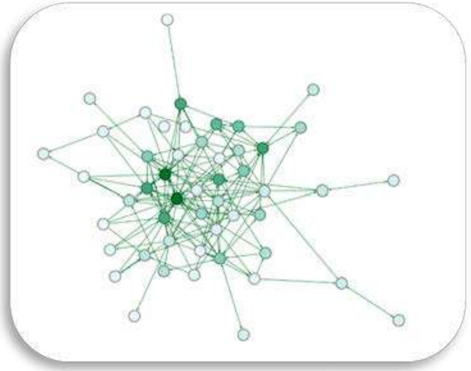
Відновлююче спектральне число графа-діаманта

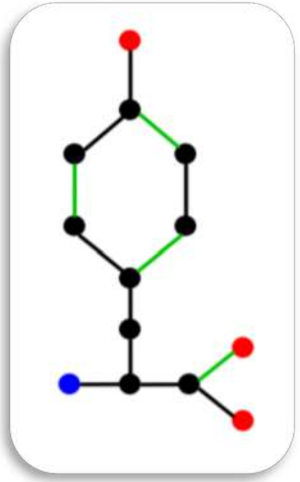
ЧЕРНЯВСЬКА КАРИНА

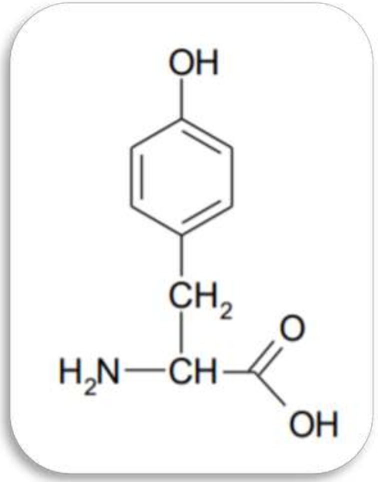
Актуальність

Спектральна теорія графів активно розвивається завдяки широкому спектру практичних застосувань у природничих, технічних та соціальних науках. Її методи використовуються, зокрема, для оптимізації архітектури згорткових нейронних мереж у машинному навчанні.

Актуальними є обернені спектральні задачі, що полягають у відновленні інформації про граф за його спектральними характеристиками





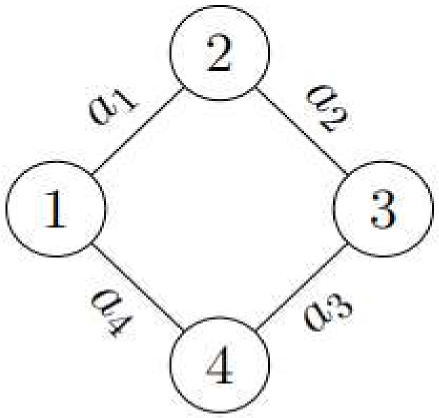


Основні означення з теорії графів

Означення.

Зважений граф $\boldsymbol{G} = (V, E, w)$ визначається:

- множиною вершин V, де V — непорожня скінченна множина
- множиною ребер E, де E — довільна підмножина множини всіх невпорядкованих пар різних елементів множини V
- ваговою функцією $w : E \to (0, +\infty)$, яка ставить у відповідність кожному ребру e числове значення $w(e)$



Зважений граф **G**

Основні означення із спектральної теорії зважених графів

Означення

Спектр графа $\sigma(\boldsymbol{G})$ – мультимножина власних значень його матриці суміжності.

Для *характеристичного многочлена* матриці суміжності зваженого графа будемо використовувати таке позначення :

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$$

Додаткові позначення для теореми Захса

Означення

Лінійний підграф графа **G** - підграф, у якому всі компоненти зв'язності складаються лише з ребер та простих циклів. Позначимо його як H_k, де k — це кількість вершин у цьому підграфі.

- *r*(H_k) — загальна кількість компонент зв'язності H_k.
- *c*(H_k) — кількість компонент зв'язності H_k, що є циклами.
- *w*(H_k) — вага H_k, яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності.

Узагальнення теореми Захса [2],[3]

Якщо $P_{\mathbf{G}}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$ — характеристичний многочлен графа **G** = (*G*,*w*), то

- $c_1 = 0$;
- $c_2 = -\sum_{e \in E(G)} w(e)^2$
- $\mathrm{c_k} = \sum_{H_k} (-1)^{\mathrm{r}(H_k)}\, 2^{\mathrm{c}(H_k)} \mathrm{w}(H_k)$ для $k = 1, \ldots, n,$ де *n* – кількість вершин в графі ***G***

Постановка задачі

Нехай нам відомий граф G, і ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа **G** = (G, w) за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно аби за значеннями спектрів вибраних підграфів ваги на ребрах графа G визначалися однозначно для будь-якої вагової функції w. Спектр індукованого підграфа будемо називати *підспектром*.

Зауважимо, що відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа **G** за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами

Відновлююче спектральне число *Srn*(G)

Означення

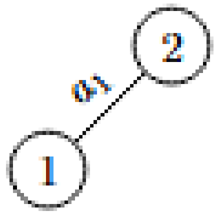
Відновлююче спектральне число Srn(G) — мінімальна кількість підспектрів, за якими однозначно відновлюються ваги ребер графа G.

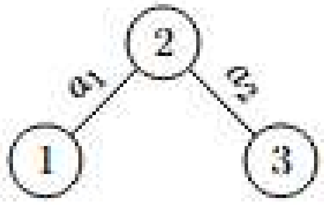
Це поняття було вперше запропоновано у роботі [3] та для деяких класів графів було встановлено точні значення цього параметра. Подальші дослідження надали верхні оцінки *Srn*(G) для дерев [4], уніциклічних графів [5]. Однак задача знаходження точних значень *Srn*(G) залишається складною навіть для графів малого порядку через нелінійний зв'язок спектральних даних із вагами ребер та їхню високу чутливість до змін структури графа.

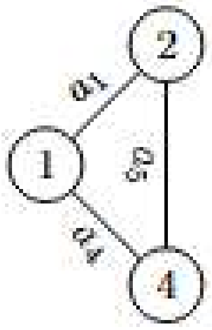
Задача відновлення ваг для K_4- *e*

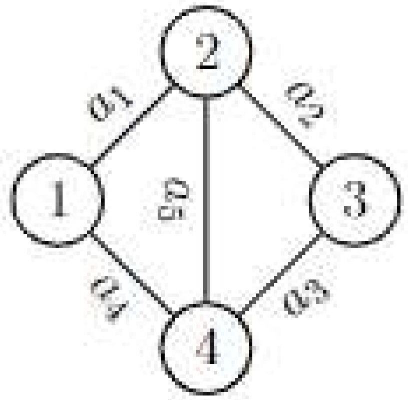
Чи можна відновити ваги графа **K_4– e** *за 4 підспектрами?*

K_4- *e*, **C_3, A_3, A_2**









$P_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - a_1^2$

$P_{A_3}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a_1^2 + a_2^2)$

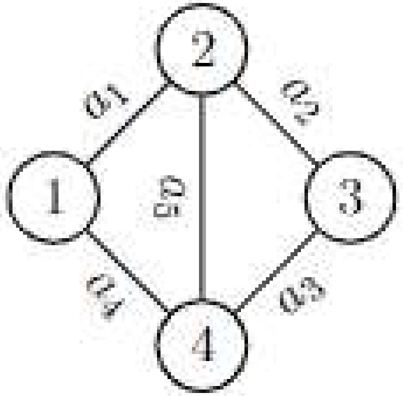
$P_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a_5^2 + a_1^2 + a_4^2) - 2a_1a_4a_5$

$P_{K_{4-e}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) - 2\lambda(a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5) + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 - 2a_1a_2a_3a_4$

Задача відновлення ваг для K_4- e

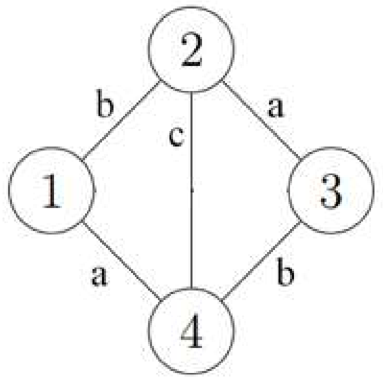
Чи можна відновити ваги графа **K_4– e** *за 3 підспектрами?*

1. K_4-e , $2C_3$
2. K_4-e, C_3 , A_3
3. K_4-e, $2A_3$
4. K_4-e, C_3, A_2
5. K_4-e, A_3, A_2
6. K_4-e, $2A_2$
7. $2C_3$, A_3
8. $2C_3$, A_2
9. C_3, $2A_3$
10. C_3, A_3 , A_2
11. C_3 , $2A_2$ $2A_3$, A_2
12. $2A_3$, A_2
13. A_3, $2A_2$
14. $3A_2$



1. $\boldsymbol{K_4}$ - *e*, $\boldsymbol{C}_3$, $\mathbf{A}_3$ 2. $\boldsymbol{K_4}$ - *e*, $\boldsymbol{C}_3$, $\mathbf{A}_3$
3. $\boldsymbol{K_4}$ - *e*, $2\mathbf{A}_3$ 7. $2\boldsymbol{C_3}$, $\mathbf{A}_3$
9. $\boldsymbol{C_3}$, $2\mathbf{A}_3$

Розглянемо два приклади зважених графів-діамантів:



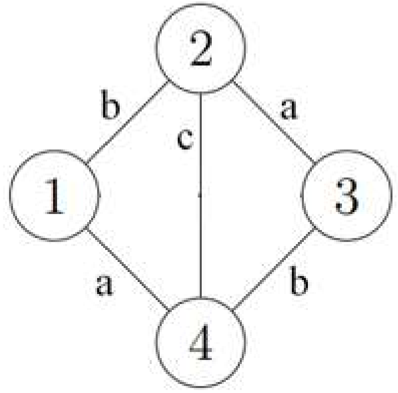
1) a_1=a_2= a, a_3=a_4= b, a_5= c,

2) a_1=a_2= b, a_3=a_4= a, a_5= c,

де $a \neq b$.

Характеристичні поліноми відповідних обраних підграфів є рівними.

$P_{\text{K}^1_{4-\text{e}}}(\lambda) = P_{\text{K}^2_{2-\text{e}}}(\lambda) = \lambda^4 - (2a^2 + 2b^2 + c^2)\lambda^2 - 4abc\lambda + a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

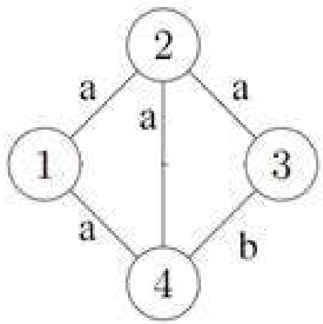


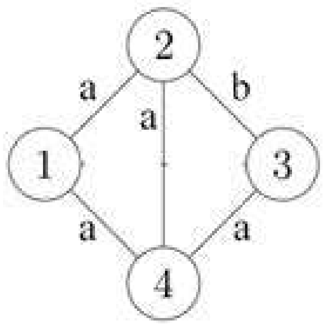
$P_{\text{C}^2_1}(\lambda) = P_{\text{C}^2_2}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc$

$P_{A^1_3}(\lambda) = P_{A^2_3}(\lambda) = \lambda^2 - (a^2 + b^2)\,\lambda$

2. $\mathbf{K}_4$–e, $\boldsymbol{C}_3, \mathbf{A}_2$

Розглянемо наступний приклад двох різних зважених графів-діамантів, $a \neq b$:

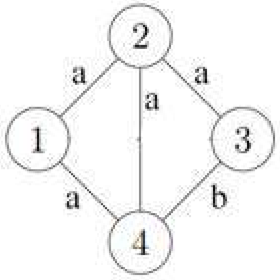


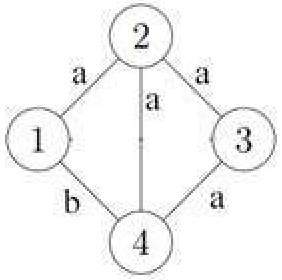


Спектри всіх відповідних вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні.

$12.\ 2\mathbf{A}_3,\ \mathbf{A}_2$

Розглянемо наступний приклад двох різних зважених графів-діамантів, $a \neq b$:





Спектри всіх відповідних вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні.

$14.\ 3\mathbf{A}_2$

Довільних трьох ребер недостатньо для відновлення всіх ваг $\boldsymbol{K_4}$ - е, адже в такому разі нічого не буде відомо про ваги двох інших ребер.

$Srn(K_4$- $e)$

Проаналізувавши всі можливі варіанти вибору трьох індукованих підграфів графа-діаманта K_4 - e, доведено, що на основі відповідного набору підспектрів неможливо однозначно відновити ваги всіх ребер. А отже, трьох підспектрів недостатньо для однозначного відновлення ваг графа-діаманта в загальному випадку. Оскільки для відновлення ваг завжди достатньо чотирьох спектрів індукованих підграфів, то, таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема

$Srn(K_4$ - $e) = 4$.

Перспективним напрямом подальших досліджень є знаходження верхніх оцінок і точних значень відновлюючого спектрального числа для планарних графів.

Список літератури

[1] Chu M.T., Golub G.H. Structured inverse eigenvalue problems. Acta Numerica. —2002. — Т. 11. — С. 1–71.

[2] H. Sachs, Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom, Publ. Math. Debrecen, 11 (1964), 119–134

[3] Тимошкевич Л.М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах //Наук. часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. —Т. 14. — С. 165–175.

[4] Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015. - 160 с.

[5] Пилипіва О.В., Тимошкевич Л.М. Обернені спектральні задачі для зважених графів. Могилян. матем. журн. — 2022. — Т. 5. — С. 26–32.

[6] Salim A., Sumitra S. Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory. IEEE Transactions on Neural Networks andLearning Systems. 2024. Vol. 35, No. 4. Pp. 4373–4384.