

АФІННА ГРУПА ЯК ПІДГРУПА ГРУПИ БІРЕГУЛЯРНИХ АВТОМОРФІЗМІВ АФІННОГО ПРОСТОРУ

Композиції елементарних поліноміальних перетворень з лінійними утворюють важливий клас оборотних поліноміальних відображень, які називаються ручними. Показано, що будь-яке нелінійне трикутне перетворення разом з афінною групою породжують усю групу ручних перетворень. З іншого боку, група трикутних перетворень разом з деякими афінними перетвореннями породжує групи, які можна розглядати як нелінійні аналоги параболічних підгруп.

Афінна група AGL_n складається з перетворень афінного простору A_n , що зберігають просте відношення трьох точок і є класичним об'єктом сучасної математики. З іншого боку, її елементи можна розглядати як автоморфізми алгебри поліномів $K[x] = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (лінійні заміни змінних), а саму AGL_n — як підгрупу групи $GA_n = \text{Aut}_K K[x]$; останню можна визначити і як групу біраціональних автоморфізмів афінного простору A^n , що має структуру алгебраїчного многовиду. Іноді GA_n називають афінною групою Кремони. Над скінченним полем для GA_n збігається з дією симетричної групи і, як показано в [1], AGL_n майже завжди є максимальною підгрупою у відповідній симетричній групі. На відміну від AGL_n , група GA_n не є алгебраїчною у звичайному сенсі, але, як показано в [2], GA_n можна розглядати як нескінченновимірну алгебраїчну групу, тобто вона є індуктивною границею скінченновимірних алгебраїчних многовидів. Виявляється (див. [3, 4]), що AGL_n є максимальною замкненою у вищезгаданій топології підгрупою GA_n .

Метою цієї праці є дослідження властивостей афінної групи як абстрактної підгрупи GA_n . Наведемо необхідні факти про будову GA_n .

Елементи GA_n можна зображувати наборами поліномів:

$$(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)). \quad (1)$$

Груповою операцією є композиція наборів. При цьому нейтральним (одичинним) елементом є

$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Елементи, у яких

$$f_i = x_i + h(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}),$$

$i = 1, 2, \dots, n$, утворюють підгрупу U_n унітрикутних перетворень афінного простору A^n , яку природно розглядати як ітерований алгебраїчний винцевий степінь адитивної групи K^+ . При цьому маємо занурення $U_{n-1} \hookrightarrow U_n$, образ якого складається з елементів, у яких $h_n \equiv 0$. Надалі U_{n-1} буде ототожнюватися з її образом при такому зануренні. За такої домовленості маємо розклад у напівпрямий добуток $U_n = U_{n-1} \cdot F_n$, де елементи з $F_n \cong K[x_1, \dots, x_{n-1}]^+$ мають форму

$$v = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + a(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \rangle,$$

і природні гомоморфізми $\pi_k : U_n \rightarrow U_k$. Введемо частковий порядок $<$ на елементах бази таким чином: мономи $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}$ впорядковуються згідно з оберненим лексикографічним порядком вектора степенів; елементи бази знаходяться у відношенні $<$, якщо в цьому відношенні знаходяться найстарші мономи їх останніх координат. При цьому найменшим елементом буде X . Якщо $a < b$, $a, b \in F_n$, то будемо говорити, що елемент b має більшу висоту, ніж a . Нехай

$$u = \langle x_1 + h_1, x_2 + h_2(x_1), \dots, x_n + h_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \rangle \in U_n.$$

Для останньої координати елементів $v^u = u^{-1}vu$,

$[v, u] = v^{-1}v^u \in F_n$ маємо такі формули

$$[v^u]_n = x_n + a^u; \quad (2)$$

$$[[v, u]]_n = [v^u]_n - a(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (3)$$

де a^u — результат дії елемента u як автоморфізму алгебри поліномів на a ; при цьому відзначимо, що $[[v, u]]_n \prec v$. Нормалізатором U_n в GA_n є група B_n трикутних перетворень, елементи якої мають вигляд:

$$\langle \alpha_1 x_1 + h_1, \dots, \alpha_n x_n + h_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \rangle \quad (4)$$

($\alpha_i \in K^*$). Легко бачити, що, як і в лінійній групі, група трикутних перетворень є напівпрямим добутком алгебраїчного тору, елементи якого мають вигляд $\langle \alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n \rangle$, і групи U_n . Елементи (1), для яких $\deg f_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$, утворюють афінну підгрупу $AGL_n = GL_n \cdot A_n^+$. Елементи GL_n іноді представлятимуться звичайними матрицями, а автоморфізми перейменування змінних позначатимуться відповідною перестановкою; наприклад, $(12) = \langle x_2, x_1, x_3 \rangle$ при $n = 3$. Елементи канонічного базису арифметичного векторного простору K^n позначатимуться $\vec{e}_i$, тоді елементи $c_i = X + t\vec{e}_i, t \in K, i = 1, 2, \dots, n$ породжують групу трансляцій (зсувів) A_n^+ , а елементи бази F_n матимуть вигляд

$$X + h(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \vec{e}_n.$$

Означення. Згідно з [5], перетворення афінного простору вигляду

$$x_i \rightarrow x_i + a(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_j \rightarrow x_j$$

($j \neq i$) називається елементарним; перетворення, які є ітерованими композиціями елементарних та лінійних перетворень, називаються ручними. Група ручних автоморфізмів позначатиметься TGA_n (T — tame).

Очевидно, що будь-яке елементарне перетворення спряжене з трикутним і будь-яке трикутне перетворення є ручним, тому групу ручних автоморфізмів можна визначити і таким чином: $TGA_n = \langle AGL_n, B_n \rangle$. У розмірності $n = 2$ добре відома

Теорема 1. ([6, 7]) $GA_2 = AGL_2 * B_2$, де $*$ — означає амальгамований добуток, а група трикутних афінних перетворень є перетином співмножників.

Як наслідок, отримуємо $TGA_2 = GA_2$. Питання про те, чи існують дикі автоморфізми у вищих розмірностях, досі залишається відкритим, про що свідчить

Гіпотеза 1. (Нагата, [7]) Автоморфізм

$$\langle x_1 - 2x_2(x_2^2 + x_3x_1) - x_3(x_2^2 + x_3x_1)^2, x_2 + x_3(x_2^2 + x_3x_1), x_3 \rangle$$

афінного простору не є ручним.

Розглянемо найпростіші елементарні нелінійні перетворення

$$\begin{aligned} \tau_n^{(m)} &= X + x_1^{m+1} \vec{e}_n = \\ &= \langle x_1, x_2, \dots, x_n + x_1^{m+1} \rangle, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

афінного простору і покладемо

$$Q_n^m = \langle AGL_n, \tau_n^{(m)} \rangle.$$

Як наслідок вищезгаданого результату про алгебраїчну максимальність AGL_n , маємо $GA_n = \overline{Q_n^m}$ для довільного m . Оскільки при $n > 2$ питання про те, чи можна зняти ризик замикання, упирається в гіпотезу Нагати, то природним виглядає послаблене питання: чи має місце рівність $TGA_n = Q_n^m$ для якого-небудь m ? У розмірності 2 це неправильно, про що свідчить

Лема 1. У розмірності $n = 2$ підгрупи $Q_2^m, m = 0, 1, 2, \dots$ утворюють строго зростаючий ланцюг підгруп

$$AGL_2 = Q_2^0 \subset Q_2^1 \subset Q_2^2 \subset \dots \subset Q_2^m \subset \dots,$$

причому $\bigcup_{m=0}^{+\infty} Q_2^m = GA_2$.

Доведення. Скориставшись комутаторами трансляцій $(x_1 + 1, x_2) \in B_2 \cap AGL_2$, з елементів $\tau_2^{(m)}$ можна отримати всі трикутні елементи степеня меншого m . З іншого боку, трикутні елементи більшого степеня отримати неможливо, бо це б суперечило однозначності розкладу елемента в амальгамованому добутку. Зокрема, трикутний елемент має амальгамовану довжину 1 і його представлення як композиції іншого трикутного та афінних перетворень можливе лише тоді, коли ці афінні перетворення є лінійно-трикутними. Але множення на ці елементи також приводять до трикутних елементів і не підвищують степінь елемента. Отже, елемент $\tau_2^{(m+1)}$ неможливо представити як композицію трикутних елементів меншого степеня та лінійних перетворень. Легко бачити, що всі трикутні елементи належатимуть об'єднанню підгруп Q_2^{m+1} , звідки й випливає, що воно збігається з GA_2 .

У розмірностях, вищих за 2, ситуація значно складніша. Добре відомо, що вже група GA_3 не розкладається в амальгамований добуток вказаного типу. Зокрема, легко отримати рівність

$$\begin{aligned} (\tau_3^{(1)})^{(1,2)} \cdot (\tau_3^{(1)})^{(2,3)} &= \\ &= \langle x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + (x_2 + x_1^2)^2 \rangle, \end{aligned}$$

яка означає, що за допомогою лінійних перетворень (у даному випадку перестановок) можна з трикутних перетворень отримувати трикутні перетворення вищого степеня. Крім того, як відзначено в [8], наявність прикладу Баса нетриангульованої K^+ дії має наслідком неможливість розкладу GA_3 в амальгамований добуток AGL_3 з якою-небудь підгрупою B_3 . У цій праці буде показано, що має місце рівність $TGA_n = \langle AGL_n, t \rangle$, $n \geq 3$, де t — довільний нелінійний трикутний елемент, і це є головним результатом роботи. Зокрема він означає відсутність ланцюга, наведеного в лемі 1. У цих розмірностях будемо мати $Q_n^m = TGA_n$ для всіх $m > 0$. Наступна лема носить допоміжний характер.

Лема 2. Якщо $G = \langle U_{n-1}, t \rangle$ — підгрупа U_n ,

$$t = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \\ x_n + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \rangle \in F_n,$$

то всі елементи F_n , менші за порядком $\prec$, також належать U_n .

Доведення. Доведення проведемо індукцією по порядку $\prec$. Оскільки для $f = \text{const}$ меншим за елемент t може бути лише X , то база індукції очевидна. Поліном f можна представити у вигляді

$$f = Ax_r^{k_r} x_{r+1}^{k_{r+1}} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}} + R, \quad (k_r \neq 0)$$

найстаршого монома та полінома, меншого за висотою. Покладемо

$$g = \langle x_1, x_2, \dots, x_r + Bx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{r-1}^{k_{r-1}}, \\ x_{r+1}, \dots, x_n \rangle \in U_{n-1}.$$

Згідно з формулою (3) маємо таку формулу комутатора:

$$[t, g]_n = x_n + abk_r x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{r-1}^{k_{r-1}} x_r^{k_r-1} x_{r+1}^{k_{r+1}} \dots \\ \dots, x_{n-1}^{k_{n-1}} + R_1,$$

де перший моном більший по висоті за R_1 . За припущенням індукції, $\langle x_1, x_2, \dots, x_n + R_1 \rangle \in G$, крім того, коефіцієнт b можна вибирати довільним, отже всі елементи, менші за t , належать G .

Теорема 2. При $n \geq 3$ має місце

$$TGA_n = \langle AGL_n, \tau_n^1 \rangle.$$

Доведення. Доведення проведемо індукцією по n . База індукції — $n = 3$. Покладемо $G = \langle AGL_3, \tau_3^{(1)} \rangle$. Нехай $A \in GL_3$, і розглянемо елементи виду

$$(\tau_3^{(1)})^A = (X + \tilde{e}_3(x_1)^2)^A = X + \tilde{e}_3(a_1 \cdot X^T), \quad (5)$$

де $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\tilde{e}_3 = (c_{13}, c_{23}, c_{33})^T$ — перший рядок і третій стовпчик матриць A та A^{-1} відповідно, які повністю визначають елемент (5). Розглянемо умови на a_1 , $\tilde{e}_3$, при яких елемент $(\tau_3^{(1)})^A$ належатиме U_3 . Такою умовою очевидно є $c_{13} = a_{13} = 0$ разом з однією з двох рівностей 1^0 : $c_{23} = 0$; 2^0 : $a_{12} = 0$. Використавши матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & c_{23}^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

у цих випадках ми отримаємо елементи виду

$$1^0: g_1 = X + \tilde{e}_3 c_{33} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2)^2;$$

$$2^0: g_2 = X + (\tilde{e}_2 c_{23}) (a_{11} x_1)^2.$$

Припустимо, що група G містить елемент $\tau_3^{(k-1)} = \langle x_1, x_2, x_3 + x_1^k \rangle$, тоді, використавши другу матрицю, ми отримаємо елемент більш загального вигляду

$$g_2(k) = (\tau_3^{(k-1)})^A = X + (a_{11} x_1^k) (c_{23} \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3).$$

Обчисливши за формулою (2) елемент $g_1^{g_2(k)}$, легко переконатися, що він має вигляд

$$X + \tilde{e}_3 c (\alpha x_1 + \beta x_1^k + \gamma x_2)^2,$$

де за рахунок вибору матричних елементів коефіцієнти c , α , β , γ можна робити довільними з одним обмеженням: якщо $\gamma = 0$, то і $\beta = 0$. Розглянемо три елементи такого вигляду $h_i \in U_3$, з відповідними коефіцієнтами c_i , α_i , β_i , γ_i , $i = 1, 2, 3$ і обчислимо їх добуток

$$h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 = \\ = X + \tilde{e}_3 \sum_{i=1}^3 c_i (\alpha_i x_1 + \beta_i x_1^k + \gamma_i x_2)^2.$$

Поклавши в цьому добутку $c_1 = 1/3$, $c_2 = -4/3$, $c_3 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = -1/2$, $\alpha_3 = \beta_3 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -1$, отримаємо елемент

$$X + \tilde{e}_3 (x_1^{2k} + 2x_1^{k+1} + x_1^2) \in G.$$

За лемою 2 для унітрикутних перетворень координат (x_1, x_3) маємо, що всі елементи $X + \tilde{e}_3 f(x_1)$, $\deg f < 2k$ належать групі G , звідки

$$\tau_3^{(2k-1)} = \langle x_1, x_2, x_3 + x_1^{2k} \rangle \in G.$$

Повторюючи цю процедуру з елементом $\tau_3^{(2k-1)}$, отримаємо елемент

$$\tau_3^{(4k-1)} = X + \tilde{e}_3 x_2^{4k} \in G.$$

Таким чином можна отримати всі елементи виду $X + \vec{e}_3 f(x_1) \in G$, де $f(x_1)$ — довільний поліном. Оскільки елементи

$$(X + \vec{e}_3 f(x_1))^{(2,3)} = X + \vec{e}_2 f(x_1) \in U_2$$

також належать G , звідси маємо $U_2 < G$. З іншого боку, для довільного полінома $f(x_1)$ маємо

$$h = (X + \vec{e}_3 f(x_1))^{(1,2)} = X + \vec{e}_3 f(x_2) \in G.$$

Оскільки елементи такого виду можуть мати яку завгодно велику висоту, то база індукції впливає з леми 2.

Індукційний крок. Припустимо, що теорему доведено для груп $TGA_k, k < n$. Оскільки

$$(\tau_n^1)^{(n,n-1)} = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} + x_1^2, x_n \rangle \in G,$$

то, за індукційним припущенням, уся підгрупа трикутних перетворень перших $n-1$ координат B_{n-1} належить G . З іншого боку, оскільки

$$(\tau_n^1)^{(2,1)} = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + x_2^2 \rangle \in G,$$

то група трикутних перетворень координат $\langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ теж належить G , зокрема для будь-якого $m > 0$,

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + x_{n-1}^m \rangle \in G.$$

Для довільного полінома $f = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ існує $m : f \prec x_{n-1}^m$. Звідси, за лемою 2, отримуємо включення $F_n < G$ і $B_n < G$. Цим теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $q \in B_n \setminus AGL_n (n \geq 3)$ — довільний трикутний нелінійний автоморфізм, тоді $TGA_n = \langle q, AGL_n \rangle$.

Доведення. Нехай $G = \langle q, AGL_3 \rangle$; якщо буде показано, що елемент $\tau_n^{(1)} \in G$, то результат буде наслідком попередньої теореми. Знову скористаємося індукцією по розмірності n . При $n=3$, не втрачаючи загальності, можна вважати, що

$$q = \langle x_1, x_2 + h_2(x_1), x_3 + h_3(x_1, x_2) \rangle \in G.$$

Припустимо, що $\deg h_2 > 1$, тоді за допомогою елемента

$$q_2 = \langle x_1, x_2, x_3 + x_2 \rangle \in AGL_3$$

можна отримати елемент

$$[q_2, q] = \langle x_1, x_2, x_3 + h_2(x_1) \rangle \in G.$$

Якщо $\deg h_2 \leq 1$, то елемент

$$q_3 = \langle x_1, x_2, x_3 + h_3(x_1, x_2) \rangle \in G, \deg h_3 > 1.$$

Використавши ітерований комутатор $[\dots [q_q, v] \dots v]$, $v = \langle x_1, x_2 + x_1, x_3 \rangle$, отримуємо елемент потрібного виду $\langle x_1, x_2, x_3 + h(x_1) \rangle$, $\deg h > 1$. Оскільки елементи виду $\langle x_1 + c, x_2, x_3 + h(x_1) \rangle$ утворюють підгрупу, яка є іншим зануренням групи U_2 в U_3 , то для отримання потрібного елемента можна застосувати лему 2.

Індукційний крок. Нехай теорему доведено в розмірностях, менших за n, i

$$q = \langle x_1, x_2 + h_2, \dots, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + h_n \rangle \in G.$$

Якщо для деякого $i, i < n, \deg h_i \geq 2$, то, застосувавши індукційне припущення до перетворень перших $n-1$ координат, отримуємо $\pi_{n-1}(G) = TGA_{n-1}$, зокрема маємо елемент виду

$$q_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} + x_1^2, x_n + h(x_1, \dots, x_{n-1}) \rangle \in G.$$

Вибравши елемент

$$u = \langle x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n-1} \rangle \in G$$

і обчисливши комутатор за формулою (3), отримаємо потрібний елемент

$$[u, q_1] = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + x_1^2 \rangle.$$

Припустимо, що $q = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n \rangle$, тоді за допомогою комутаторів $[\dots [q, v], v], \dots, v]$, де $v = [x_1, x_2 + x_1, \dots, x_n + x_1]$ отримаємо елемент виду $\langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + f(x_1) \rangle$, $\deg f > 1$. Завершують доведення ті ж міркування, що були в розмірності 3.

Визначимо аналог стандартної параболічної підгрупи в GA_n таким чином: нехай

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k, \\ m_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

і зафіксуємо занурення $i : A_{l_1} \rightarrow A_{l_2}, l_1 < l_2$, яке полягає в приписуванні $l_2 - l_1$ нулів праворуч. Тоді маємо стяг афінних просторів

$$A_{m_1} \subset A_{m_2} \subset \dots \subset A_n. \quad (6)$$

Означення. Група $G(n_1, \dots, n_k)$, яка породжується стабілізатором стягу (6) в GA_n та групою A_n^+ , називається узагальненою стандартною параболічною підгрупою.

Легко бачити, що група $G(n_1, \dots, n_k)$ складається з елементів виду (1), у яких $f_j = f_j(x_1, \dots, x_{m_i})$, де $m_{j-1} < j \leq m_j$. Покладемо $TG(n_1, \dots, n_k) = G(n_1, \dots, n_k) \cap TGA_n$.

Теорема 4. Нехай $G = \langle B_n, A \rangle$, де A підгрупа AGL_n , тоді G є групою типу $TG(n_1, \dots, n_k)$.

Доведення. Група G містить звичайну параболічну підгрупу $P \subseteq GL_n$, яка породжується трикутними матрицями та матрицями, що є проєкціями елементів з A на GL_n . Якщо $P = GL_n$, то G містить AGL_n і $G = TGA_n$. Якщо ж P є власною підгрупою, то вона визначає певний стяг (6). Очевидно,

що $G \subseteq TG(n_1, \dots, n_k)$. При цьому для кожного j елементарні трикутні перетворення виду

$$x_{m_j} \rightarrow x_{m_j} + a(x_1, \dots, x_{m_j-1}), x_k \rightarrow x_k$$

($k \neq m_j$) належать G . Застосовуючи перестановки з P , які діють транзитивно на множині індексів, що лежать у проміжку $l \in (m_{j-1}, m_j]$, отримуємо елементарні перетворення

$$x_l \rightarrow x_l + a(x_1, \dots, x_{l-1}),$$

які породжують групу $TG(n_1, \dots, n_k)$.

1. Mortimer B. Permutation Groups containing Affine Groups of the same Degree, J. of London Math. Soc. (2), 15, 1977.- P. 445-455.
2. Шафаревич И. Р. О некоторых бесконечномерных группах // Изв. Акад. наук. Сер. мат. № 2.- Т. 1 (1981).- С. 214-226.
3. Bodnarchuk Yu. V. Some extreme properties of the affine group as an automorphism group of the affine space. Contribution to General Algebra.- 13.- 2001.- P. 15-29.
4. Боднарчук Ю. В. Про структуру замкнених надгруп SL_n в афінній групі Кремони // «Наукові записки НаУКМА». Сер. фіз.-мат. наук.- Т. 19.- 2001- С 9-12.
5. Essen A. On exotic world of invertible polynomial maps, Report 9204, February 1992, Dep. of Math., Catholic University, Toemooiveld, 6525 ED Nijmegen, the Netherlands.
6. Kulk W. van der. On polynomial rings in two variables, Nieuw. Archief voor Wiskunde, 3.- 1953.- № 1.- P. 33-11.
7. Понев В. Л. Группы автоморфизмов алгебр многочленов // Вопросы алгебры.— Изд-во Гомельского ун-та.— Вып. 4.— 1989.-С. 4-15.
8. Kraft A. Algebraic automorphisms of affine space, in: H. Kraft, T. Pétie, G. Schwars (Eds.), Topological Methods in Algebraic Transformation Groups, Birkhauser, Basel, 1989.

Yu. V. Bodnarchuk

AFFINE GROUP AS A SUBGROUP OF BIREGULAR TRANSFORMATION GROUP OF AN AFFINE SPACE

A compositions of elementary polynomial transformations with linear ones form an important class of invertible polynomial maps which is called tame ones . It is shown that every non-linear triangular polynomial transformation of the n — dimensional affine space ($n > 2$) with the affine subgroup generates all group of tame transformations. On the other hand the group of triangular transformation together with some affine ones generates the groups, which could be considered as nonlinear analogies of parabolic subgroups.