявності хоч одного палаючого сусіда, нульові.

Витрати за перебування в кожному стані та керування будемо визначати наступним чином:

- $f(A) = 0$, $f(F) = 20$, $f(B) = 50$
- $g(L) = 0$, $g(E) = 25$

Всі ймовірності, за потреби, можна редагувати. Ці значення були визначені есперементально, щоб запобігти занадто швидкому знищенню або відновленню лісу.

4.3 Порівняння різних стратегій



10 ітерацій 50 ітерацій 100 ітерацій

Приклад поширення пожежі без керування

Раніше розглядалось два різні типи стратегій: глобальні, які застосовуються до всієї системи, та локальні, які застосовуються для кожного окремого клітинного автомата. Кожна з них має свої недоліки.

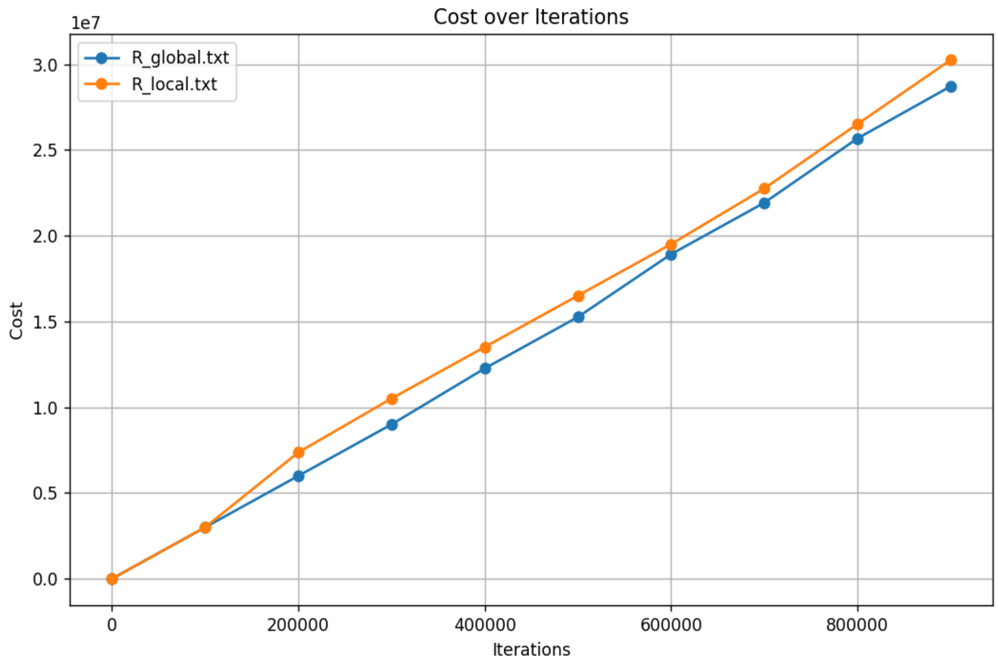
При використанні глобальної стратегії кількість можливих станів системи зростає експоненційно з розміром сітки. Наприклад в нашій задачі кількість станів для лісу 2×2 кількість станів буде дорівнювати 81, при 3×3 - 19 683, при 4×4 вже 43 046 721. Це значно ускладнює процедуру вдосконалення стратегії, оскільки необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь з кількістю невідомих, що залежить від кількості станів системи. Вже для невеликих сіток, наприклад, 3x3, процес вдосконалення може вимагати значних ресурсів і часу, що робить глобальну стратегію непрактичною.

Натомість використання локальних стратегій спрощує обчислення та зменшує час оптимізації для великих сіток. Однак, важливо розуміти, що використання локальних стратегій не завжди призводить до глобальної мінімізації витрат. Тобто, зменшення витрат на локальному рівні не обов'язково означає зменшення глобальних витрат.

Використання локальних стратегій допомагає вирішити першу проблему, але при цьому виникає друга. Щоб визначити, чи варто використовувати локальні стратегії замість глобальних, необхідно оцінити різницю функцій витрат для обох стратегій при великій кількості часових ітерацій. Якщо різниця незначна, можна припустити, що використання локальних стратегій допомагає мінімізувати глобальні витрати.

Припущення перевірятимемо на сітці розміром 3x2. Для цього ми генеруємо дві однакові сітки і запускаємо два процеси з використанням глобальних та локальних стратегій.

Після 1 мільйона ітерацій ми помічаємо близьке розташування графіків для обох стратегій. За результатами фінальної оцінки функцій витрат ми бачимо, що для глобальних стратегій витрати становлять 32 495 905 одиниць, а для локальних - 33 251 005 одиниць. Це відхилення становить $2,27\%$, що можна вважати досить невеликим. Це означає, що використання локальних стратегій не призводить до глобальної мінімізації функції витрат, але дозволяє використовувати



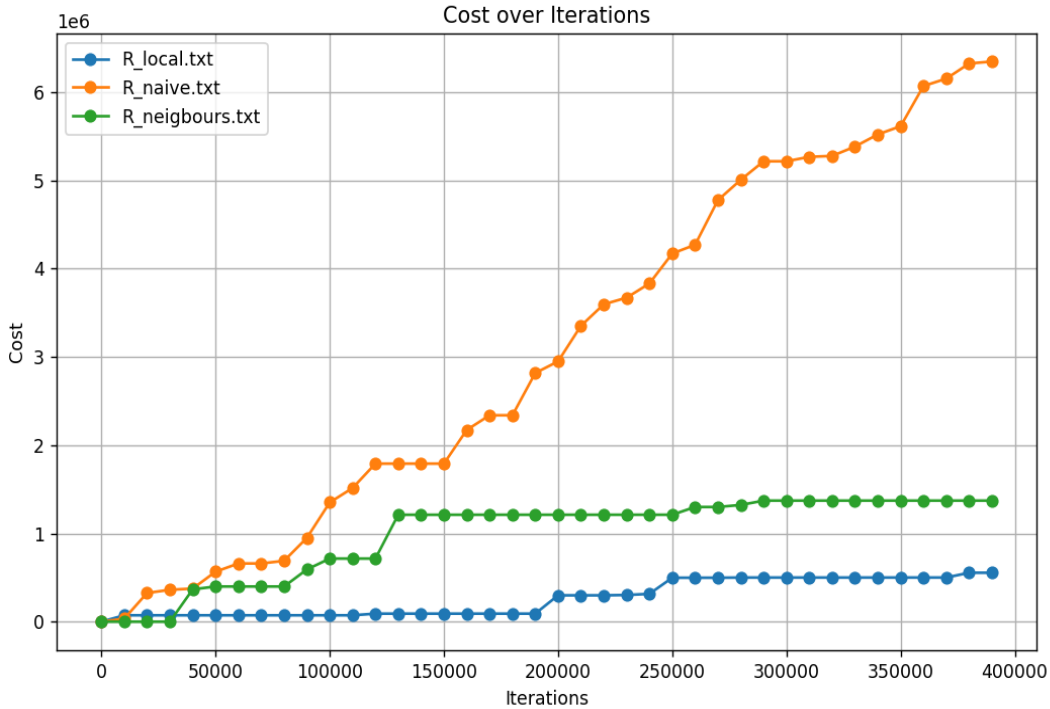
Порівняння глобальних та локальних стратегій

їх для великих сіток лісу з певними втратами ефективності.

Таким чином, використання локальних стратегій є кращим рішенням для даної задачі, оскільки воно дозволяє керувати процесом з урахуванням обмежень та складнощів глобальної стратегії.

Проте, можливо, в контексті цієї конкретної задачі варто просто гасити всі займисті осередки або, як мінімум, гасити всі клітини навколо них. Тому для перевірки оптимальності локальної стратегії порівняємо її з двома іншими.

Перша стратегія передбачає загасіння всіх палаючих клітин у будь-який момент часу. Друга стратегія, натомість, спрямована на запобігання поширенню пожежі, тому ми будемо посилати сигнал гасити на всі суміжні живі клітини, що знаходяться поряд зі палаючою. Розмір сітки візьмемо 10x10 і запустимо симуляцію так



Порівняння стратегій

само на 400 тисяч ітерацій.

5 Висновки

У цій роботі було досліджено можливості застосування локальних стратегій управління для оптимізації поведінки складних систем на прикладі моделі лісових пожеж. Основні результати можуть бути узагальнені наступним чином.

По-перше, створено математичну модель керування гасінням лісових пожеж на основі клітинних автоматів. Модель враховує три можливі стани клітин та ймовірнісні правила переходу між ними залежно від стану сусідів та можливості гасіння пожежі. Це дозволило більш точно змоделювати процес поширення вогню та оцінити ефективність різних стратегій управління.

По-друге, розглянуто задачу оптимального керування системою шляхом мінімізації сукупної функції витрат. Введено функцію однокрокових витрат, яка враховує витрати на гасіння пожежі та умовні збитки від стану лісу.

По-третє, створено програмний застосунок на мові Python для симуляції поширення лісових пожеж та тестування різних стратегій керування. Програма дозволяє візуалізувати процес поширення пожежі та включає інструменти для налаштування параметрів моделі, що є важливим для практичного застосування.

По-четверте, проведено порівняння ефективності глобальних та локальних стратегій управління. Глобальні стратегії, враховуючи стан всієї системи, значно ускладнюють розрахунки для великих систем. Натомість локальні стратегії спрощують обчислення, базуючись на стані окремих клітин та їх найближчих сусідів. Експеримент показав, що локальні стратегії можуть бути ефективними для мінімізації сукупних витрат, особливо в умовах великих систем, де глобальні стратегії стають непрактичними.

Нарешті, досліджено альтернативні стратегії, такі як гасіння всіх палаючих клітин та запобігання поширенню пожежі шляхом гасіння суміжних живих клітин. Проведені симуляції показали, що ці стратегії можуть бути ефективними у певних умовах, але локальні стратегії загалом демонструють кращі результати з точки зору мінімізації витрат.

Загалом, результати цього дослідження демонструють, що локальні стратегії керування є перспективним підходом для оптимізації керування поведінки складних систем. Вони дозволяють ефективно вирішувати задачі управління в умовах обмежених обчислювальних можливостей та високої складності, забезпечуючи при цьому мінімізацію сукупних витрат. Використання локальних стратегій може знайти широке застосування в різних галузях, де необхідно приймати оптимальні рішення на основі локальної інформації, забезпечуючи високу ефективність та надійність систем.

Література

[1] R. K. Chornei, H. Daduna, P. S. Knopov., *Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications*, Boston/Dordrecht/London: Springer, 2006. — 261

[2] Daduna H, *Some results for steady-state and sojourn time distributions In open and closed linear networks of Bernoulli servers with statedependent service and arrival rates. Performance Evaluation*, 1997. Vol. 30. no. 1

[3] Чорней Р.К. *Локальне керування в мережах* Національний університет "Києво-Могилянська академія 2021 - 311 с

[4] Almeida R. M.. Macau E, *Stochastic cellular automata model for wildland fire spread dynamics*, Journal of Physics: Conference Series. — 2011.