

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Києво-Могилянська академія»  
Факультет інформатики  
Кафедра математики

**Кваліфікаційна робота**

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ВІДНОВЛЮЮЧЕ СПЕКТРАЛЬНЕ ЧИСЛО  
ГРАФІВ-ЦИКЛІВ»**

Виконала: студентка 4-го року навчання,

Спеціальності

113 Прикладна математика

Соколова Тетяна Ігорівна

Керівник: Тимошкевич Л. М.,

кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена  
з оцінкою \_\_\_\_\_

Секретар ЕК \_\_\_\_\_  
(підпис)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_р.

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Києво-Могилянська академія»  
Факультет інформатики  
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,  
доцент, кандидат фіз.-мат. наук

\_\_\_\_\_ Чорней Р.К.  
(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2024

## ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу  
студентці 4-го курсу факультету інформатики  
Соколовій Тетяні Ігорівні

**Тема:** «Відновлююче спектральне число графів-циклів»

**Зміст кваліфікаційної роботи:**

Анотація

1. Вступ

2. Огляд основних означень та тверджень, що пов'язані зі  
спектральною теорією графів

3. Розв'язання обернених спектральних задач для графів-циклів  
 $C_n$ , де  $5 \leq n \leq 9$

4. Побудова алгоритму відновлення ваг зваженого графа-циклу  
 $C_n$  для  $n \geq 5$

Висновки

Список літератури

Дата видачі “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2024 Керівник \_\_\_\_\_  
(підпис)

Завдання отримав \_\_\_\_\_  
(підпис)

## Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	17.10.2024			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	25.10.2024			
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.11.2024			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	17.01.2025			
5.	Дослідження задач спектральної теорії зважених графів.	15.02.2025			
6.	Робота над текстовим оформленням отриманих результатів.	18.04.2025			
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	04.05.2025			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	23.05.2025			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	05.06.2025			

Науковий керівник \_\_\_\_\_  
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи \_\_\_\_\_  
(ПІБ)

# Зміст

Анотація	4
<b>1 Вступ</b>	<b>5</b>
1.1 Актуальність . . . . .	5
1.2 Мета і завдання дослідження . . . . .	5
<b>2 Основні означення та попередні результати</b>	<b>7</b>
2.1 Основні означення з теорії графів . . . . .	7
2.2 Означення із спектральної теорії графів . . . . .	11
2.3 Знаходження характеристичного многочлена та визначника матриці суміжності . . . . .	12
2.4 Формули Швенка для зважених графів . . . . .	15
2.5 Висновки до розділу 2 . . . . .	17
<b>3 Обернені спектральні задачі на зважених графіах</b>	<b>18</b>
3.1 Відновлююче спектральне число $Srn(G)$ . . . . .	18
3.2 Задача відновлення ваг для графа-циклу $C_n$ . . . . .	19
3.2.1 Відновлення ваг графа-циклу $C_5$ . . . . .	26
3.2.2 Відновлення ваг графа-циклу $C_6$ . . . . .	27
3.2.3 Відновлення ваг графа-циклу $C_7$ . . . . .	28
3.2.4 Відновлення ваг графа-циклу $C_8$ . . . . .	30
3.2.5 Відновлення ваг графа-циклу $C_9$ . . . . .	33
3.3 Висновки до розділу 3 . . . . .	39
<b>4 Алгоритм відновлення ваг графа-циклу <math>C_n</math></b>	<b>40</b>
4.1 Побудова алгоритму відновлення ваг графа-циклу . . . . .	40
4.2 Застосування алгоритму до графа-циклу $C_6$ . . . . .	43
4.3 Висновки до розділу 4 . . . . .	46
<b>Висновки</b>	<b>47</b>
<b>Список літератури</b>	<b>48</b>

## Анотація

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню обернених спектральних задач для зважених графів-циклів. Розглядаються задачі відновлення ваг на множині ребер графа за спектрами його зв'язних індукованих підграфів.

У роботі були отримані точні значення відновлюючого спектрального числа циклів з кількістю вершин від п'яти до дев'яти включно. Було показано, що використання лише двох підспектрів є недостатнім для однозначного відновлення вагової функції таких графів. Як наслідок, доведено, що відновлююче спектральне число графів циклів  $C_n$ , де  $5 \leq n \leq 9$ , дорівнює трьом.

Крім того, детально описано алгоритм відновлення вагової функції зваженого графа-циклу  $C_n$  при  $n \geq 5$  на основі спектрів трьох підграфів-ланцюгів та продемонстровано роботу алгоритму на конкретному прикладі.

**Ключові слова:** спектр графа, власні числа, обернені спектральні задачі, відновлююче спектральне число, зважений граф, граф-цикл.

# 1 Вступ

## 1.1 Актуальність

Спектральна теорія графів є сучасним напрямом математики, що досліджує взаємозв'язок між спектральними характеристиками графів та їхніми структурними властивостями. Ця галузь активно розвивається завдяки широким можливостям практичного застосування в різних науках, зокрема хімії, фізиці, біології, економіці та соціальних науках (див. [1]), а також у технологічних сферах, таких як комп'ютерні науки та машинне навчання (див. [2]).

Важливою складовою спектральної теорії графів є розв'язання різноманітних задач відновлення графів: визначення структури графа, його характеристик на основі спектральних даних. З оглядом обернених спектральних задач можна ознайомитися за роботою [3].

Дослідження присвячено оберненій спектральній задачі для зважених графів, тобто графів, на ребрах яких задано додатну функцію. У роботах [4], [5] було вперше введено поняття відновлюючого спектрального числа  $Srn(G)$  — мінімальної кількості спектрів індукованих підграфів, необхідних для однозначного відновлення ваг ребер графа, — а також отримано точні значення та верхні оцінки цього параметра для деяких класів графів. Зокрема, встановлено, що  $Srn(A_n) = 2$  для графів-ланцюгів  $A_n$  при  $n \geq 3$  та  $Srn(K_{1,n}) = n$  для графів-зірок. Для графів-циклів  $C_n$  при  $n \geq 5$  було отримано оцінку  $Srn(C_n) \leq 3$ . У подальшому, у роботі [6] доведено, що  $Srn(C_3) = 3$  та  $Srn(C_4) = 4$ .

Однак точні значення відновлюючого спектрального числа для циклів  $C_n$  при  $n \geq 5$  досі не були встановлені. Таким чином, ця робота робить вагомий внесок у дослідження відновлюючого спектрального числа графів-циклів, уточнюючи значення цього спектрального параметра для  $5 \leq n \leq 9$ .

## 1.2 Мета і завдання дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є знаходження точних значень відновлюючого спектрального числа  $Srn(C_n)$  для графів-циклів  $C_n$  при  $5 \leq n \leq 9$ . Задача є складною через нелінійний характер залежності спектральних даних від ваг

ребер та високу чутливість до змін у структурі графа.

*Об'єктом* дослідження є спектральні властивості зважених графів-циклів. *Предметом* дослідження є відновлююче спектральне число зважених графів-циклів.

Досягнення поставленої мети вимагає розв'язання таких задач:

1. Розглянути основні означення та теоретичні відомості з теорії графів та зі спектральної теорії зважених графів.
2. Розглянути приклади застосування теореми Харарі, а також узагальнень теорем Захса та Швенка для знаходження характеристичних многочленів зважених графів.
3. Визначити точне значення відновлюючого спектрального числа графів-циклів  $C_n$  для  $5 \leq n \leq 9$ .
4. Описати алгоритм відновлення вагової функції зваженого графа-циклу  $C_n$  при  $n \geq 5$  за спектрами трьох заданих підграфів-ланцюгів і продемонструвати застосування цього алгоритму на частковому прикладі.

Основні результати дослідження кваліфікаційної роботи опубліковані у тезах доповіді «Відновлююче спектральне число графа-циклу  $C_n$ » на XIII Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків [7].

## 2 Основні означення та попередні результати

### 2.1 Основні означення з теорії графів

Розглянемо ключові означення з теорії графів, подані відповідно до [8], що є необхідними для розуміння основних термінів та тверджень зі спектральної теорії графів.

**Означення 2.1.** *Графом (простим неорієнтованим графом)  $G$  називають впорядковану пару множин  $(V, E)$ , де  $V$  — непорожня скінченна множина, а  $E$  — довільна підмножина множини всіх неупорядкованих пар різних елементів множини  $V$ . Граф  $G$  позначають  $G = (V, E)$ .*

Елементи множини  $V$  називають *вершинами* графа  $G$ , а елементи множини  $E$  — його *ребрами*. Відповідно  $V$  називають *множиною вершин*, а  $E$  — *множиною ребер* графа  $G$ .

Якщо необхідно уточнити, про вершини та ребра якого графа йде мова, будемо використовувати позначення  $V(G)$  та  $E(G)$  для множини вершин та множини ребер графа  $G$  відповідно.

Традиційно ребра графа записують за допомогою круглих дужок  $(v, w)$  (або просто  $vw$ ).

**Означення 2.2.** Якщо  $e = (v, w)$  — ребро графа, то вершини  $v$  і  $w$  називають *кінцями* ребра  $e$ . У цьому разі кажуть, що ребро  $e$  *з'єднує* вершини  $v$  і  $w$ .

**Приклад 2.3.** Як приклад розглянемо граф  $G$ , зображений на рисунку 1.  $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$  є множиною вершин графа  $G$ . Множина ребер графа  $E(G) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$  складається із пар вершин, які є кінцями ребер графа  $G$ .

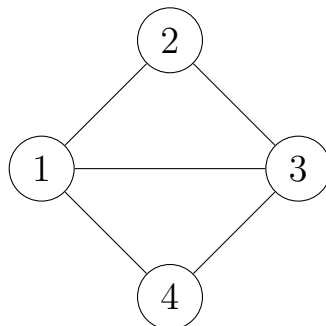


Рис. 1: Граф  $G$ .

**Означення 2.4.** Якщо  $(v, w) \in E$ , то вершини  $v$  і  $w$  графа  $G = (V, E)$  називаються *суміжними* (позначатимемо  $v \sim w$ ), інакше вершини  $v$  і  $w$  *несуміжні*. Два ребра називають *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину.

**Означення 2.5.** Вершину  $v$  і ребро  $e$  графа  $G = (V, E)$  називають *інцидентними*, якщо вершина  $v$  є кінцем ребра  $e$ , тобто  $e = (v, w)$  для деякої вершини  $w \in V$ .

**Означення 2.6.** *Степенем*  $\deg v$  вершини  $v$  називають кількість інцидентних їй ребер. Вершину степеня 0 називають *ізолюваною*, а вершину степеня 1 — *кінцевою* (або *висячою*).

**Приклад 2.7.** Знайдемо суміжні вершини, інцидентні ребра та степінь для вершини 1 графа  $G$  (див. рисунок 1). Вершини 1 і 2, 1 і 3, 1 і 4 з'єднані ребрами, тому вони є суміжними. Таким чином, ребра  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  та  $(1, 4)$  інцидентні вершині 1. Степінь вершини 1 дорівнює 3, оскільки три ребра інцидентні цій вершині.

**Означення 2.8.** Граф  $G_1 = (V_1, E_1)$  називають *підграфом* графа  $G = (V, E)$ , якщо  $V_1 \subseteq V$  та  $E_1 \subseteq E$ .

**Означення 2.9.** *Індукованим підграфом* графа  $G$  називається підграф, утворений підмножиною вершин графа  $G$  разом з усіма ребрами  $G$ , які з'єднують ці вершини.

Згідно з [9], введемо операції об'єднання, перетину та доповнення графів.

**Означення 2.10.** *Об'єднанням* графів  $G_1 = (V_1, E_1)$  і  $G_2 = (V_2, E_2)$  називають граф  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , який позначають  $G = G_1 \cup G_2$ .

**Означення 2.11.** *Перетином* графів  $G_1 = (V_1, E_1)$  і  $G_2 = (V_2, E_2)$  називають граф  $G' = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ , який позначають  $G' = G_1 \cap G_2$ .

**Означення 2.12.** Граф  $\bar{G} = (V, E')$  називається *доповненням* графа  $G = (V, E)$ , якщо ребро  $(v, w) \in E'$  тоді й тільки тоді, коли  $(v, w) \notin E$ .

**Означення 2.13.** Нехай  $G' = (V', E')$  є підграфом графа  $G = (V, E)$ . Підграф  $G'' = (V, E \setminus E')$  називається *доповненням графа  $G'$  в графі  $G$* .

Окрім згаданих бінарних операцій, важливі класи підграфів можна отримати, видаливши з графу вершини або ребра.

**Означення 2.14.** *Операція видалення вершини  $v$*  із графа  $G = (V(G), E(G))$  полягає у видаленні з множини вершин  $V(G)$  елемента  $v$ , а з множини ребер  $E(G)$  — усіх ребер, які інцидентні  $v$ . Отриманий у результаті видалення вершини  $v$  граф позначатимемо  $G - v$  (або  $G - \{v\}$ ), де  $V(G - v) = V(G) \setminus \{v\}$  та  $E(G - v) = E(G) \setminus \{e \in E(G) \mid e \text{ інцидентне } v\}$ .

**Означення 2.15.** *Операція видалення ребра  $e$*  з графа  $G = (V(G), E(G))$  полягає у видаленні елемента  $e$  з множини  $E(G)$ , при цьому множина вершин графа  $G$  не змінюється. Отриманий у результаті видалення ребра  $e$  граф позначатимемо  $G - e$ , де  $V(G - e) = V(G)$  та  $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$ .

*Зауваження.* Видалення довільної множини вершин або ребер з графа  $G$  визначається як послідовне видалення всіх елементів цієї множини.

Далі введемо основні поняття, що стосуються маршрутів у графах, зокрема шляхи, ланцюги, цикли та зв'язність, відповідно до [8].

**Означення 2.16.** *Маршрутом* (або *шляхом*) у графі  $G = (V, E)$  називають послідовність

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1} \quad (1)$$

вершин  $v_i$  і ребер  $e_i$  таку, що кожен два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, тобто  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Вершину  $v_1$  називають *початком*, а вершину  $v_{k+1}$  — *кінцем* шляху. Усі інші вершини цього шляху називають *проміжними*, або *внутрішніми*.

Найчастіше маршрут записують лише як послідовність вершин, що входять до його складу, тобто замість послідовності (1) пишуть  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ .

**Означення 2.17.** Кількість  $k$  ребер у шляху (1) називають його *довжиною*.

**Означення 2.18.** Маршрут, у якому всі ребра попарно різні, називають *ланцюгом*, а той маршрут, у якому всі вершини попарно різні, — *простим ланцюгом*. Простий ланцюг з  $n$  вершинами позначимо через  $A_n$ .

**Означення 2.19.** Маршрут (1) називають *замкненим*, якщо  $v_1 = v_{k+1}$ .

**Означення 2.20.** Замкнений ланцюг називають *циклом*. Замкнений маршрут (1) називають *простим циклом*, якщо всі його  $k$  вершин різні та  $k \geq 3$ . Простий цикл довжиною  $n$  позначимо через  $C_n$ .

**Означення 2.21.** Граф називається *зв'язним*, якщо між будь-якою парою його вершин існує деякий шлях.

**Означення 2.22.** *Компонентою зв'язності* графа  $G$  називають підграф  $H \subseteq G$ , для якого виконуються такі умови:

- (1)  $H$  є зв'язним графом.
- (2) Не існує такого підграфа  $H' \neq H$ , що  $H \subsetneq H' \subseteq G$  і  $H'$  є зв'язним.

**Означення 2.23.** Ребро, видалення якого з графа збільшує кількість компонент зв'язності, називають *мостом*.

Наступні означення, подані відповідно до [5], стосуються зважених графів — структур, у яких кожному ребру приписано певну числову вагу, що є важливою характеристикою в багатьох прикладних задачах теорії графів.

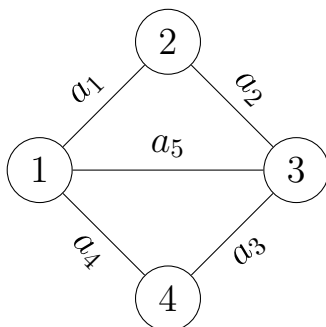
**Означення 2.24.** *Зваженим графом*  $\mathbf{G}$  називають впорядковану пару  $(G, w)$ , де  $G$  — це граф, а  $w : E \rightarrow (0, +\infty)$  — *вагова функція*, яка ставить у відповідність кожному ребру  $e$  додатне число  $w(e)$ , яке позначатимемо  $w_e$  та називатимемо *вагою* ребра  $e$ .

Зважений граф  $\mathbf{G}$  зручно зображати за допомогою діаграми графа  $G$ , приписуючи біля кожного ребра  $e$  його вагу  $w_e$ .

Надалі часто будемо опускає слово “зважений”, якщо з контексту зрозуміло, що мова йде саме про зважений граф.

**Означення 2.25.** Зважений граф  $\mathbf{G}_1 = (G_1, w_1)$  називається *індукованим підграфом* зваженого графа  $\mathbf{G} = (G, w)$ , якщо  $G_1$  — індукований підграф  $G$ , і для довільного ребра  $e$  графа  $G_1$  виконується рівність  $w_1(e) = w(e)$ .

**Приклад 2.26.** На рисунку 2 зображений приклад зваженого графа. Граф  $\mathbf{G}$  має 4 вершини та 5 ребер, що мають ваги  $w_{12} = a_1$ ,  $w_{23} = a_2$ ,  $w_{34} = a_3$ ,  $w_{14} = a_4$  та  $w_{13} = a_5$ .

Рис. 2: Зважений граф  $\mathbf{G}$ .

## 2.2 Означення із спектральної теорії графів

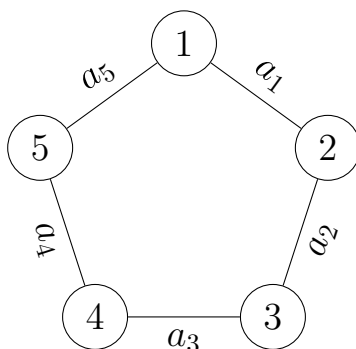
Для подальшого розгляду спектральних властивостей зважених графів наведемо ключові означення спектральної теорії графів згідно з [10].

Для кожного графа з  $n$  вершинами можемо ототожнити множину вершин графа з множиною натуральних чисел від 1 до  $n$ .

**Означення 2.27.** З кожним графом  $\mathbf{G} = (G, w)$  та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до  $n$ , де  $n = |V(G)|$  — кількість вершин графа, пов'язують *матрицю суміжності*  $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ , де елемент  $a_{ij}$   $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця дорівнює  $w_{ij}$ , якщо вершини з номерами  $i$  та  $j$  є суміжними, або дорівнює 0 для несуміжних вершин.

*Зауваження.* Для неорієнтованого зваженого графа  $\mathbf{G} = (G, w)$  отримаємо  $a_{ij} = a_{ji}$  для всіх  $i, j = 1, \dots, n$ , тобто матриця суміжності  $A(\mathbf{G})$  є симетричною. Також вона має нулі на головній діагоналі, бо простий граф не має петель (ребер, у яких початок та кінець збігаються).

**Приклад 2.28.** Розглянемо зважений граф-цикл  $\mathbf{C}_5$  (див. рисунок 3).

Рис. 3: Зважений граф-цикл  $\mathbf{C}_5$ .

Запишемо матрицю суміжності зваженого графа  $\mathbf{C}_5$  :

$$A(\mathbf{C}_5) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & a_5 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Означення 2.29.** *Спектром графа  $\mathbf{G}$*  називають мультимножину власних значень його матриці суміжності  $A(\mathbf{G})$ . Позначають  $\sigma(\mathbf{G})$ .

*Зауваження.* Оскільки матриця суміжності  $A(\mathbf{G})$  симетрична, то спектр графа містить лише дійсні числа. Також зауважимо, що спектр зваженого графа не залежить від способу нумерації його вершин та є інваріантом графа.

**Означення 2.30.** *Підспектром графа* називають спектр його індукованого підграфа.

**Означення 2.31.** Позначимо власні числа матриці суміжності  $A(\mathbf{G})$  через  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  і розташуємо їх у незростаючому порядку:

$$\lambda_G = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Найбільше власне значення  $\lambda_G$  називають *індексом графа  $\mathbf{G}$* .

Для *характеристичного многочлена* матриці суміжності зваженого графа  $\mathbf{G}$  будемо використовувати таке позначення:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\mathbf{G})).$$

## 2.3 Знаходження характеристичного многочлена та визначника матриці суміжності

Для того, щоб сформулювати теореми Харарі та Захса, введемо означення лінійного та каркасного підграфів та ваги лінійного графа відповідно до [11].

**Означення 2.32.** *Лінійним підграфом* графа  $G$  називається підграф  $G$ , компонентами зв'язності якого є тільки пари суміжних вершин (з ребром, що їх з'єднує) та прості цикли. Позначимо його через  $H_l^k$ , де  $k$  — кількість вершин цього підграфа, а  $l$  — порядковий номер.

**Означення 2.33.** Каркасным підграфом графа  $G$  називається його лінійний підграф, що містить усі вершини вихідного графа  $G$ .

**Означення 2.34.** Вагою лінійного підграфа  $H_i^k$  графа  $G$  називають добуток ваг усіх його компонент зв'язності. Якщо компонента зв'язності є ребром  $(i, j)$ , то її вага дорівнює  $w_{ij}^2$ , а якщо циклом, то вага дорівнює добутку ваг  $w_{ij}$  за всіма ребрами  $(i, j)$  цього циклу.

Введемо позначення, які будемо використовувати у формулюваннях теорем Харарі та Захса:

- $p(H_i^k)$  — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа  $H_i^k$ , що мають парну кількість вершин;
- $r(H_i^k)$  — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа  $H_i^k$ ;
- $c(H_i^k)$  — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа  $H_i^k$ , що є простими циклами;
- $w(H_i^k)$  — вага лінійного підграфа  $H_i^k$ .

**Теорема 2.35. (Харарі [11])**

Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа  $\mathbf{G} = (G, w)$  із  $n$  вершинами можна порахувати за такою формулою:

$$\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_i^n\}} (-1)^{p(H_i^n)} 2^{c(H_i^n)} w(H_i^n), \quad (2)$$

де сума обчислюється по всіх каркасних підграфах  $H_i^n$  графа  $\mathbf{G}$ .

**Теорема 2.36. (Узагальнення теореми Захса [5])**

Якщо  $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$  — характеристичний многочлен зваженого графа  $\mathbf{G} = (G, w)$ , то його коефіцієнти обчислюються за формулами:

$$(1) c_1 = 0;$$

$$(2) c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2;$$

$$(3) c_k = \sum_{\{H_i^k\}} (-1)^{r(H_i^k)} 2^{c(H_i^k)} w(H_i^k) \text{ для } k = 1, \dots, n,$$

де сума обчислюється по всіх лінійних підграфах  $H_i^k$  графа  $G$ .

**Приклад 2.37.** Для зваженого графа-циклу  $\mathbf{C}_5$  на рисунку 3, використовуючи теорему Харарі 2.35, знайдемо  $\det(A(\mathbf{C}_5))$  та за допомогою теореми Захса 2.36 знайдемо коефіцієнти характеристичного многочлена  $P_{\mathbf{C}_5}(\lambda)$ .

Граф  $C_5$  не має каркасних підграфів, які містять ребра графа як компоненти зв'язності, оскільки він має непарну кількість вершин. Таким чином, вихідний граф  $C_5$  (див. рисунок 3) — єдиний каркасний підграф  $C_5$ .

$p(C_5) = 0$ ,  $c(C_5) = 1$  та  $w(C_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ . За формулою (2):

$$\det(A(\mathbf{C}_5)) = (-1)^{p(C_5)} 2^{c(C_5)} w(C_5) = (-1)^0 \cdot 2^1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

Запишемо характеристичний многочлен графа  $C_5$  у вигляді:

$$P_{\mathbf{C}_5}(\lambda) = \lambda^5 + c_1 \lambda^4 + c_2 \lambda^3 + c_3 \lambda^2 + c_4 \lambda + c_5.$$

За теоремою Захса 2.36:

$$c_1 = 0;$$

$$c_2 = - \sum_{e \in E(C_5)} w(e)^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2).$$

Зауважимо, що для довільної матриці  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  вільний коефіцієнт характеристичного многочлена дорівнює  $(-1)^n \det(A)$ . Звідси маємо:

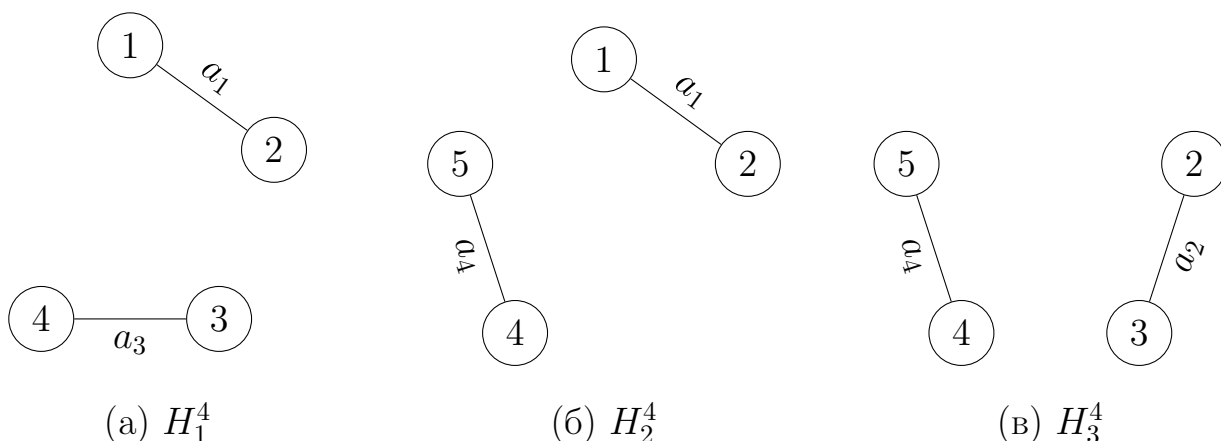
$$c_5 = (-1)^5 \det(A(\mathbf{C}_5)) = -2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

Коефіцієнти  $c_3$  та  $c_4$  знайдемо за формулою:

$$c_k = \sum_{\{H_l^k\}} (-1)^{r(H_l^k)} 2^{c(H_l^k)} w(H_l^k), \quad k = 3, 4.$$

$C_5$  не має лінійних підграфів з трьома вершинами, оскільки єдині лінійні підграфи на трьох вершинах це цикли  $C_3$ . Таким чином,  $c_3 = 0$ .

Розглянемо всі лінійні підграфи з чотирма вершинами (див. рисунок 4).



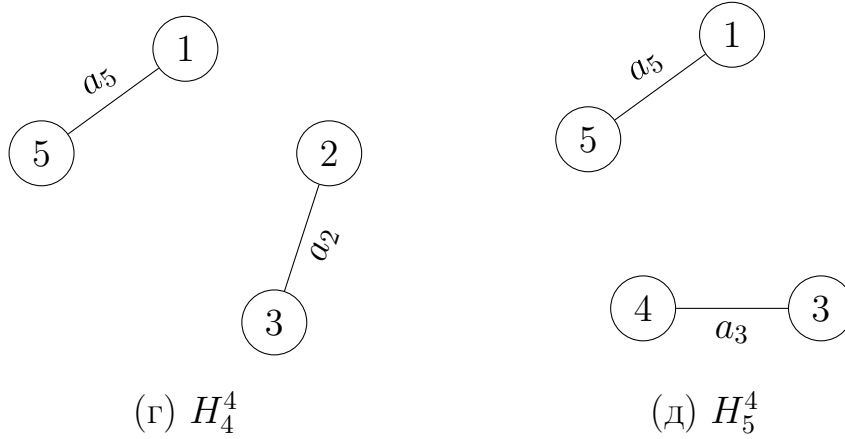


Рис. 4: Лінійні підграфи на чотирьох вершинах графа  $C_5$ .

Оскільки структури графів однакові (вони є ізоморфними), маємо:

$$\begin{aligned} r(H_1^4) &= r(H_2^4) = r(H_3^4) = r(H_4^4) = r(H_5^4) = 2, \\ c(H_1^4) &= c(H_2^4) = c(H_3^4) = c(H_4^4) = c(H_5^4) = 0. \end{aligned}$$

Обчислимо коефіцієнт  $c_4$ :

$$\begin{aligned} c_4 &= (-1)^2 \cdot 2^0 \cdot (w(H_1^4) + w(H_2^4) + w(H_3^4) + w(H_4^4) + w(H_5^4)) = \\ &= a_1^2 a_3^2 + a_1^2 a_4^2 + a_2^2 a_4^2 + a_2^2 a_5^2 + a_3^2 a_5^2. \end{aligned}$$

Отримаємо характеристичний многочлен циклу  $C_5$ :

$$\begin{aligned} P_{C_5}(\lambda) &= \lambda^5 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda^3 + \\ &+ (a_1^2 a_3^2 + a_1^2 a_4^2 + a_2^2 a_4^2 + a_2^2 a_5^2 + a_3^2 a_5^2)\lambda - 2a_1 a_2 a_3 a_4 a_5. \end{aligned}$$

## 2.4 Формули Швенка для зважених графів

Сформулюємо узагальнення та наслідки формул Швенка [12], що встановлюють співвідношення між характеристичними многочленами зваженого графа  $\mathbf{G}$  і його підграфів.

**Теорема 2.38.** [5] *Нехай  $v$  – вершина зваженого графа  $\mathbf{G}$ . Позначимо через  $C(v)$  множину циклів, які містять вершину  $v$ . Тоді справджується таке співвідношення для  $P_{\mathbf{G}}(\lambda)$ :*

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - \sum_{u \sim v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(\lambda).$$

**Наслідок 2.39. (Розклад за висячою вершиною [5])**

Якщо  $v$  — висяча вершина графа  $\mathbf{G}$  та вершини  $u$  та  $v$  є суміжними, то справджується рівність:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) \quad (3)$$

**Теорема 2.40. [5]** Нехай  $uv$  — ребро графа  $\mathbf{G}$ , а  $C(uv)$  — множина циклів, які містять ребро  $uv$ . Тоді характеристичний многочлен графа  $\mathbf{G}$  задовольняє рівність:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = P_{\mathbf{G}-uv}(\lambda) - w(uv)^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{Z \in C(uv)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(\lambda).$$

**Наслідок 2.41. (Розклад за мостом [5])**

Нехай граф  $\mathbf{G}$  містить ребро  $e = uv$ , яке є мостом. При видаленні цього ребра граф розпадається на два підграфи  $\mathbf{G}_1$  та  $\mathbf{G}_2$ , де  $u$  є вершиною підграфа  $G_1$ , а  $v$  є вершиною підграфа  $G_2$ . Тоді характеристичний многочлен графа  $\mathbf{G}$  задовольняє рівність:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = P_{\mathbf{G}_1}(\lambda) P_{\mathbf{G}_2}(\lambda) - w(e)^2 P_{\mathbf{G}_1-v}(\lambda) P_{\mathbf{G}_2-u}(\lambda).$$

**Приклад 2.42.** Для зваженого графа-циклу  $\mathbf{A}_4$  на рисунку 5 знайдемо характеристичний многочлен  $P_{\mathbf{A}_4}(\lambda)$ , використовуючи наслідок з формули Швенка 2.39.

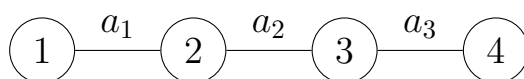


Рис. 5: Зважений граф-ланцюг  $\mathbf{A}_4$ .

Оскільки 4 є висячою вершиною графа  $\mathbf{A}_4$  та вершини 4 та 3 суміжні, то за формулою (3) отримаємо:

$$P_{\mathbf{A}_4}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_4-\{4\}}(\lambda) - w_{34}^2 P_{\mathbf{A}_4-\{3,4\}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_3}(\lambda) - a_3^2 P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) \quad (4)$$

Розглянемо граф-ланцюг  $\mathbf{A}_3$  (див. рисунок 6), утворений внаслідок видалення вершини 4 з графа  $\mathbf{A}_4$ .

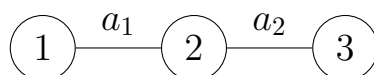


Рис. 6: Зважений граф-ланцюг  $\mathbf{A}_3$ .

Аналогічно, розпишемо  $P_{\mathbf{A}_3}(\lambda)$  за формулою Швенка (3) (3 висяча вершина, яка суміжна з вершиною 2):

$$P_{\mathbf{A}_3}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_3 - \{3\}}(\lambda) - w_{23}^2 P_{\mathbf{A}_3 - \{2,3\}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) - a_2^2 P_{\mathbf{A}_1}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) - a_2^2 \lambda.$$

Підставимо значення  $P_{\mathbf{A}_3}(\lambda)$  в формулу (4) та отримаємо:

$$P_{\mathbf{A}_4}(\lambda) = \lambda (\lambda P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) - \lambda a_2^2) - a_3^2 P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = (\lambda^2 - a_3^2) P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) - \lambda^2 a_2^2 \quad (5)$$

Залишилось обчислити коефіцієнти характеристичного многочлена графа  $\mathbf{A}_2$  на рисунку 7, утвореного внаслідок видалення вершини 3 з графа  $\mathbf{A}_3$ .

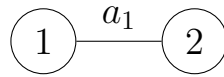


Рис. 7: Зважений граф  $\mathbf{A}_2$ .

Нехай  $P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2$ . Тоді за теоремою Захса 2.36 маємо:  $c_1 = 0$  та  $c_2 = -a_1^2$ . Отже,  $P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \lambda^2 - a_1^2$ .

Підставивши  $P_{\mathbf{A}_2}(\lambda)$  в рівність (5) отримаємо:

$$P_{\mathbf{A}_4}(\lambda) = (\lambda^2 - a_3^2) (\lambda^2 - a_1^2) - \lambda^2 a_2^2 = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \lambda^2 + a_1^2 a_3^2 \quad (6)$$

## 2.5 Висновки до розділу 2

У другому розділі наведено основні терміни з теорії графів, означення та твердження зі спектральної теорії графів, що безпосередньо стосуються кваліфікаційної роботи: означення матриці суміжності, спектра та індексу зваженого графа. Крім того, наведено теореми для обчислення визначника та характеристичного многочлена матриці суміжності зважених графів і розглянуто приклади їх використання.

### 3 Обернені спектральні задачі на зважених графах

Одним із важливих напрямів спектральної теорії графів є обернені спектральні задачі, пов'язані з відновленням графа або його параметрів за спектральними даними. Детальніший огляд таких задач наведено, зокрема у [3].

Сформулюємо задачу відновлення ваг зважених графів, яку розглядатимемо в цьому розділі.

**Постановка задачі.** Нехай граф  $G$  відомий, задача полягає в знаходженні мінімальної кількості зв'язних індукованих підграфів графа  $G$  таких, що за спектрами відповідних зважених індукованих підграфів  $\mathbf{G} = (G, w)$  завжди однозначно відновлюється вагова функція  $w : E(G) \rightarrow (0, +\infty)$ .

Поставлену задачу розглядатимемо для зв'язних графів, які мають принаймні дві вершини.

Якщо  $\sigma(\mathbf{G}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  — спектр зваженого графа  $\mathbf{G}$ , то характеристичний многочлен  $\mathbf{G}$  можна записати у вигляді:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i).$$

З цієї форми характеристичного многочлена випливає наступна лема.

**Лема 3.1.** [5] *Відновлення ваги кожного ребра зваженого графа  $\mathbf{G}$  за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.*

#### 3.1 Відновлююче спектральне число $Srn(G)$

**Означення 3.2.** [5] *Відновлюючим спектральним числом  $Srn(G)$  називається мінімальна кількість індукованих зв'язних підграфів  $G$  таких, що за спектрами відповідних зважених індукованих підграфів завжди однозначно відновлюється вагова функція зваженого графа  $\mathbf{G}$ .*

Для будь-якого зв'язного графа  $G$  з принаймні двома вершинами нижня оцінка  $Srn(G)$  дорівнює 1, і вона досягається у випадку, коли спектр графа  $\mathbf{G}$  однозначно відновлює свої ваги. Прикладом такого графа є  $\mathbf{A}_2$  — ребро,

що з'єднує дві вершини. Його спектр дорівнює  $\sigma(\mathbf{A}_2) = \{-w, w\}$ , і за ним можна однозначно відновити вагу ребра.

Будь-який зважений граф можна відновити, знаючи спектри підграфів, що є його ребрами, тому  $Srn(G) \leq |E(G)|$  [13].

Для будь-якого зваженого графа  $\mathbf{G}$  виникають дві задачі:

- 1) знайти такий набір підспектрів, за яким можна відновити всі ваги графа;
- 2) знайти точне значення відновлюючого спектрального числа  $Srn(G)$ .

### 3.2 Задача відновлення ваг для графа-циклу $C_n$

У роботі [6] були доведені наступні твердження щодо точних значень відновлюючого спектрального числа графів-циклів  $C_3$  та  $C_4$ , а у роботі [5] наведена його верхня оцінка для графів-циклів  $C_n$  для  $n \geq 5$ .

**Твердження 3.3.** [6]  $Srn(C_3) = 3$  та  $Srn(C_4) = 4$ , а вагові функції зважених графів-циклів  $C_3$  та  $C_4$  можна відновити за спектрами зважених підграфів, що є ребрами вихідних графів  $C_3$  та  $C_4$  відповідно.

**Твердження 3.4.** [5] Для відновлення  $C_n$  для  $n \geq 5$  достатньо таких трьох підспектрів:  $\sigma(C_n - \{2\})$ ,  $\sigma(C_n - \{2, 3\})$  і  $\sigma(C_n - \{5, \dots, n\})$ .

Таким чином, з твердження 3.4 отримаємо:

$$Srn(C_n) \leq 3 \quad \text{для} \quad n \geq 5.$$

Щоб знайти точне значення відновлюючого спектрального числа графа-циклу  $C_n$ , де  $n \geq 5$ , потрібно відповісти на запитання:

*Чи можна відновити ваги графа-циклу  $C_n$  за спектрами тільки двох зв'язних індукованих підграфів?*

*Зауваження.* Для відновлення всіх ваг  $C_n$  об'єднання цих двох підграфів має дорівнювати  $C_n$ .

Розглянемо поставлену задачу для зваженого графа  $C_n = (C_n, w)$ . Пронумеруємо його вершини від 1 до  $n$ , тобто  $V(C_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ . Вагу ребра, що з'єднує вершини  $i$  та  $i + 1$ , позначимо  $a_i$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ , через  $a_n$  позначимо вагу ребра, що з'єднує вершини 1 та  $n$ .

Розглянемо всі можливі пари зв'язних індукованих підграфів графа-циклу  $C_n$ . Кожен підграф є або самим циклом, або ланцюгом. Ці пари можна поділити на чотири типи:

1.  $C_n$  і  $A_k$ , де  $2 \leq k \leq n - 1$ .
2.  $A_k$  і  $A_m$ , які не мають спільних ребер, де  $3 \leq k, m \leq n - 1$  і  $m = n - k + 2$ .
3.  $A_k$  і  $A_m$ , які мають спільні ребра лише на одному кінці.
4.  $A_k$  і  $A_m$ , які перетинаються по ребрах на обох кінцях.

Розглянемо випадки **1** та **2** для будь-якого  $n \geq 5$  та покажемо, що двох підграфів таких типів недостатньо для відновлення ваг  $C_n$ .

1.  $C_n$  і  $A_k$ , де  $2 \leq k \leq n - 1$ .

Без обмеження загальності розглянемо ланцюг  $A_k$  на вершинах  $1, 2, \dots, k$ .

Розглянемо два випадки, де підграфи мають різні вагові функції, але однакові характеристичні многочлени. Для графа  $C_n$  на рисунку 8 при  $k \neq 2$  задамо вагову функцію таким чином:

$$a_i = \begin{cases} a, & i = 1, \dots, k - 2, \\ b, & i = k - 1 \text{ або } i = k, \\ c, & i = k + 1, \dots, n; \end{cases}$$

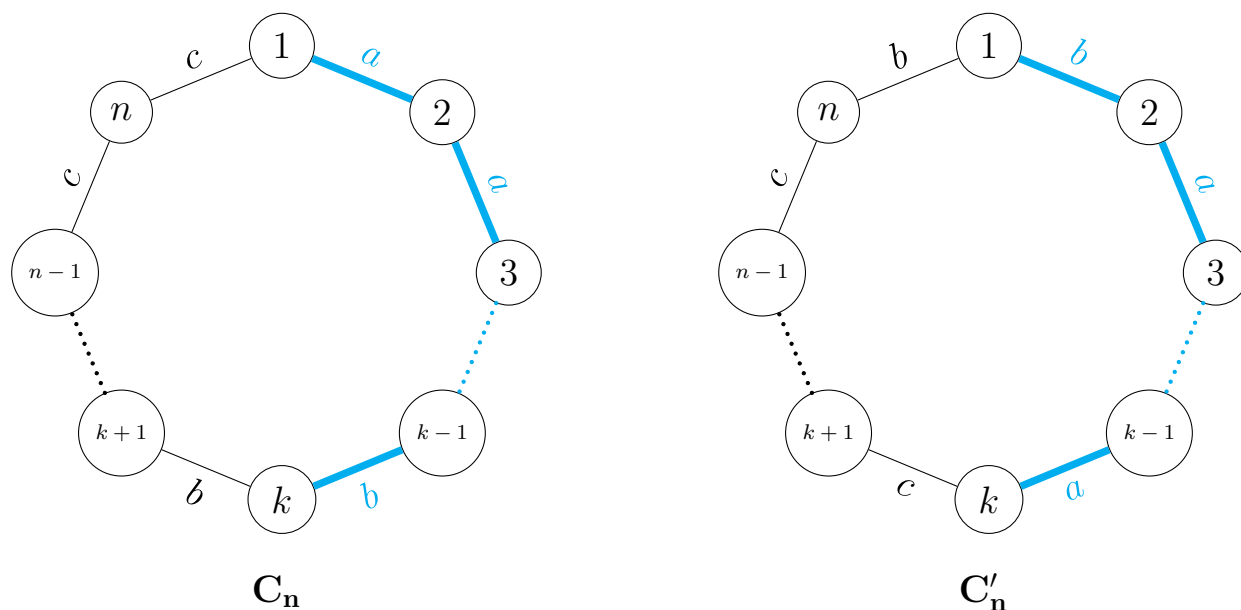
де  $a \neq b$

Тоді для графа  $C'_n$  на рисунку 8 задамо ваги:

$$a_i = \begin{cases} a, & i = 2, \dots, k - 1, \\ b, & i = 1 \text{ або } i = n, \\ c, & i = k, \dots, n - 1; \end{cases}$$

де  $a \neq b$

Зазначимо, що у випадку  $k = 2$ , тобто коли розглядаються підграфи  $C_n$  та  $A_2$ , вагова функція графа  $C_n$  має такий вигляд:  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$  та  $a_i = c$  для  $3 \leq i \leq n$ , де  $b \neq c$ . Тоді для графа  $C'_n$  матимемо такі ваги:  $a_1 = a$ ,  $a_n = b$  та  $a_i = c$  для  $2 \leq i \leq n - 1$ .

Рис. 8:  $C_n$  і  $A_k$ ,  $2 \leq k \leq n - 1$ .

Помітимо, що граф  $C'_n$  на рисунку 8 можна отримати з графа  $C_n$  перенумерувавши від 1 до  $n$  вершини від  $k$  до  $k + 1$  проти годинникової стрілки, тобто  $(k - l) \rightarrow (l + 1)$ ,  $l = 0, \dots, k - 1$  та  $(k + l) \rightarrow (n - l + 1)$ ,  $l = 1, \dots, n - k$ .

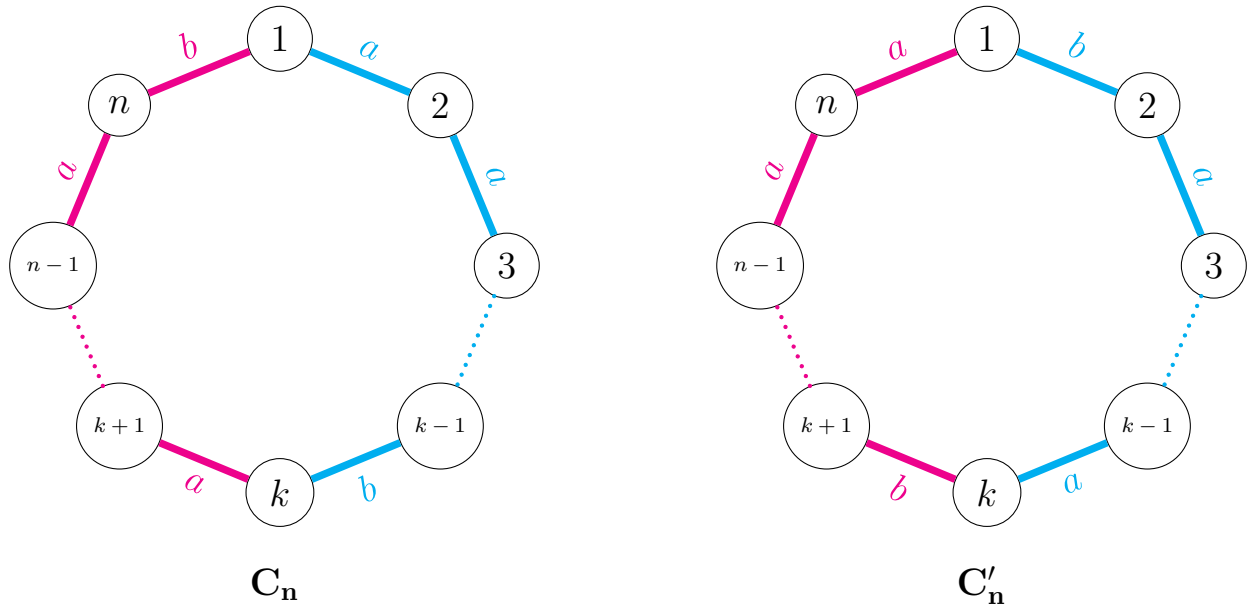
Оскільки спектр та характеристичний многочлен зваженого графа не залежать від способу нумерації вершин, тому відповідні зважені підграфи  $A_k$  та  $C_n$  графів  $C_n$  та  $C'_n$  на рисунку 8 мають однакові характеристичні многочлени. Отже, цих підспектрів недостатньо, щоб однозначно відновити значення всіх ваг графа  $C_n$ .

2.  $A_k$  і  $A_m$ , які не мають спільних ребер, де  $3 \leq k, m \leq n - 1$  і  $m = n - k + 2$ .

Без обмеження загальності розглянемо ланцюг  $A_k$  на вершинах  $1, 2, \dots, k$  та ланцюг  $A_m$  на вершинах  $k, k + 1, \dots, n, 1$  (див. рисунок 9).

Для графа  $C_n$  на рисунку 9 задамо ваги таким чином:  $a_i = a$  для всіх  $i \neq k - 1$  та  $i \neq n$  та  $a_{k-1} = a_n = b$ , де  $a \neq b$ . Тоді для графа  $C'_n$  на рисунку 9 задамо:  $a_i = a$ , для всіх  $i \neq 1$  та  $i \neq k$  та  $a_1 = a_k = b$ .

Ланцюг  $A_k$  графа  $C'_n$  можна отримати з відповідного ланцюга  $A_k$  графа  $C_n$ , перенумерувавши вершини від 1 до  $k$  в зворотному порядку, тобто  $l \rightarrow (k - l + 1)$ ,  $l = 1, \dots, k$  (див. рисунок 9). Аналогічно можемо зробити для ланцюга  $A_m$ .

Рис. 9:  $A_k$  і  $A_m$ ,  $3 \leq k, m \leq n - 1$ .

Таким чином, відповідні підграфи  $\mathbf{A}_k$  та  $\mathbf{A}_m$  графів  $\mathbf{C}_n$  та  $\mathbf{C}'_n$  на рисунку 9 мають однакові характеристичні многочлени. Тому їхніх спектрів недостатньо, щоб однозначно відновити вагову функцію графа  $\mathbf{C}_n$ .

**3.**  $A_k$  і  $A_m$ , які мають спільні ребра лише на одному кінці.

Надалі позначатимемо через  $A_k \setminus A_m$  підграф, що є доповненням підграфа  $A_k \cap A_m$  у графі  $A_k$ , тобто  $E(A_k \setminus A_m) = E(A_k) \setminus E(A_k \cap A_m)$ .

Поділимо випадок **3** на три підвипадки:

- 3.1.**  $|E(A_k \cap A_m)| \leq \min(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ , тобто кількість ребер, спільних для обох ланцюгів, не перевищує кількість ребер, що належать лише коротшому ланцюгу.
- 3.2.**  $|E(A_k \cap A_m)| > \min(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$  та  $|E(A_k \cap A_m)| \leq \max(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ , тобто кількість ребер, спільних для обох ланцюгів, більша за кількість ребер, що належать лише коротшому ланцюгу, але не перевищує кількість ребер, що належать тільки довшому ланцюгу.
- 3.3.**  $|E(A_k \cap A_m)| > \max(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ .

Розглянемо підвипадок **3.1** для довільного  $n \geq 5$ :

- 3.1.**  $|E(A_k \cap A_m)| \leq \min(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ .

Без обмеження загальності розглянемо ланцюг  $A_k$  на вершинах  $1, 2, \dots, k$  і ланцюг  $A_m$  на вершинах  $l, l+1, \dots, n, 1$ , де  $l = n - m + 2$  (див. рисунок 10).

Тоді кількість ребер в перетині ланцюгів  $A_k$  і  $A_m$  дорівнює  $k - l$ . Позначимо цю кількість через  $p$ , тобто  $|E(A_k \cap A_m)| = p = k - l \geq 1$ .

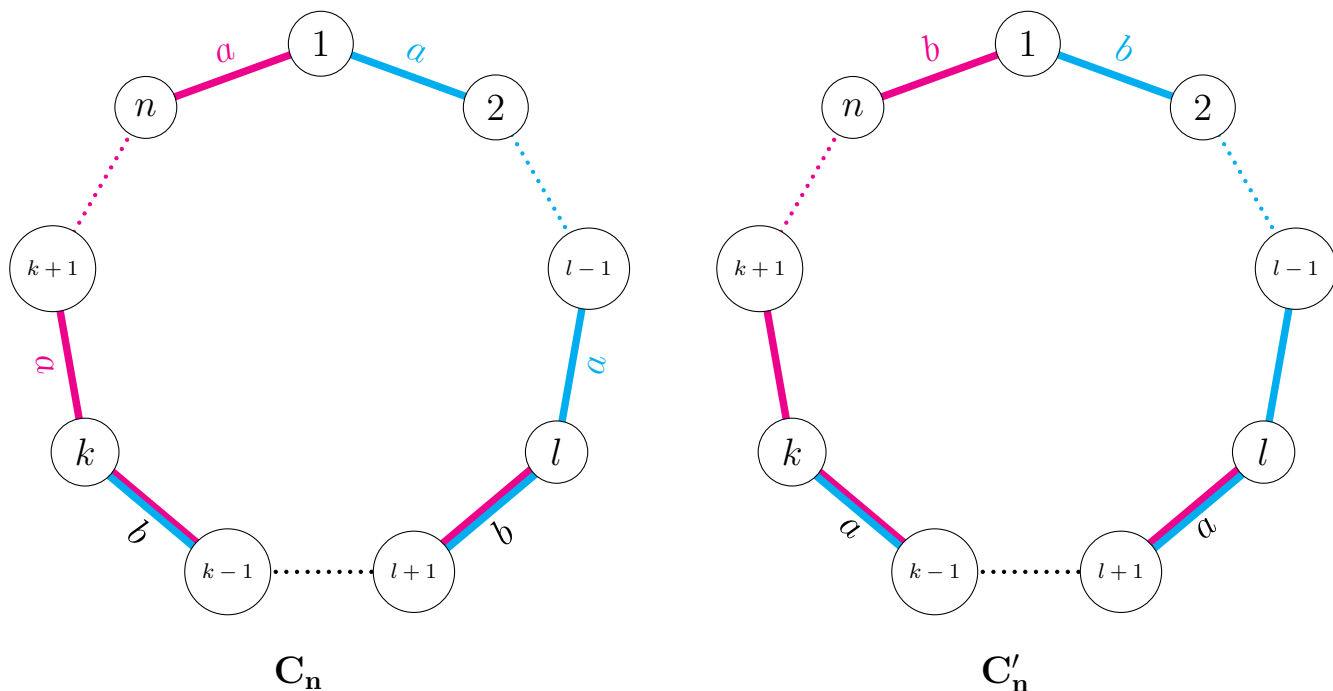


Рис. 10:  $A_k$  і  $A_m$ , де  $|E(A_k \cap A_m)| \leq \min(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ .

Для графа  $C_n$  на рисунку 10 задамо ваги таким чином:  $a_i = b$ , якщо ребро  $\{i, i + 1\} \in E(A_k \cap A_m)$ , тобто  $i = l, l + 1, \dots, k - 1$ ; інакше  $a_i = a$ , де  $a \neq b$ .

Використовуючи ідею перенумерування вершин ланцюгів  $A_k$  та  $A_m$  у зворотному напрямку, задамо ваги графа  $C'_n$  таким чином:  $a_i = b$  для всіх  $1 \leq i \leq p$  або  $n - p + 1 \leq i \leq n$ , інакше  $a_i = a$ . Характеристичні многочлени зважених ланцюгів після такої перенумерації не зміняться, але вагові функції є різними, тому однозначно відновити ваги не вдасться.

Далі розглянемо підвипадок **3.2** для довільного  $n \geq 5$ .

**3.2.**  $|E(A_k \cap A_m)| > \min(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$  та  $|E(A_k \cap A_m)| \leq \max(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ .

Розглянемо ланцюг  $A_k$  на вершинах  $1, 2, \dots, k$  і ланцюг  $A_m$  на вершинах  $l, l + 1, \dots, n, 1$ , де  $l = n - m + 2$  (див. рисунок 11). Без обмеження загальності вважатимемо, що  $k > m$ , тоді  $|E(A_k \setminus A_m)| > |E(A_m \setminus A_k)|$ , а умову **3.2** можна переписати у вигляді:  $|E(A_m \setminus A_k)| < |E(A_k \cap A_m)| \leq |E(A_k \setminus A_m)|$ .

Нехай  $p$  — кількість ребер, що є спільними для обох ланцюгів, тобто  $|E(A_k \cap A_m)| = p = k - l \geq 1$ . Тоді через  $r$  позначимо різницю між кількістю ребер, що належать обом ланцюгам, та кількістю ребер, що належать

лише коротшому з них:  $r = |E(A_k \cap A_m)| - |E(A_m \setminus A_k)| = p - |E(A_m \setminus A_k)| \geq 1$ .

Зауважимо, що  $l - 1 > r$ , оскільки:

$$l - 1 = |E(A_k \setminus A_m)| \geq |E(A_k \cap A_m)| > |E(A_k \cap A_m)| - |E(A_m \setminus A_k)| = r.$$

Задамо ваги ребер графа  $\mathbf{C}_n$  на рисунку 11:  $a_i = b$  для  $1 \leq i \leq r$  або  $l \leq i \leq k - 1$ , інакше  $a_i = a$ , де  $a \neq b$ . Тоді для графа  $\mathbf{C}'_n$  на рисунку 11 вагова функція має вигляд:  $a_i = b$  для  $1 \leq i \leq p$  або  $n - p + 1 \leq i \leq n$ , інакше  $a_i = a$ .

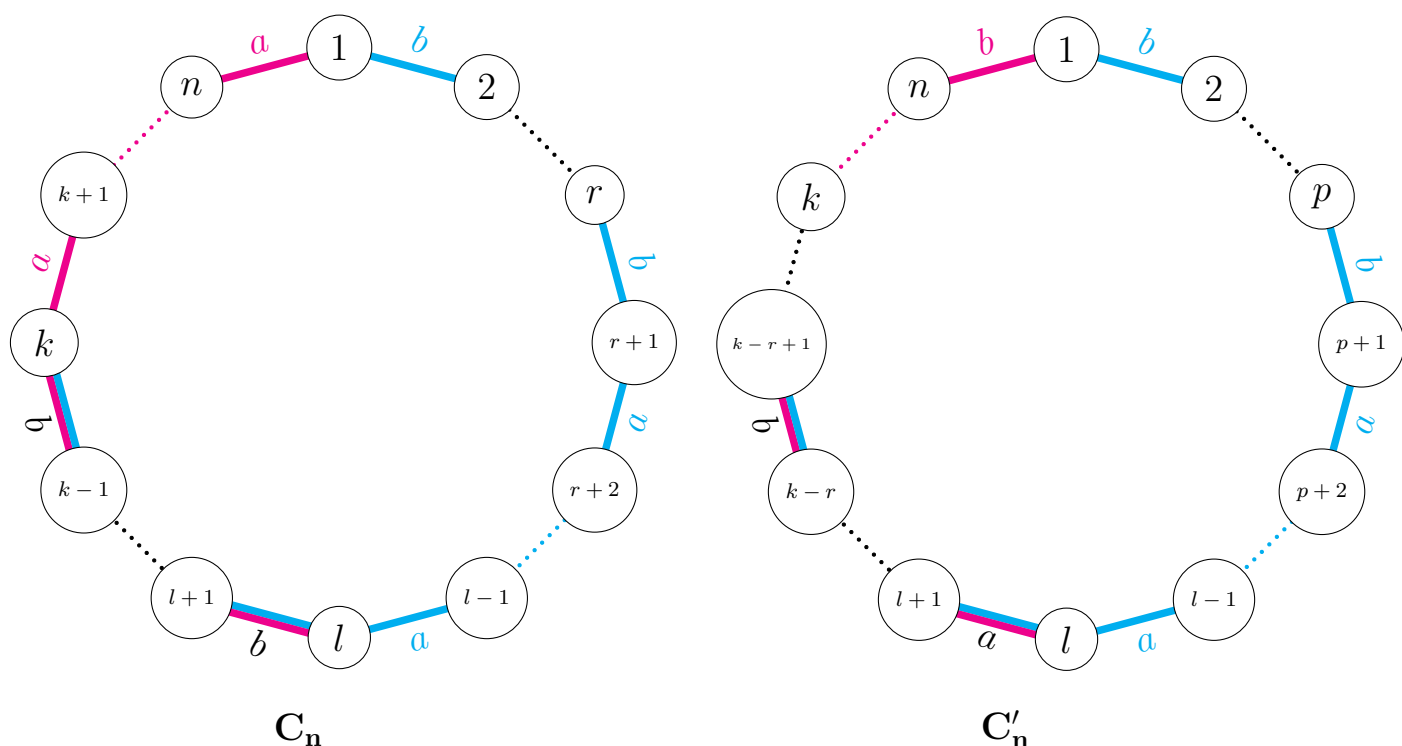


Рис. 11:  $A_k$  і  $A_m$ , де  $|E(A_m \setminus A_k)| < |E(A_k \cap A_m)| \leq |E(A_k \setminus A_m)|$ .

За такого задання ваг відповідні підграфи  $\mathbf{A}_k$  та  $\mathbf{A}_m$  графів  $\mathbf{C}_n$  і  $\mathbf{C}'_n$ , зображених на рисунку 11, матимуть однакові характеристичні многочлени, але різні вагові функції. Отже, спектрів  $\mathbf{A}_k$  і  $\mathbf{A}_m$  недостатньо для однозначного відновлення вагової функції графа-циклу  $\mathbf{C}_n$ .

Підвипадок **3.3** є складнішим, тому розглянемо його окремо для графів-циклів  $C_n$ , де  $5 \leq n \leq 9$ .

**4.**  $A_k$  і  $A_m$ , які перетинаються по ребрах на обох кінцях.

Поділимо випадок **4** на два підвипадки.

**4.1.** Кількість ребер у двох компонентах зв'язності  $A_k \cap A_m$  рівна.

**4.2.** Кількість ребер у двох компонентах зв'язності  $A_k \cap A_m$  різна.

Розглянемо підвипадак **4.1** для довільного  $n \geq 5$ :

**4.1.** Кількість ребер у двох компонентах зв'язності  $A_k \cap A_m$  рівна.

Без втрати загальності розглянемо ланцюг  $A_k$  на вершинах  $1, 2, \dots, k$  та ланцюг  $A_m$  на вершинах  $p, p+1, \dots, n, 1, \dots, l-1, l$  (див. рисунок 12). Оскільки кількість ребер в обох компонентах зв'язності  $A_k \cap A_m$  рівна, то  $k-p = l-1$ .

Для побудови контрприкладу використаємо ідею симетрії: задамо ваги всіх ребер першої компоненти зв'язності  $A_k \cap A_m$  графа  $C_n$  рівними  $b$ , а ваги ребер другої компоненти —  $c$ , де  $b \neq c$ . Щоб побудувати зважений граф  $C'_n$  з відмінною ваговою функцією, достатньо поміняти значення ваг  $b$  та  $c$  місцями. Завдяки умові **4.1**, така перестановка можлива, а симетрія гарантує, що спектри ланцюгів  $A_k$  та  $A_m$  залишаться незмінними.

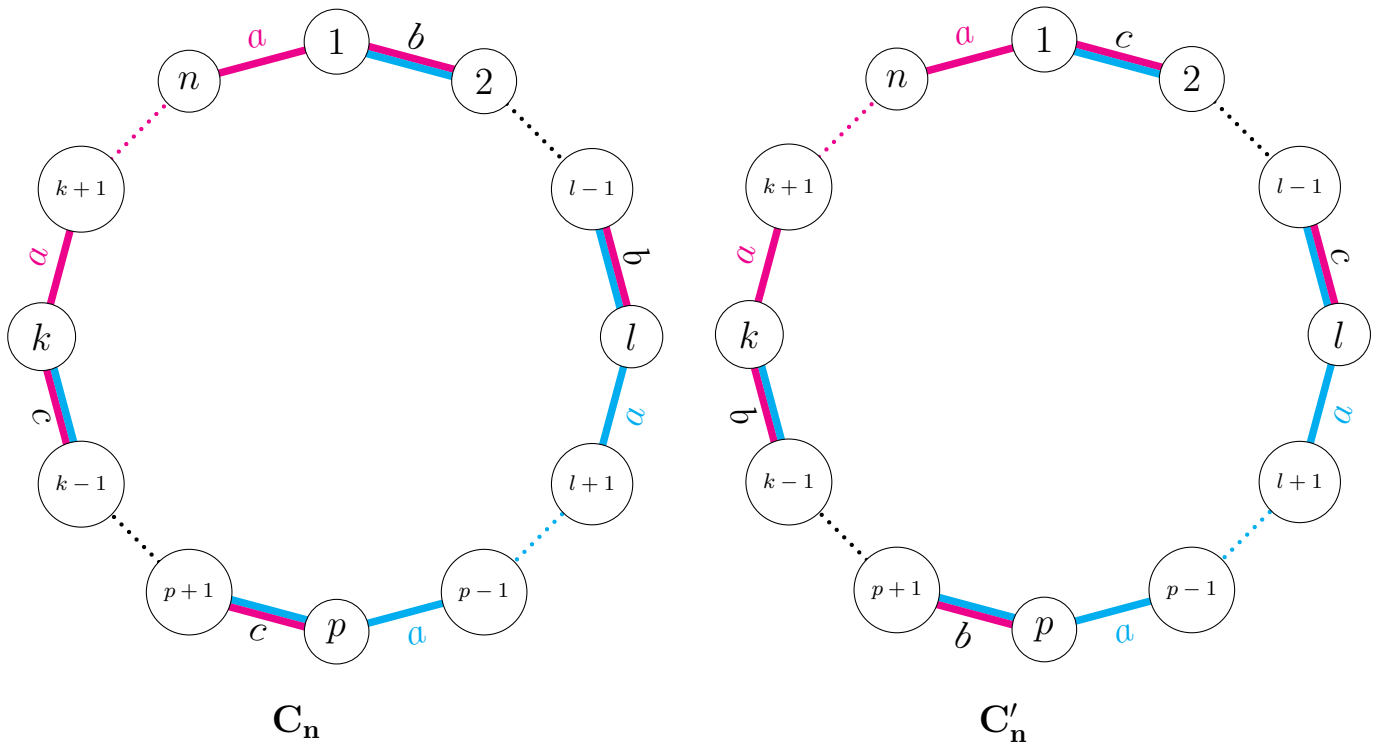


Рис. 12:  $A_k$  і  $A_m$ , для яких кількість ребер у двох компонентах зв'язності  $A_k \cap A_m$  рівна.

Отже, для графа  $C_n$  на рисунку 12 вагова функція має вигляд:

$$a_i = \begin{cases} b, & i = 1, 2, \dots, l-1 \\ c, & i = p, p+1, \dots, k-1 \\ a, & \text{інакше;} \end{cases}$$

де  $b \neq c$

Для графа  $C'_n$  на рисунку 12 вагова функція визначається так:

$$a_i = \begin{cases} c, & i = 1, 2, \dots, l-1 \\ b, & i = p, p+1, \dots, k-1 \\ a, & \text{інакше;} \end{cases}$$

де  $b \neq c$

Підвипадок **4.2** є складнішим через різні можливі комбінації кількості ребер у кожній компоненті зв'язності  $A_k \cap A_m$ , тому його ми розглянемо окремо для графів-циклів  $C_n$ , де  $5 \leq n \leq 9$ .

### 3.2.1 Відновлення ваг графа-циклу $C_5$

Для задачі відновлення ваг графу-циклу  $C_5$  на п'яти вершинах детальніше розглянемо випадки **3** та **4**, у яких ланцюги перетинаються.

Для того, щоб підграфи-ланцюги графа  $C_5$  перетиналися, довжина кожного з них має бути більшою або рівною трьом (кожен індукований ланцюг не може мати більше п'яти вершин) та об'єднання цих ланцюгів має дорівнювати  $C_5$ . Таким чином, єдиний випадок, який залишилося розглянути, — це два підграфи-ланцюги  $A_4$ , що перетинаються по одному ребру. Це є частковим випадком **3.1**, але для більшої наочності розглянемо його детальніше та наведемо явні формули характеристичних многочленів.

Без обмеження загальності розглянемо перший ланцюг  $A_4^1$  на вершинах 1, 2, 3 та 4, а другий ланцюг  $A_4^2$  на вершинах 3, 4, 5 та 1 (див. рисунок 13).

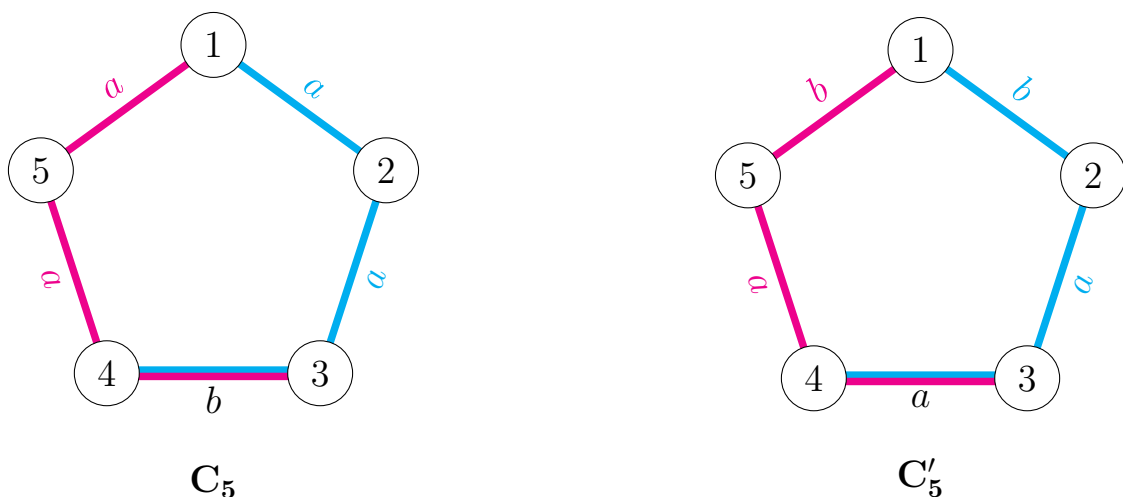


Рис. 13:  $A_4^1$  і  $A_4^2$ , що перетинаються по одному ребру.

Для графа  $C_5$  на рисунку 13 задамо ваги  $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a$  та  $a_3 = b$ , де  $a \neq b$ , а для графа  $C'_5$  покладемо  $a_2 = a_3 = a_4 = a$  та  $a_1 = a_5 = b$ .

Знайдемо відповідні характеристичні многочлени ланцюгів  $A_4^1$  та  $A_4^2$  графів  $C_5$  та  $C'_5$  та переконаємося, що вони рівні.

За формулою (6) з прикладу 2.42 характеристичні многочлени підграфів  $A_4^1$  та  $A_4^2$  графа  $C_5$  дорівнюють:

$$P_{A_4^1}(\lambda) = P_{A_4^2}(\lambda) = \lambda^4 - (a^2 + a^2 + b^2)\lambda^2 + a^2b^2 = \lambda^4 - (2a^2 + b^2)\lambda^2 + a^2b^2$$

Для характеристичних многочленів підграфів  $A_4^1$  та  $A_4^2$  графа  $C'_5$  маємо:

$$P_{A_4^1}(\lambda) = P_{A_4^2}(\lambda) = \lambda^4 - (b^2 + a^2 + a^2)\lambda^2 + b^2a^2 = \lambda^4 - (2a^2 + b^2)\lambda^2 + a^2b^2$$

Таким чином, відповідні характеристичні многочлени підграфів  $C_5$  та  $C'_5$  (див. рисунок 13) рівні, тому відповідні підспектри теж збігаються. Отже, з явного вигляду многочленів бачимо, що такого набору підспектрів недостатньо, щоб однозначно відновити вагову функцію графа  $C_5$ .

Проаналізувавши всі випадки з двох індукованих підграфів графа-циклу  $C_5$ , можемо зробити висновок, що двох підспектрів недостатньо для відновлення вагової функції  $C_5$ . Звідси отримуємо теорему 3.5.

**Теорема 3.5.**  $Srn(C_5) = 3$ .

### 3.2.2 Відновлення ваг графа-циклу $C_6$

Розглянемо випадки **3** та **4** для задачі відновлення ваг графа-циклу  $C_6$ .

Для випадку **3**, коли два підграфи-ланцюги перетинаються з одного боку, можливі такі пари індукованих зв'язних підграфів графа  $C_6$ :

1.  $A_4$  і  $A_5$ , що перетинаються по одному ребру.

2. Два  $A_5$ , що перетинаються по двох ребрах.

1.  $A_4$  і  $A_5$ , що перетинаються по одному ребру.

Помітимо, що  $|E(A_4 \cap A_5)| = 1$ ,  $|E(A_4 \setminus A_5)| = 2$  та  $|E(A_5 \setminus A_4)| = 3$ , тому  $1 = |E(A_4 \cap A_5)| \leq \min(|E(A_4 \setminus A_5)|, |E(A_5 \setminus A_4)|) = \min(2, 3) = 2$ . Отже, маємо частковий випадок ситуації **3.1**, яка вже була розглянута для довільного  $n \geq 5$ .

**2.** Два  $A_5$ , що перетинаються по двох ребрах. Аналогічно до попереднього випадку, цей варіант є частковим випадком ситуації **3.1**, бо  $|E(A_5^1 \cap A_5^2)| = |E(A_5^1 \setminus A_5^2)| = |E(A_5^2 \setminus A_5^1)| = 2$ .

Розглянемо випадок **4**, коли два підграфи-ланцюги перетинаються з обох боків. Для графу-циклу  $C_6$  можлива одна така пара з двох індукованих підграфів  $A_6$ , що перетинаються по одному ребру з обох боків. Оскільки кількість ребер в двох компонент зв'язності графу-перетину цих ланцюгів рівна 1, то така пара підграфів є частковим випадком ситуації **4.1**, що була розглянута для довільного  $n \geq 5$ .

Отже, після розгляду всіх можливих пар індукованих підграфів зваженого графу-циклу  $C_6$  було показано, що двох підспектрів недостатньо для відновлення вагової функції цього графа. Маємо теорему 3.6.

**Теорема 3.6.**  $Srn(C_6) = 3$ .

### 3.2.3 Відновлення ваг графу-циклу $C_7$

Розглянемо поставлену задачу для зваженого графу-циклу  $C_7$  на семи вершинах та покажемо, що двох підспектрів недостатньо для відновлення вагової функції графа. Для цього проаналізуємо окремі підвипадки **3.3** та **4.2**, які залишилися поза межами загального розгляду.

Випишемо такі варіанти з двох підграфів:

- 1.** Два  $A_6$ , що мають три спільні ребра на одному з кінців (випадок **3.3**).
- 2.** Два  $A_6$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці (випадок **4.2**).

Проаналізуємо ці випадки та наведемо приклади двох графів, для яких спектри відповідних підграфів рівні, але вагові функції відрізняються.

- 1.** Два  $A_6$ , що мають три спільні ребра на одному з кінців.

Розглянемо перший ланцюг  $A_6^1$  на вершинах 1, 2, 3, 4, 5 та 6, а другий ланцюг  $A_6^2$  на вершинах 3, 4, 5, 6, 7 та 1 (див. рисунок 14).

Для графа  $C_7$  на рисунку 14 задамо ваги:  $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = b$  і  $a_2 = a_6 = a$ , де  $a \neq b$ . Тоді для графа  $C_7'$  покладемо:  $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = b$  і  $a_4 = a$ .

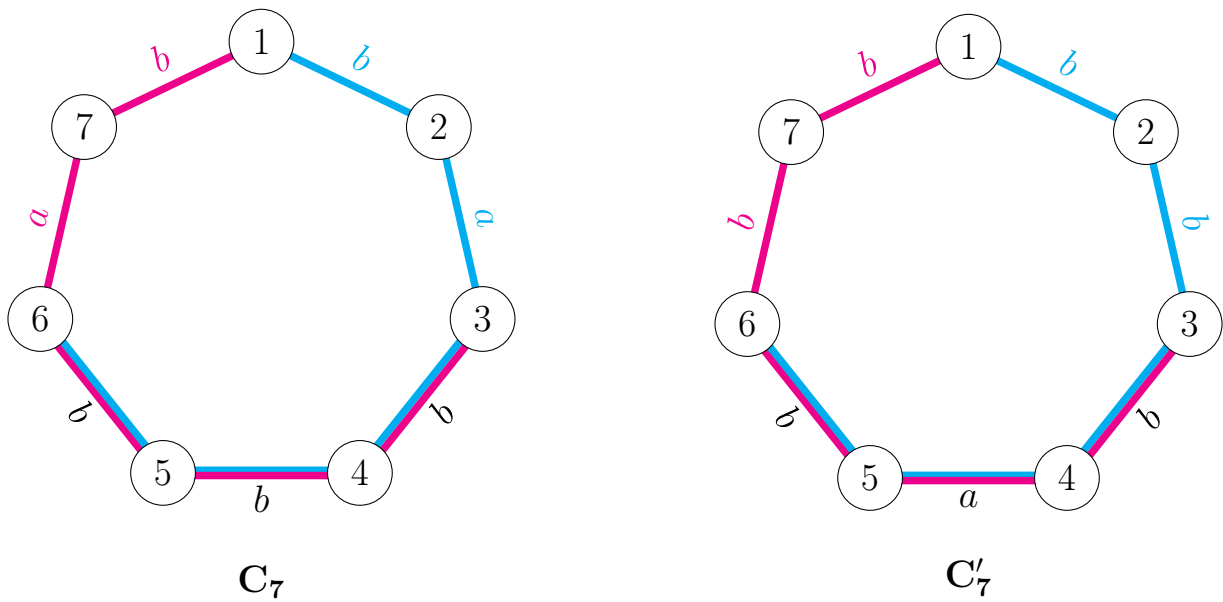


Рис. 14:  $A_6^1$  і  $A_6^2$ , що мають три спільні ребра на одному з кінців.

2. Два  $A_6$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

Розглянемо перший ланцюг  $A_6^1$  на вершинах 1, 2, 3, 4, 5 та 6, а другий ланцюг  $A_6^2$  на вершинах 4, 5, 6, 7, 1 та 2 (див. рисунок 15).

Для графа  $C_7$  на рисунку 15 задамо ваги:  $a_3 = a_6 = a$ ,  $a_1 = a_2 = a_7 = b$  та  $a_4 = a_5 = c$ , де  $b \neq c$ . Тоді для графа  $C_7'$  вагова функція матиме вигляд:  $a_3 = a_6 = a$ ,  $a_4 = a_5 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_7 = c$ .

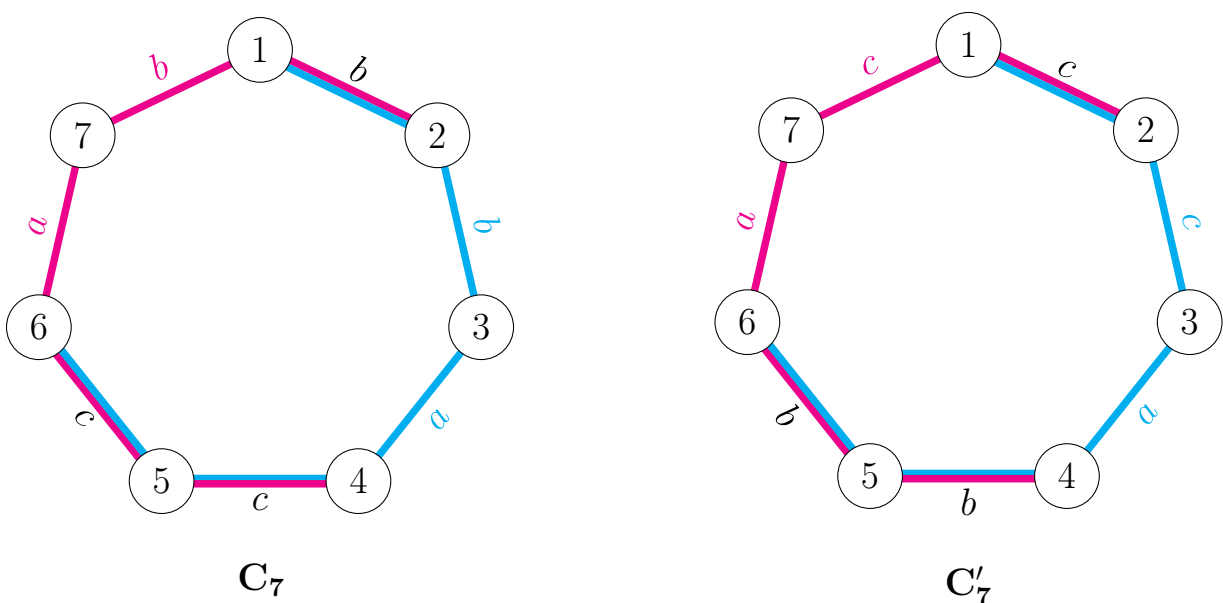


Рис. 15:  $A_6^1$  і  $A_6^2$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

У двох розглянутих випадках, завдяки симетрії, спектри відповідних ланцюгів збігаються, тому їх недостатньо для однозначного відновлення ваг графа-циклу  $C_7$ .

Аналогічно, як для графів-циклів  $C_5$  та  $C_6$  отримуємо теорему 3.7 про точне значення відновлюючого спектрального числа графа  $C_7$ .

**Теорема 3.7.**  $Srn(C_7) = 3$ .

### 3.2.4 Відновлення ваг графа-циклу $C_8$

Для задачі відновлення вагової функції графа-циклу  $C_8$  зосередимо увагу на випадках 3.3 і 4.2, які не були охоплені загальним підходом. Розглянемо такі варіанти пар підграфів окремо та покажемо, що відповідних підспектрів недостатньо для однозначного відновлення ваг графа  $C_8$ .

Випишемо варіанти з двох підграфів, які ще не були розглянуті:

1. Два  $A_7$ , що мають чотири спільні ребра на одному з кінців (випадок 3.3).
2.  $A_6$  і  $A_7$ , що перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці (випадок 4.2).
3. Два  $A_7$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці (випадок 4.2).

Розглянемо зазначені випадки та побудуємо приклади зважених графів, які мають однакові характеристичні многочлени відповідних підграфів, але різні вагові функції.

1. Два  $A_7$ , що мають чотири спільні ребра на одному з кінців.

Розглянемо перший ланцюг  $A_7^1$ , індукований вершинами  $1, 2, \dots, 7$ , та другий ланцюг  $A_7^2$ , що проходить через вершини  $3, 4, \dots, 8, 1$  (див. рисунок 16).

Визначимо вагову функцію для графа  $C_8$ , зображеного на рисунку 16, наступним чином:  $a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a$ ,  $a_3 = a_7 = b$  та  $a_4 = a_8 = c$ , де  $b \neq c$ . Для графа  $C'_8$  на рисунку 16 залишимо ваги ребер  $a_1, a_2, a_5$  і  $a_6$  незмінними, а значення  $b$  та  $c$  поміняємо місцями, тобто матимемо:  $a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a$ ,  $a_4 = a_8 = b$  та  $a_3 = a_7 = c$ .

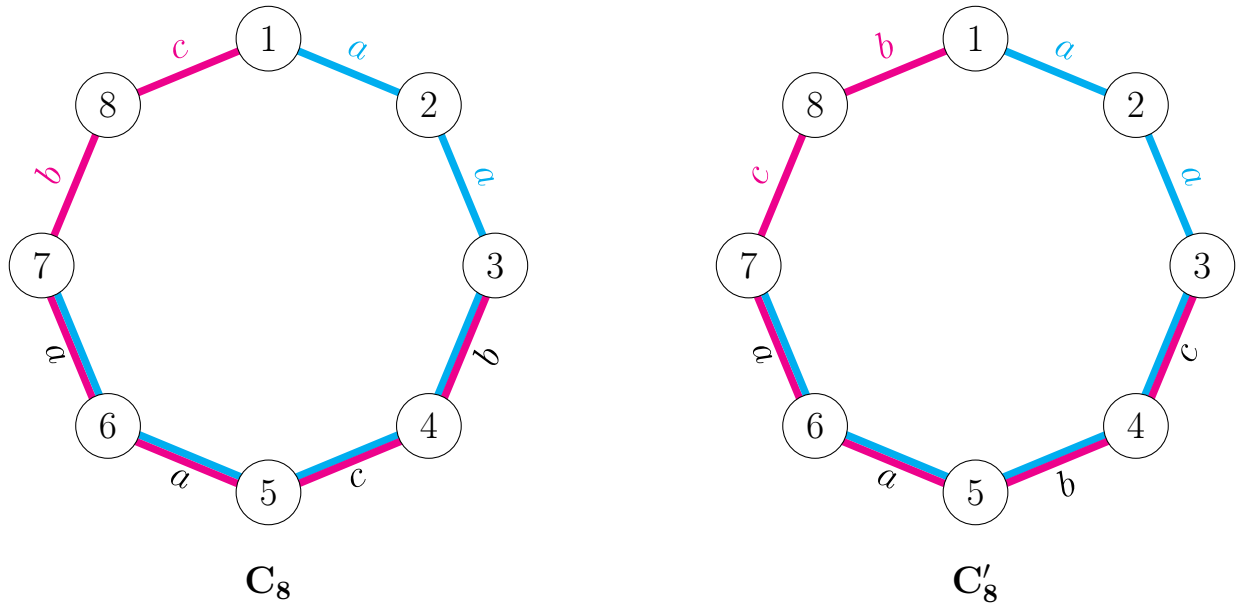


Рис. 16:  $A_7^1$  і  $A_7^2$ , що мають чотири спільні ребра на одному з кінців.

Для наступних підвипадків **4.2** покладемо ваги ребер першої компоненти зв'язності  $A_k \cap A_m$  рівними  $b$ , другої —  $c$ , де  $b \neq c$ . Решту ваг задамо, використовуючи ідею перенумерації ланцюгів у зворотному напрямку.

2.  $A_6$  і  $A_7$ , що перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

Нехай  $A_6$  — це ланцюг, індукований вершинами  $1, 2, \dots, 6$ , а  $A_7$  — ланцюг на вершинах  $4, 5, \dots, 8, 1$  та  $2$  (див. рисунок 17).

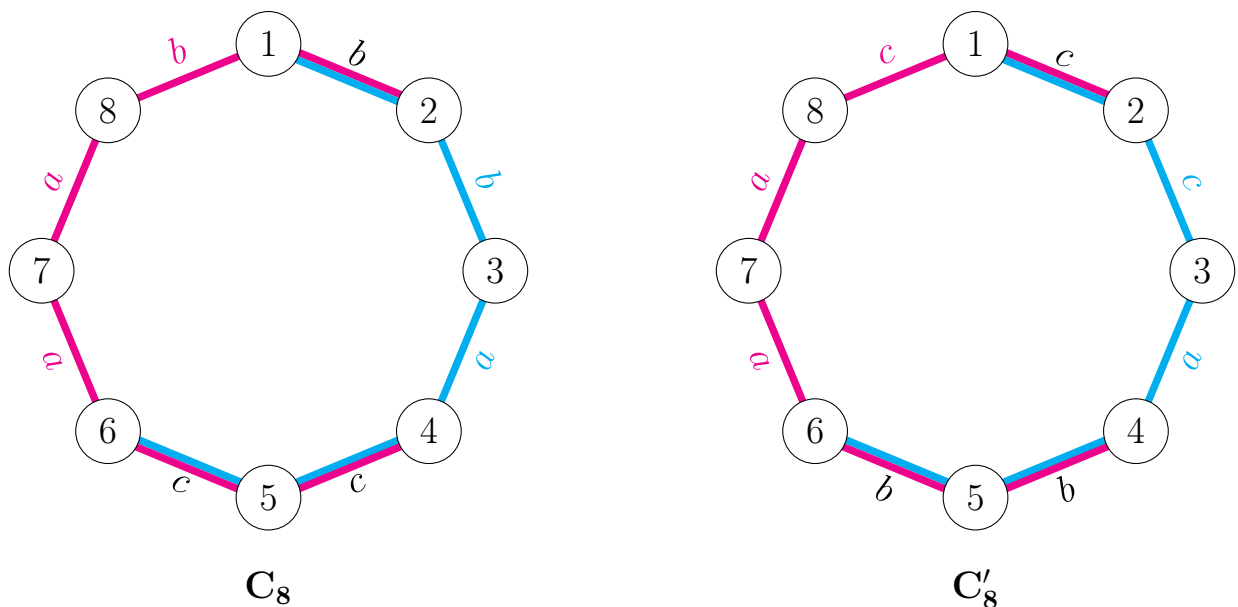


Рис. 17:  $A_6$  і  $A_7$ , що перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

Задамо вагову функцію для графа  $C_8$  на рисунку 17:  $a_3 = a_6 = a_7 = a$ ,  $a_1 = a_2 = a_8 = b$  та  $a_4 = a_5 = c$ , де  $b \neq c$ . Аналогічно до попереднього випадку, для графа  $C'_8$ , зображеного на тому ж рисунку, залишимо ті самі ваги для ребер  $a_3$ ,  $a_6$  та  $a_7$ , але поміняємо місцями значення  $b$  та  $c$ , тобто покладемо:  $a_3 = a_6 = a_7 = a$ ,  $a_4 = a_5 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_8 = c$ .

**3.** Два  $A_7$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

Розглянемо два ланцюги у графі  $C_8$ : перший ланцюг  $A_7^1$ , індукований множиною вершин  $1, 2, \dots, 7$ , та другий ланцюг  $A_7^2$ , побудований на вершинах  $4, 5, \dots, 8, 1$  та  $2$  (див. рисунок 18).

Для графа  $C_8$  на рисунку 18 визначимо ваги ребер:  $a_2 = a_8 = a$ ,  $a_1 = a_3 = a_7 = b$  та  $a_4 = a_5 = a_6 = c$ , де  $b \neq c$ . Тоді для графа  $C'_8$  покладемо:  $a_5 = a$ ,  $a_4 = a_6 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = a_8 = c$ .

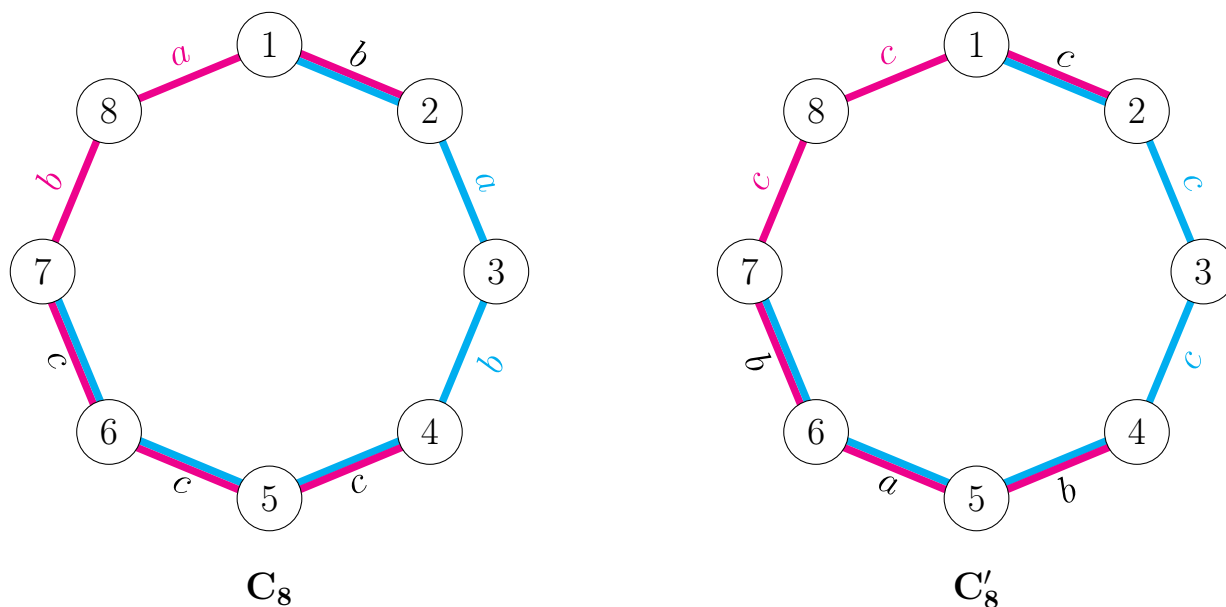


Рис. 18:  $A_7^1$  і  $A_7^2$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

Оскільки спектр зваженого графа є його інваріантом та не залежить від способу нумерації вершин, у всіх розглянутих варіантах підспектри ланцюгів збігаються. Отже, вагову функцію графа-циклу  $C_8$  не можна однозначно відновити за двома підспектрами. Отримуємо теорему 3.8.

**Теорема 3.8.**  $Srn(C_8) = 3$ .

### 3.2.5 Відновлення ваг графа-циклу $C_9$

Для зваженого графа-циклу  $C_9$  розглянемо поставлену задачу. Аналогічно до задач відновлення для зважених графів  $C_7$  та  $C_8$ , залишилося розглянути випадки 3.3 та 4.2.

Розглянемо всі комбінації двох підграфів, що відповідають випадку 3.3, тобто таких ланцюгів  $A_k$  і  $A_m$ , які перетинаються на одному з кінців і для яких виконується умова:  $|E(A_k \cap A_m)| > \max(|E(A_k \setminus A_m)|, |E(A_m \setminus A_k)|)$ . Можливі такі випадки:

1.  $A_7$  і  $A_8$ , які мають чотири спільні ребра на одному з кінців.
2. Два  $A_8$ , що мають п'ять спільних ребер на одному з кінців.

Для цих випадків покажемо, що спектрів підграфів таких типів недостатньо для відновлення ваг графа-циклу  $C_9$ .

1.  $A_7$  і  $A_8$ , які мають чотири спільні ребра на одному з кінців.

Без обмеження загальності, нехай ланцюг  $A_7$  є індукованим підграфом, який утворений вершинами  $1, 2, \dots, 7$ . Тоді ланцюг  $A_8$  проходить через вершини  $3, 4, \dots, 9, 1$  (див. рисунок 19).

Визначимо ваги графа  $C_9$  на рисунку 19 так:  $a_2 = a_7 = a$ , а всі інші ваги  $a_i = b$  для  $i \neq 2$  та  $i \neq 7$ , де  $a \neq b$ . Для графа  $C'_9$  покладемо:  $a_5 = a$ , а решта ваг  $a_i = b$  для  $i \neq 5$ .

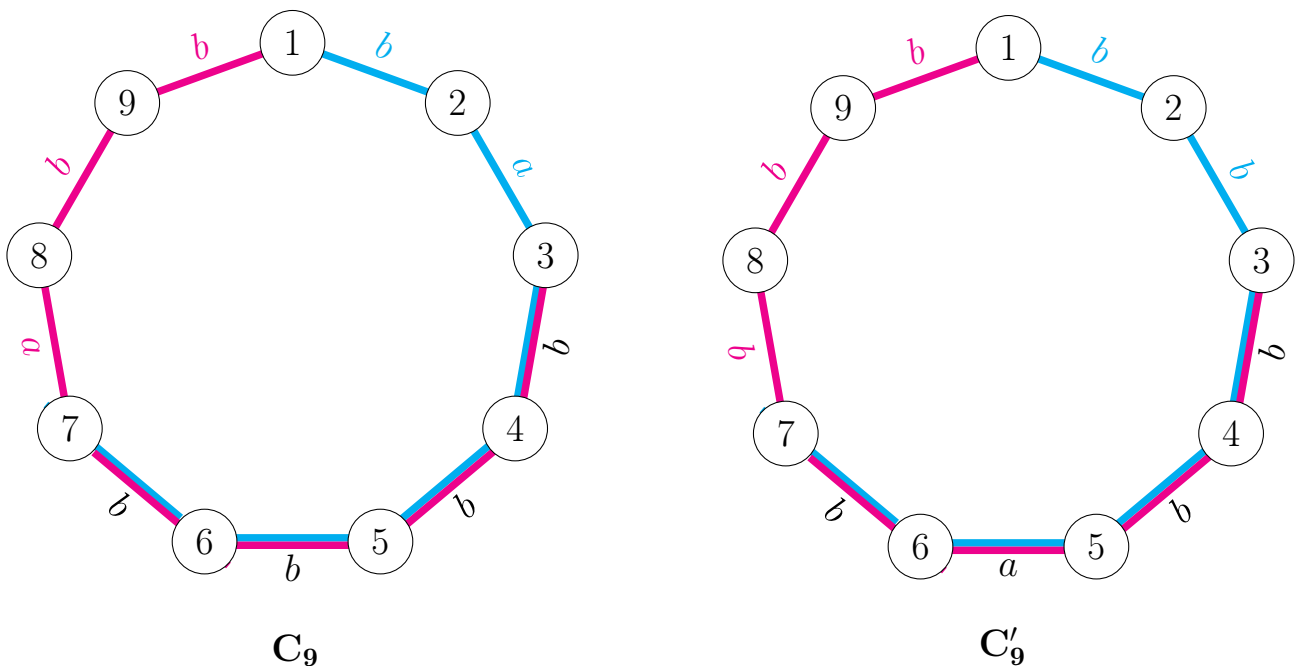


Рис. 19:  $A_7$  і  $A_8$ , які мають чотири спільні ребра на одному з кінців.

2. Два  $A_8$ , що мають п'ять спільних ребер на одному з кінців.

Розглянемо підграфи-ланцюги  $A_8^1$  та  $A_8^2$  графа-циклу  $C_9$ , зображені на рисунку 20.

Для графа  $C_9$  на рисунку 20 задамо вагову функцію таким чином:

$a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = a_9 = a$ ,  $a_3 = a_7 = b$  та  $a_4 = a_8 = c$ , де  $a \neq b$ . Тоді для графа  $C'_9$  на цьому ж рисунку визначимо ваги:  $a_2 = a_3 = a_6 = a_7 = a$ ,  $a_1 = a_5 = a_9 = b$  та  $a_4 = a_8 = c$ .

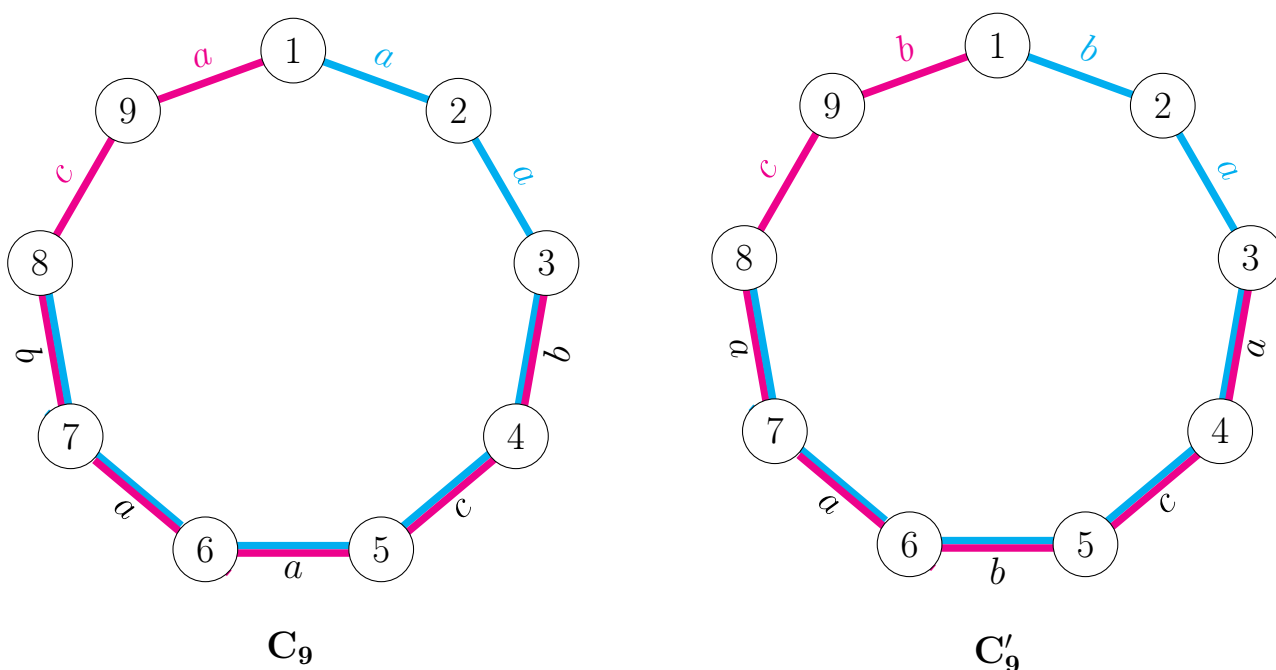


Рис. 20:  $A_8^1$  і  $A_8^2$ , що мають п'ять спільних ребер на одному з кінців.

У всіх варіантах випадку **3.3**, завдяки інваріантності спектра, характеристичні многочлени розглянутих ланцюгів збігаються, тому їх недостатньо для однозначного відновлення ваг графа-циклу  $C_9$ .

Розглянемо всі можливі комбінації двох ланцюгів, що відповідають випадку **4.2**, а саме таких ланцюгів  $A_k$  і  $A_m$ , для яких кількість ребер у двох компонентах зв'язності перетину  $A_k \cap A_m$  є різною. Розрізняємо такі випадки:

1.  $A_6$  і  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.
2. Два  $A_7$ , що перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.
3.  $A_7$  і  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

4. Два  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по чотирьох ребрах на іншому кінці.
5. Два  $A_8$ , які перетинаються по двох ребрах на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

Для наведених випадків доведемо, що за спектрами підграфів відповідних типів неможливо однозначно відновити ваги графа-циклу  $C_9$ .

Для варіантів **1**, **2**, **3** та **5** ідея є аналогічною до тієї, що була застосована для знаходження контрприкладів у випадку **4.2** для графа-циклу  $C_8$ : ваги ребер першої компоненти зв'язності  $A_k \cap A_m$  покладемо рівними  $b$ , другої —  $c$ , де  $b \neq c$ . Інші ваги визначимо, спираючись на ідею перенумерації ланцюгів у зворотному напрямку, а ваги решти ребер позначимо як  $a$ .

**1.**  $A_6$  і  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

Розглянемо ланцюг  $A_6$  з вершинами  $1, 2, \dots, 6$  та ланцюг  $A_8$ , індукований вершинами  $4, 5, \dots, 9, 1$  та  $2$  (див. рисунок 21).

Задамо вагову функцію для графа  $C_9$ , зображеного на рисунку 21:

$a_3 = a_6 = a_7 = a_8 = a$ ,  $a_1 = a_2 = a_9 = b$  та  $a_4 = a_5 = c$ , де  $b \neq c$ . Тоді графа  $C'_9$  на рисунку матимемо:  $a_3 = a_6 = a_7 = a_8 = a$ ,  $a_4 = a_5 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_9 = c$ .

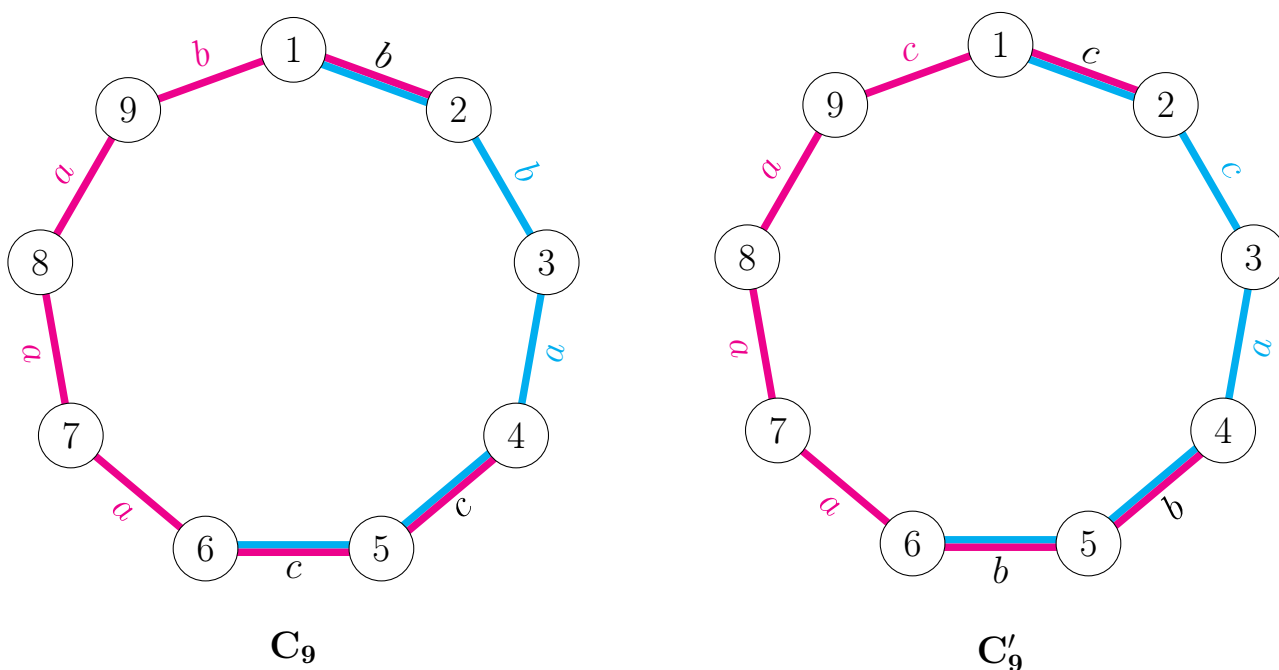


Рис. 21:  $A_6$  і  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

2. Два  $A_7$ , що перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

Нехай перший ланцюг  $A_7^1$  є індукованим вершинами  $1, 2, \dots, 7$ , а другий ланцюг  $A_7^2$  — породжений вершинами  $5, 6, \dots, 9, 1$  та  $2$  (див. рисунок 22).

Для графа  $C_9$  на рисунку 22 задамо ваги:  $a_3 = a_4 = a_7 = a_8 = a$ ,  $a_1 = a_2 = a_9 = b$  та  $a_5 = a_6 = c$ , де  $b \neq c$ . Для графа  $C'_9$  на тому ж рисунку покладемо:  $a_3 = a_4 = a_7 = a_8 = a$ ,  $a_5 = a_6 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_9 = c$ .

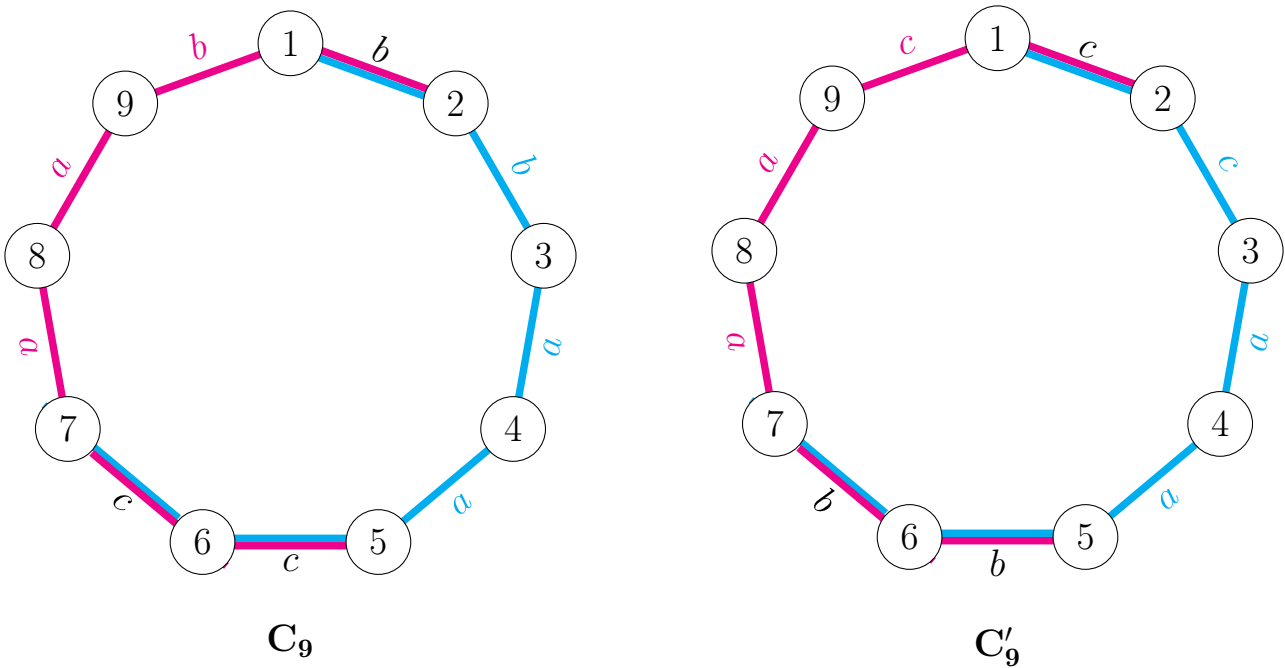


Рис. 22:  $A_7^1$  і  $A_7^2$ , що перетинаються по одному ребру на одному кінці та по двох ребрах на іншому кінці.

3.  $A_7$  і  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

Розглянемо ланцюг  $A_7$ , побудований на вершинах  $1, 2, \dots, 7$ , та ланцюг  $A_8$ , побудований на вершинах  $4, 5, \dots, 9, 1$  і  $2$  (див. рисунок 23).

Визначимо вагову функцію графа  $C_9$ , зображеного на рисунку 23, таким чином:  $a_2 = a_7 = a_9 = a$ ,  $a_1 = a_3 = a_8 = b$  та  $a_4 = a_5 = a_6 = c$ , де  $b \neq c$ . Тоді для графа  $C'_9$  на рисунку 23 матимемо:  $a_5 = a_7 = a$ ,  $a_4 = a_6 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_3 = a_8 = a_9 = c$ .

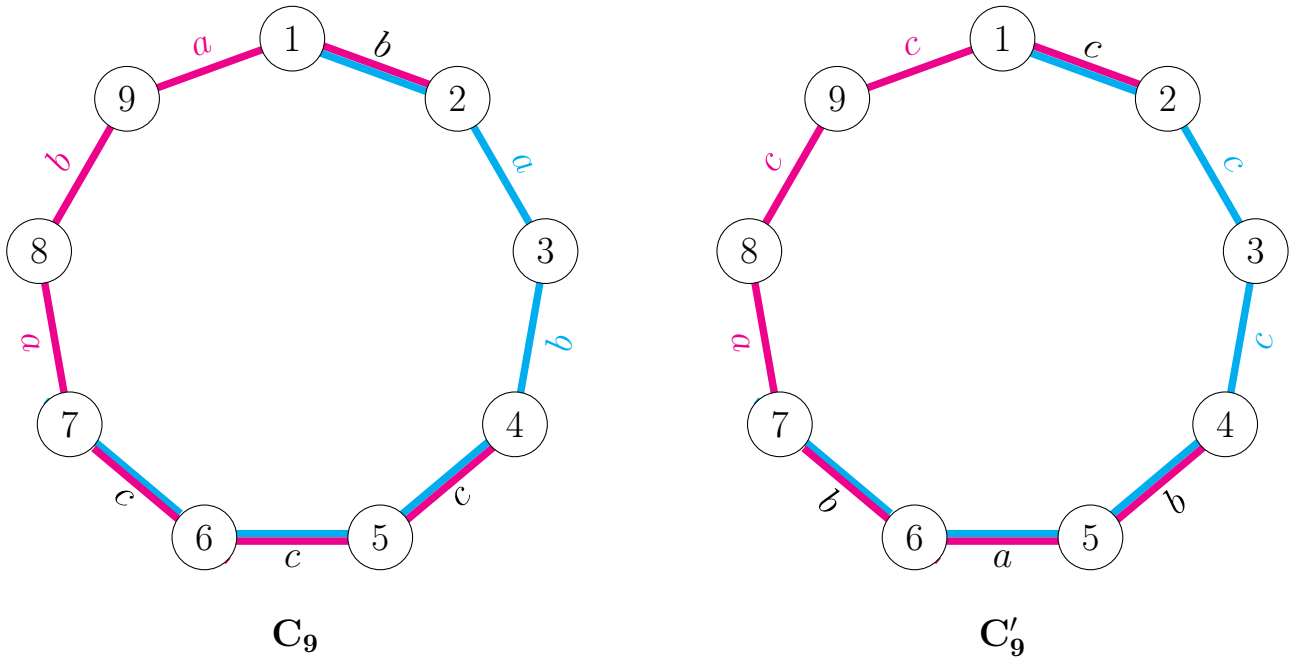


Рис. 23:  $A_7$  і  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

4. Два  $A_8$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по чотирьох ребрах на іншому кінці.

Розглянемо підграфи-ланцюги  $A_8^1$  та  $A_8^2$  графа-циклу  $C_9$ , зображені на рисунку 24.

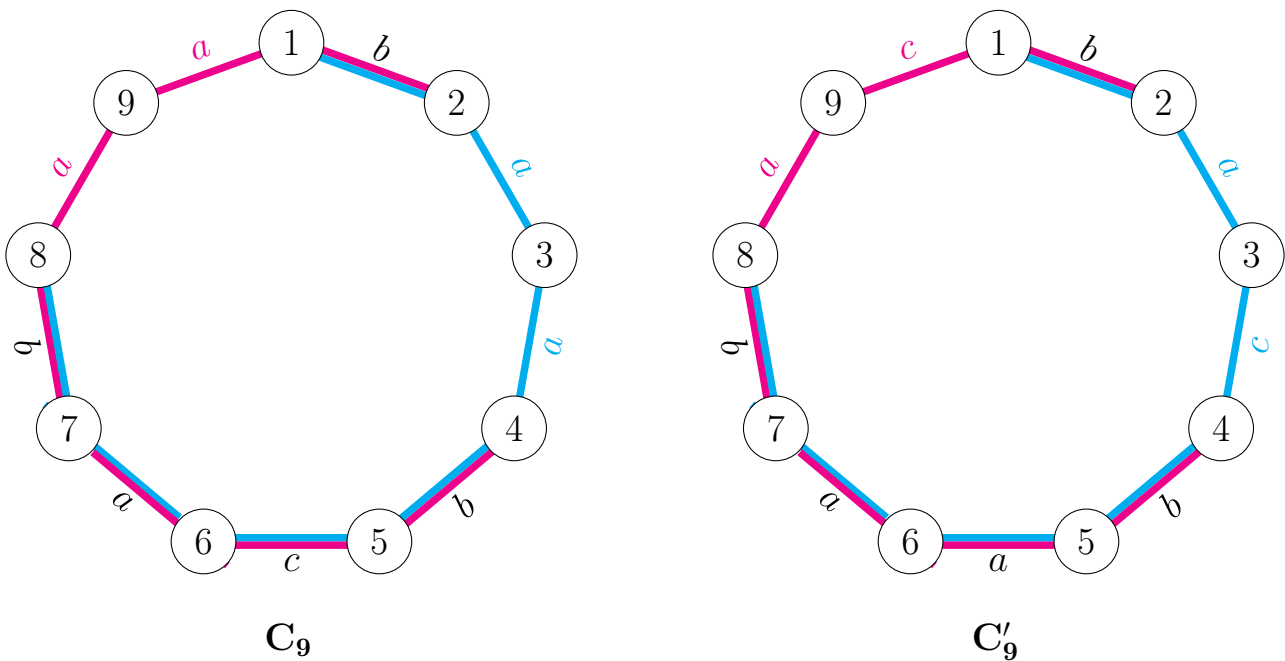


Рис. 24:  $A_8^1$  і  $A_8^2$ , які перетинаються по одному ребру на одному кінці та по чотирьох ребрах на іншому кінці.

Для графа  $\mathbf{C}_9$  на рисунку 24 задамо ваги ребер так:  $a_2 = a_3 = a_6 = a_8 = a_9 = a$ ,  $a_1 = a_4 = a_7 = b$  та  $a_5 = c$ , де  $a \neq c$ . Для графа  $\mathbf{C}'_9$  покладемо:  $a_2 = a_5 = a_6 = a_8 = a$ ,  $a_1 = a_4 = a_7 = b$  та  $a_3 = a_9 = c$ .

5. Два  $A_8$ , які перетинаються по двох ребрах на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

У графі  $\mathbf{C}_9$  розглянемо два підграфи-ланцюги: перший ланцюг  $A_8^1$ , індукований множиною вершин  $1, 2, \dots, 8$ , та другий ланцюг  $A_8^2$ , що побудований на вершинах  $5, 6, \dots, 9, 1, 2$  та  $3$  (див. рисунок 25).

Вагова функція графа  $\mathbf{C}_9$  на рисунку 25 має такий вигляд:  $a_4 = a_8 = a$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_9 = b$  та  $a_5 = a_6 = a_7 = c$ , де  $b \neq c$ . Для графа  $\mathbf{C}'_9$  на рисунку 25 залишимо ваги ребер  $a_4$  та  $a_8$  незмінними, а значення  $b$  та  $c$  поміняємо місцями, тобто:  $a_4 = a_8 = a$ ,  $a_5 = a_6 = a_7 = b$  та  $a_1 = a_2 = a_3 = a_9 = c$ .

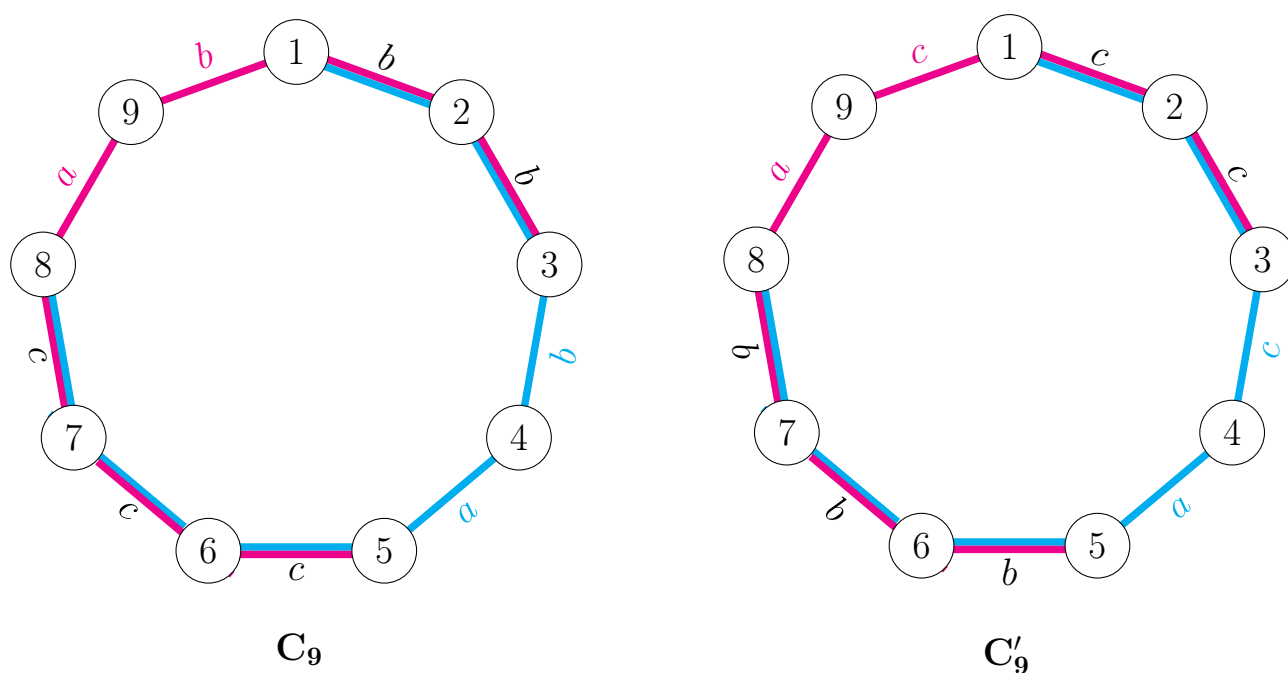


Рис. 25:  $A_8^1$  і  $A_8^2$ , які перетинаються по двох ребрах на одному кінці та по трьох ребрах на іншому кінці.

У всіх розглянутих випадках для графа-циклу  $\mathbf{C}_9$  відповідні спектри підграфів збігаються, оскільки спектр зваженого графа не залежить від нумерації вершин. Звідси випливає, що вагову функцію графа-циклу  $\mathbf{C}_9$  неможливо однозначно відновити за двома підспектрами.

Таким чином, для довільних графів-циклів були проаналізовані випадки 1, 2, 3.1, 3.2 та 4.1. Для графів-циклів  $C_n$ , де  $5 \leq n \leq 9$ , були розглянуті всі

можливі комбінації двох підграфів, зокрема окремо досліджено випадки **3.3** та **4.2**, що залишалися поза межами загального підходу.

На основі цього отримуємо теорему 3.9 про точне значення відновлюючого спектрального числа графів-циклів  $C_n$  для  $5 \leq n \leq 9$ .

**Теорема 3.9.**  $Sr_n(C_n) = 3$  для графа-циклу  $C_n$ , де  $5 \leq n \leq 9$ .

### 3.3 Висновки до розділу 3

У третьому розділі розглянуто та вивчено задачу відновлення ваг зважених графів-циклів. Проаналізовано всі варіанти пар індукованих зв'язних підграфів  $C_n$  і виділено чотири основні випадки. Для деяких із цих варіантів у загальному випадку при  $n \geq 5$  доведено, що двох підграфів відповідного типу недостатньо для однозначного відновлення ваг. Для решти випадків, досліджених для графів-циклів  $C_n$  при  $5 \leq n \leq 9$ , встановлено, що відновлююче спектральне число таких графів дорівнює трьом (теорема 3.9).

## 4 Алгоритм відновлення ваг графа-циклу $C_n$

### 4.1 Побудова алгоритму відновлення ваг графа-циклу

Повторно сформулюємо твердження 3.4 та детально розглянемо його доведення, подане в [5], яке стане основою для подальшої побудови алгоритму відновлення ваг графа-циклу  $C_n$  при  $n \geq 5$ .

**Твердження 3.4.** [5] Для відновлення  $C_n$  для  $n \geq 5$  достатньо таких трьох підспектрів:  $\sigma(C_n - \{2\})$ ,  $\sigma(C_n - \{2, 3\})$  і  $\sigma(C_n - \{5, \dots, n\})$ .

*Доведення.* Розглянемо зважений граф-цикл  $C_n$  та його підграфи-ланцюги  $C_n - \{2\}$ ,  $C_n - \{2, 3\}$  та  $C_n - \{5, \dots, n\}$  (див. рисунок 26).

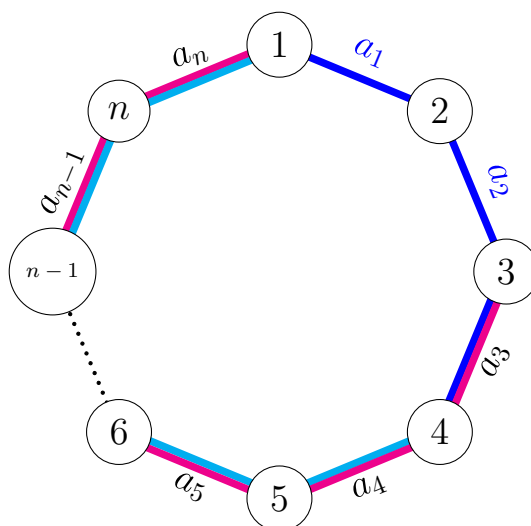


Рис. 26: Зважений граф-цикл  $C_n$ .

Позначимо підграф  $C_n - \{5, \dots, n\}$  через  $A'_4$ , оскільки він є ланцюгом, який індукований вершинами 1, 2, 3 та 4. Підграфи  $C_n - \{2\}$  та  $C_n - \{2, 3\}$  позначимо через  $A_{n-1}$  та  $A_{n-2}$  відповідно. Загалом, підграфи-ланцюги вигляду  $C_n - \{2, 3, \dots, k\}$ , де  $k \leq n$ , будемо позначати через  $A_{n-k+1}$ .

Припустимо, що спектри підграфів  $A'_4$ ,  $A_{n-1}$  та  $A_{n-2}$  відомі, тоді можна обчислити і їхні характеристичні многочлени  $P_{A'_4}$ ,  $P_{A_{n-1}}$  та  $P_{A_{n-2}}$ .

Відповідно до формули (6) із прикладу 2.42 характеристичний многочлен  $P_{A'_4}$  має вигляд:

$$P_{A'_4}(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 + a_1^2 a_3^2.$$

Оскільки многочлен  $P_{\mathbf{A}'_4}$  відомий, то його коефіцієнти теж відомі. Нехай  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = k_1$  та  $a_1^2 a_3^2 = k_2$ , де  $k_1$  та  $k_2$  — відомі константи.

За узагальненням теореми Захса 2.36, для підграфа-ланцюга  $\mathbf{A}_{n-1}$  коефіцієнт при  $\lambda^{n-3}$  у многочлені  $P_{\mathbf{A}_{n-1}}(\lambda)$  дорівнює  $-(a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2)$ . Аналогічно, для підграфа-ланцюга  $\mathbf{A}_{n-2}$  коефіцієнт при  $\lambda^{n-4}$  у многочлені  $P_{\mathbf{A}_{n-2}}(\lambda)$  дорівнює  $-(a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2)$ .

Оскільки многочлени  $P_{\mathbf{A}_{n-1}}$  та  $P_{\mathbf{A}_{n-2}}$  відомі, то їхні коефіцієнти теж відомі. Нехай  $a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = k_3$  та  $a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = k_4$ . Тоді можемо обчислити значення ваги  $a_3$ :

$$a_3^2 = (a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2) - (a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2) = k_3 - k_4,$$

$$a_3 = \sqrt{k_3 - k_4}.$$

З рівності  $a_1^2 a_3^2 = k_2$  знаходимо вагу  $a_1$ :

$$a_1^2 = \frac{k_2}{a_3^2} = \frac{k_2}{k_3 - k_4},$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_3 - k_4}}.$$

Знаючи значення  $a_1$  та  $a_3$ , обчислюємо  $a_2$  із рівняння  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = k_1$ :

$$a_2^2 = k_1 - a_1^2 - a_3^2 = k_1 - k_3 + k_4 - \frac{k_2}{k_3 - k_4},$$

$$a_2 = \sqrt{k_1 - k_3 + k_4 - \frac{k_2}{k_3 - k_4}}.$$

Залишилось відновити ваги  $a_4, a_5, \dots, a_n$  підграфа-ланцюга  $\mathbf{A}_{n-2}$ .

Застосуємо наслідок з теореми Швенка 2.39 для характеристичного многочлена  $P_{\mathbf{A}_{n-1}}$  та отримаємо:

$$P_{\mathbf{A}_{n-1}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_{n-2}}(\lambda) - a_3^2 P_{\mathbf{A}_{n-3}}(\lambda).$$

Оскільки  $P_{\mathbf{A}_{n-1}}$ ,  $P_{\mathbf{A}_{n-2}}$  та  $a_3$  відомі, можемо знайти характеристичний многочлен  $P_{\mathbf{A}_{n-3}}$  ланцюга  $\mathbf{A}_{n-3} = \mathbf{C}_n - \{2, 3, 4\}$ :

$$P_{\mathbf{A}_{n-3}}(\lambda) = \frac{1}{a_3^2} (\lambda P_{\mathbf{A}_{n-2}}(\lambda) - P_{\mathbf{A}_{n-1}}(\lambda)).$$

Аналогічно, за узагальненням теореми Захса 2.36, для підграфа-ланцюга  $\mathbf{A}_{n-3}$  коефіцієнт при  $\lambda^{n-5}$  у многочлені  $P_{\mathbf{A}_{n-3}}(\lambda)$  рівний  $-(a_5^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2)$ .

Позначимо це значення через  $k_5$ , тобто  $a_5^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = k_5$ . Таким чином, можна обчислити значення ваги  $a_4$ :

$$a_4^2 = (a_4^2 + a_5^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2) - (a_5^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2) = k_4 - k_5,$$

$$a_4 = \sqrt{k_4 - k_5}.$$

Продовжуючи цей процес, можна послідовно відновити ваги  $a_5, a_6, \dots, a_{n-1}$  та обчислити характеристичні многочлени  $P_{\mathbf{A}_{n-4}}, P_{\mathbf{A}_{n-3}}, \dots, P_{\mathbf{A}_2}$ .

На останньому кроці обчислюємо вагу  $a_n$ . Характеристичний многочлен для підграфа-ребра  $\mathbf{A}_2$  має вигляд  $P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \lambda^2 - a_n^2$ . Оскільки коефіцієнти цього многочлена відомі, можна однозначно визначити значення  $a_n$ .

Отже, ми можемо повністю відновити ваги графа-циклу  $\mathbf{C}_n$  при  $n \geq 5$ . ■

Спираючись на доведення твердження 3.4, сформулюємо алгоритм відновлення ваг графа-циклу  $\mathbf{C}_n$  для  $n \geq 5$ .

#### Алгоритм відновлення ваг графа-циклу $\mathbf{C}_n$ при $n \geq 5$

**Вхідні дані:** підспектри  $\sigma(\mathbf{C}_n - \{2\})$ ,  $\sigma(\mathbf{C}_n - \{2, 3\})$  і  $\sigma(\mathbf{C}_n - \{5, \dots, n\})$  зваженого графа-циклу  $\mathbf{C}_n$ .

**Вихідні дані:** ваги ребер  $a_1, a_2, \dots, a_n$  графа  $\mathbf{C}_n$ .

1. Обчислюємо характеристичні многочлени вказаних підграфів за їхніми заданими спектрами. Підграфи вигляду  $\mathbf{C}_n - \{2, 3, \dots, k\}$  позначаємо через  $\mathbf{A}_{n-k+1}$ , а відповідні характеристичні многочлени — через  $P_{\mathbf{A}_{n-k+1}}$ .
2. Обчислюємо вагу  $a_3$ :
  - За коефіцієнтом  $-k_3$  при  $\lambda^{n-3}$  у многочлені  $P_{\mathbf{A}_{n-1}}(\lambda)$  отримаємо значення  $k_3 = a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2$ .
  - За коефіцієнтом  $-k_4$  при  $\lambda^{n-4}$  у  $P_{\mathbf{A}_{n-2}}(\lambda)$  отримаємо  $k_4 = a_4^2 + \dots + a_n^2$ .
  - Обчислюємо  $a_3^2 = k_3 - k_4$ , звідки  $a_3 = \sqrt{k_3 - k_4}$ .
3. Характеристичний многочлен  $\mathbf{A}'_4 := \mathbf{C}_n - \{5, \dots, n\}$  записуємо у вигляді:

$$P_{\mathbf{A}'_4}(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 + a_1^2 a_3^2.$$

4. Обчислюємо вагу  $a_1$ :

- За вільним коефіцієнтом  $k_2$  многочлена  $P_{\mathbf{A}'_4}(\lambda)$  отримаємо  $k_2 = a_1^2 a_3^2$ .
- Обчислюємо  $a_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_3 - k_4}}$ .

5. Обчислюємо вагу  $a_2$ :

- За коефіцієнтом  $-k_1$  при  $\lambda^2$  у  $P_{\mathbf{A}'_4}(\lambda)$  маємо значення  $k_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ .
- Обчислюємо  $a_2 = \sqrt{k_1 - k_3 + k_4 - \frac{k_2}{k_3 - k_4}}$ .

6. Відновлюємо ваги  $a_4, \dots, a_{n-1}$ .

Для кожного  $i = 4, 5, \dots, n - 1$ :

- Записуємо  $P_{\mathbf{A}_{n-i+3}}(\lambda)$  за формулою Швенка (3):

$$P_{\mathbf{A}_{n-i+3}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{A}_{n-i+2}}(\lambda) - a_{i-1}^2 P_{\mathbf{A}_{n-i+1}}(\lambda). \quad (7)$$

- Оскільки  $P_{\mathbf{A}_{n-i+3}}(\lambda)$ ,  $P_{\mathbf{A}_{n-i+2}}(\lambda)$  та  $a_{i-1}$  відомі, обчислюємо характеристичний многочлен  $P_{\mathbf{A}_{n-i+1}}(\lambda)$  за формулою (7):

$$P_{\mathbf{A}_{n-i+1}}(\lambda) = \frac{1}{a_{i-1}^2} (\lambda P_{\mathbf{A}_{n-i+2}}(\lambda) - P_{\mathbf{A}_{n-i+3}}(\lambda)).$$

- За коефіцієнтом  $-k_i$  при  $\lambda^{n-i}$  у многочлені  $P_{\mathbf{A}_{n-i+2}}(\lambda)$  отримаємо значення  $k_i = a_i^2 + a_{i+1}^2 + \dots + a_n^2$ .
- За коефіцієнтом  $-k_{i+1}$  при  $\lambda^{n-i-1}$  у  $P_{\mathbf{A}_{n-i+1}}(\lambda)$ :  $k_{i+1} = a_{i+1}^2 + \dots + a_n^2$ .
- Обчислюємо  $a_i^2 = k_i - k_{i+1}$ , звідки  $a_i = \sqrt{k_i - k_{i+1}}$ .

7. Записуємо характеристичний многочлен  $P_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \lambda^2 - a_n^2$ , який відомий з попереднього кроку. За його вільним коефіцієнтом  $-k_n$  обчислюємо вагу  $a_n = \sqrt{k_n}$ .

## 4.2 Застосування алгоритму до графа-циклу $\mathbf{C}_6$

Розглянемо приклад відновлення ваг зваженого графа-циклу  $\mathbf{C}_6$  на основі трьох заданих підспектрів. Для цього скористаємося алгоритмом, сформульованим у підрозділі 4.1.

Нехай задано граф-цикл  $\mathbf{C}_6$ , зображений на рисунку 27. Потрібно відновити всі його ваги за спектрами таких підграфів:  $\mathbf{C}_6 - \{2\}$ ,  $\mathbf{C}_6 - \{2, 3\}$  та  $\mathbf{C}_6 - \{5, 6\}$ :

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{C}_6 - \{2\}) &= \{-\sqrt{19}, -3, 0, 3, \sqrt{19}\}, \\ \sigma(\mathbf{C}_6 - \{2, 3\}) &= \left\{ \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}, \\ \sigma(\mathbf{C}_6 - \{5, 6\}) &= \{-\sqrt{5} - \sqrt{2}, -\sqrt{5} + \sqrt{2}, \sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} + \sqrt{2}\}.\end{aligned}$$

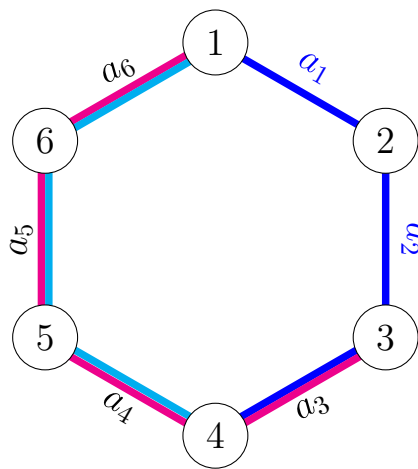


Рис. 27: Зважений граф-цикл  $\mathbf{C}_6$ .

1. Обчислюємо характеристичні многочлени підграфів  $\mathbf{C}_6 - \{2\}$ ,  $\mathbf{C}_6 - \{2, 3\}$  та  $\mathbf{C}_6 - \{5, 6\}$  за їхніми заданими спектрами:

$$P_{\mathbf{C}_6 - \{2\}}(\lambda) = \lambda (\lambda + \sqrt{19}) (\lambda - \sqrt{19}) (\lambda + 3) (\lambda - 3) = \lambda^5 - 28\lambda^3 + 171\lambda;$$

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{C}_6 - \{2,3\}} &= \left( \lambda - \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \right) \left( \lambda - \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \right) \left( \lambda - \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right) \\ &\cdot \left( \lambda - \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right) = \lambda^4 - 19\lambda^2 + 9;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{C}_6 - \{5,6\}} &= (\lambda + \sqrt{5} + \sqrt{2}) (\lambda + \sqrt{5} - \sqrt{2}) (\lambda - \sqrt{5} + \sqrt{2}) \\ &\cdot (\lambda - \sqrt{5} - \sqrt{2}) = \lambda^4 - 14\lambda^2 + 9.\end{aligned}$$

2. Обчислюємо вагу  $a_3$ :

- За коефіцієнтом  $-28$  при  $\lambda^3$  у многочлені  $P_{\mathbf{C}_6 - \{2\}}(\lambda)$  маємо значення  $a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 28$ .

- За коефіцієнтом  $-19$  при  $\lambda^2$  у  $P_{\mathbf{C}_6-\{2,3\}}(\lambda)$  отримаємо  $a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 19$ .
- Обчислюємо  $a_3^2 = 28 - 19 = 9$ , звідси  $a_3 = 3$ .

3. Характеристичний многочлен  $\mathbf{C}_6 - \{5, 6\}$  дорівнює:

$$P_{\mathbf{C}_6-\{5,6\}}(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 + a_1^2 a_3^2 = \lambda^4 - 14\lambda^2 + 9.$$

4. Обчислюємо вагу  $a_1$ :

- За вільним коефіцієнтом 9 многочлена  $P_{\mathbf{C}_6-\{5,6\}}(\lambda)$  маємо  $a_1^2 a_3^2 = 9$ .
- Обчислюємо  $a_1 = \sqrt{\frac{9}{a_3^2}} = \sqrt{\frac{9}{3^2}} = 1$ .

5. Обчислюємо вагу  $a_2$ :

- За коефіцієнтом  $-14$  при  $\lambda^2$  у  $P_{\mathbf{C}_6-\{5,6\}}(\lambda)$  маємо  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 14$ .
- Обчислюємо  $a_2 = \sqrt{14 - a_1^2 - a_3^2} = \sqrt{14 - 1^2 - 3^2} = \sqrt{4} = 2$ .

6. Відновлюємо ваги  $a_4$  та  $a_5$ .

Записуємо  $P_{\mathbf{C}_6-\{2\}}(\lambda)$  за формулою Швенка (3):

$$P_{\mathbf{C}_6-\{2\}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{C}_6-\{2,3\}}(\lambda) - a_3^2 P_{\mathbf{C}_6-\{2,3,4\}}(\lambda).$$

Звідси обчислюємо характеристичний многочлен  $P_{\mathbf{C}_6-\{2,3,4\}}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{C}_6-\{2,3,4\}}(\lambda) &= \frac{1}{a_3^2} (\lambda P_{\mathbf{C}_6-\{2,3\}}(\lambda) - P_{\mathbf{C}_6-\{2\}}(\lambda)) = \\ &= \frac{1}{3^2} (\lambda(\lambda^4 - 19\lambda^2 + 9) - (\lambda^5 - 28\lambda^3 + 171\lambda)) = \lambda^3 - 18\lambda. \end{aligned}$$

За коефіцієнтом  $-18$  при  $\lambda$  у  $P_{\mathbf{C}_6-\{2,3,4\}}(\lambda)$  маємо:  $a_5^2 + a_6^2 = 18$ . Тоді знаходимо  $a_4^2 = 19 - 18 = 1$ , звідси  $a_4 = 1$ .

Повторюємо той самий крок для обчислення ваги  $a_5$ . Аналогічно, записуємо  $P_{\mathbf{C}_6-\{2,3\}}(\lambda)$  за формулою Швенка (3):

$$P_{\mathbf{C}_6-\{2,3\}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{C}_6-\{2,3,4\}}(\lambda) - a_4^2 P_{(6,1)}(\lambda).$$

Звідси обчислюємо характеристичний многочлен підграфу-ребра  $P_{(6,1)}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} P_{(6,1)}(\lambda) &= \frac{1}{a_4^2} (\lambda P_{\mathbf{C}_6-\{2,3,4\}}(\lambda) - P_{\mathbf{C}_6-\{2,3\}}(\lambda)) = \\ &= \frac{1}{1^2} (\lambda(\lambda^3 - 18\lambda) - (\lambda^4 - 19\lambda^2 + 9)) = \lambda^2 - 9. \end{aligned}$$

За вільним коефіцієнтом  $-9$  у  $P_{(6,1)}(\lambda)$  маємо  $a_6^2 = 9$ . Тоді отримаємо  $a_5^2 = 18 - 9 = 9$ , звідси  $a_5 = 3$ .

7. Із характеристичного многочлена  $P_{(6,1)}(\lambda)$  обчислюємо вагу  $a_6 = \sqrt{9} = 3$ .

Отже, всі ваги зваженого графу-циклу  $\mathbf{C}_6$  були відновлені:  $a_1 = a_4 = 1$ ,  $a_2 = 2$  та  $a_3 = a_5 = a_6 = 3$ .

### 4.3 Висновки до розділу 4

У четвертому розділі подано алгоритм відновлення вагової функції графу-циклу  $\mathbf{C}_n$  при  $n \geq 5$  за трьома підспектрами, визначеними у твердженні 3.4. Роботу алгоритму проілюстровано на прикладі графа  $\mathbf{C}_6$ , для якого поетапно відновлено ваги ребер.

## Висновки

У цій кваліфікаційній роботі наведено дослідження обернених спектральних задач для зважених графів-циклів.

Другий розділ присвячено викладенню основ теорії графів і спектральної теорії зважених графів. Зокрема, подано теореми для обчислення визначника та характеристичного многочлена зваженого графа, а також наведено приклади їх застосування.

У третьому розділі сформульовано постановку задачі відновлення ваг зваженого графа в загальному випадку та для графів-циклів  $C_n$ . Розглянуто всі можливі комбінації двох індукованих зв'язних підграфів графа  $C_n$  та класифіковано їх на чотири основні випадки. Для випадків **1**, **2**, а також підвипадків **3.1**, **3.2** і **4.1** показано, що двох підграфів відповідних типів недостатньо для однозначного відновлення ваг графа  $C_n$ . Решту випадків досліджено для графів-циклів  $C_n$  при  $5 \leq n \leq 9$ , і доведено, що відновлююче спектральне число таких графів дорівнює трьом (теорема 3.9).

У четвертому розділі детально описано алгоритм відновлення вагової функції зваженого графа-циклу  $C_n$  для  $n \geq 5$  за спектрами трьох підграфів-ланцюгів, визначених у твердженні 3.4. Для демонстрації роботи алгоритму розглянуто приклад відновлення ваг графа-циклу  $C_6$ , у якому поетапно обчислено всі ваги ребер на основі заданих підспектрів. Це підтверджує ефективність і практичну придатність методу для задач відновлення ваг графів-циклів.

До перспектив подальшого дослідження відноситься задача знаходження точного значення спектрального відновлюючого числа для графів-циклів з  $n$  вершинами для довільного  $n \geq 10$ .

## Список літератури

- [1] Cvetković D. *Applications of graph spectra: An introduction to the literature* // Zbornik Radova. — 2011. — Vol. 22. — P. 9–34.
- [2] Salim A., Sumitra S. *Spectral graph convolutional neural networks in the context of regularization theory* // IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst. — 2024. — Vol. 35, No. 4. — P. 4373–4384.
- [3] Chu M.T., Golub G.H. *Structured inverse eigenvalue problems* // Acta Numerica. — 2002. — Vol. 11. — P. 1–71.
- [4] Тимошкевич Л.М. *Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах* // Наук. часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — Т. 14. — С. 165–175.
- [5] Тимошкевич Л.М. *Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06.* — Київ, 2015. — 160 с.
- [6] Пилипів О.В. *Обернені спектральні задачі на зважених графах. Кваліфікаційна робота.* — Київ: Нац. ун-т «Києво-Могилянська академія», 2022. — 35 с.
- [7] Соколова Т. І., Тимошкевич Л. М. *Відновлююче спектральне число графа-циклу  $C_n$* , XIII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Збірник тез конференції (м.Київ 9-10 травня 2025 р.) — С. 135–136.
- [8] Трохимчук Р.М., Никітченко М.С. *Дискретна математика у прикладах і задачах: навч. посіб.* — С. 161–175. URL: [http://csc.knu.ua/media/filer\\_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete\\_mathematics.pdf](http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf) (дата звернення: 28.05.2025).
- [9] Swamy M.N.S., Thulasiraman K. *Graphs, Networks, and Algorithms.* — 1st ed. — New York : Wiley, 1981. — 612 p.

- [10] Cvetković D., Doob M., Sachs H. *Spectra of graphs*. — New York: Academic Press, 1980. — 368 p.
- [11] Harary F. *The determinant of the adjacency matrix of a graph* // SIAM Rev. — 1962. — Vol. 4. — P. 202–210.
- [12] Schwenk A. J. *Computing the characteristic polynomial of a graph* // Graphs and Combinatorics. — 1974. — Vol. 406 of Lecture Notes in Mathematics. — P. 153–172. — AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [13] Пилипіва О.В., Тимошкевич Л.М. *Обернені спектральні задачі для зв'язених графів* // Могилян. матем. журн. — 2022. — Т. 5. — С. 26–32.
- [14] Sachs H. *Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakteristischen Polynom* // Publ. Math. Debrecen. — 1964. — Bd. 11. — S. 119–134.