

Оцінка ризиків справедливої ціни  
європейський опціонів у субдифузійній  
моделі ринку

Value-at-risk performance in the  
subdiffusion financial model

ВИКОНАВ: АНДРІЙ ГАДЛЕЦЬКИЙ  
КЕРІВНИК: НАТАЛІЯ ШЕСТЮК

# Моделювання фінансового ринку. Дифузійна модель Блека-Шоулза (1976)

- ▶ Рух ризикованих активів (акцій) у вигляді дифузійного процесу (ГБР):

$$dX(t) = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) X(t) dt + \sigma X(t) dB_t$$

- ▶ Для симуляції траєкторії дифузійної моделі:

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k) \Delta t + b(x_k, t_k) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k$$

- ▶ У якості деривативів розглядаємо колл-опціон, що залежить від деяких параметрів.

# Ціноутворення опціонів у моделі Блека-Шоулза (1973)

Платіжна функція опціонів.  $F = (S - K)^+$

Справедлива ціна колл опціонів (оцінювання премії):

$$C(S_t, t) = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-rT}$$

де,  $C$  – ціна опціону

$S_t$  – ціна акції в час  $t$

$K$  – ціна страйку

$r$  – відсоткова ставка

$T$  – термін дії опціону

$N$  – функція стандартного нормального розподілу

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

# Суть проблеми. Неліквідні ринки. Субдифузії

4

- ▶ Неліквідними ринками називають ринки де торгують активами, які не можна швидко продати.
- ▶ Оскільки броунівський рух і процес Леві постійно рухаються, вони не підходять для моделювання періодів із нерухомою прибутку активу.
- ▶ Примітно, що подібна поведінка спостерігається у деяких фізичних системах.



# Субдиффузійна модель

- ▶ Субдиффузія є добре ідентифікованим явищем у статистичній фізиці, описується в термінах дробового рівняння Фоккера–Планка (FFP).
- ▶ Альтернативною моделю для субдиффузії є модель, де замість календарного часу  $t$  використовується стохастичний процес  $H_t$ , який називається hitting time або обернений субординатор.
- ▶ В рамках моделі Блека-Шоулза субдиффузія буде мати вигляд[3]:

$$dX_{H(t)} = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) X_{H(t)} dH_t + \sigma X_{H(t)} dB_{H(t)}$$

# Hitting time. Субординатор і обернений субординатор.

- ▶  $H(t)$  – hitting time, або обернений субординатор визначається за формулою:

$$H(t) = \inf(\tau > 0: G(\tau) > t)$$

де,  $G(\tau)$  – процес Леві(субординатор).

- ▶ У якості  $G(\tau)$  будемо використовувати процес IG:

$$g(x, t, \gamma, \delta) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{\delta\gamma t - (\delta^2 t^2/x + \gamma^2 x)/2}$$

якщо,  $\gamma = \delta = 1$ , то PDF буде  $\frac{t}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2x}\right)$ ,

а математичне сподівання буде  $t$

# Симуляція субординатора. Ітеративна схема.

Для кожного  $i$ -го елементу  $dt=1/n$  використаємо схему з [?]

- ▶ Згенерувати стандартний нормальний розподіл  $N$
- ▶ Порахувати  $X = N^2$
- ▶ Порахувати  $Y = dt + \frac{X}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4dt}$
- ▶ Згенерувати на просторі  $[0,1]$  дисперсію  $U$
- ▶ Якщо  $U < \frac{dt}{(dt+Y)}$  повернути  $Y$ , в протилежному повернути  $\frac{(dt)^2}{Y}$

Порахувати  $G(t_0) = 0$  і  $G(t_i) = \sum_{j=1}^i F_j, i = 1, 2 \dots n$

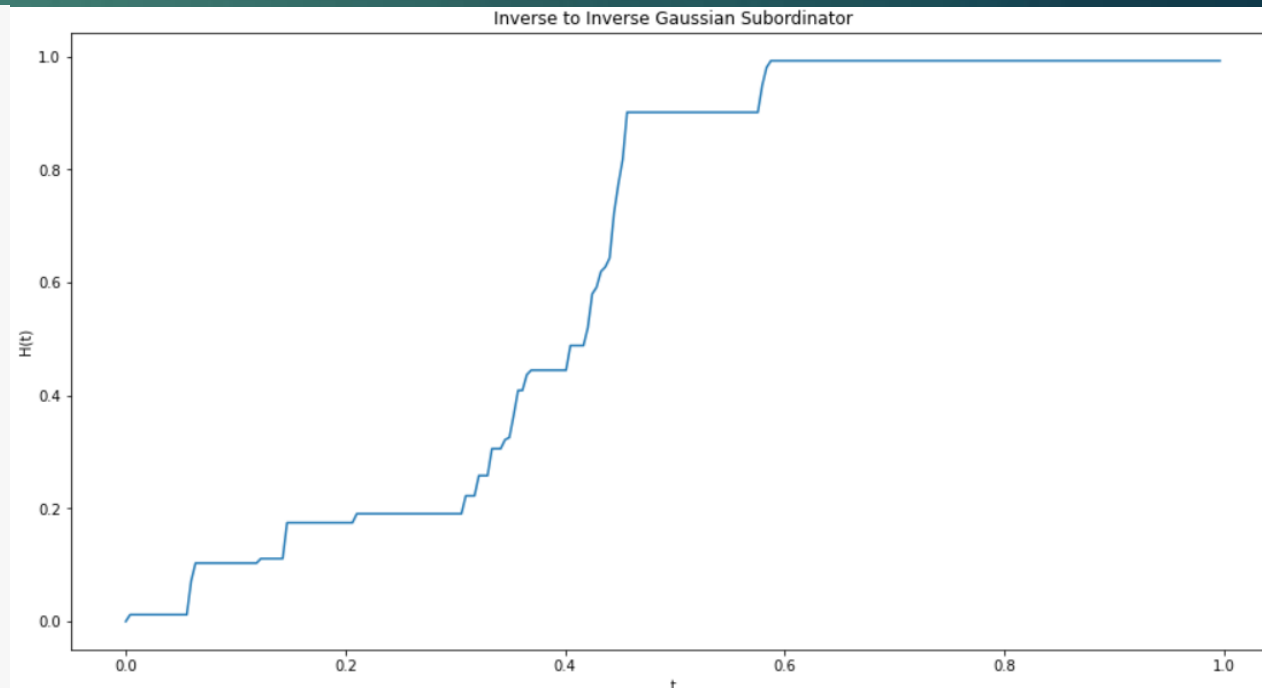
- ▶  $G(t_1), G(t_2), \dots, G(t_n)$  – симуляція змінної IG субординатора у час  $t$

# Симуляція оберненого субординатора. Ітеративна схема.

- ▶ Для симуляції приблизної траєкторії інверсійного процесу  $H(t)$  визначимо  $H(\Delta t)$ , де  $\Delta$  – довжина кроку

$$H_{\Delta}(t) = [\min\{n \in N: G(\Delta n) > t\} - 1]\Delta$$

```
def inverse_subordinator(subordinator):
    T, t_calendar = subordinator
    inv_subordinator = []
    for j in range(len(t_calendar)):
        t = t_calendar[j]
        for i, k in enumerate(T.keys()):
            if T[k] > t or i == len(T) - 1:
                inv_subordinator.append((i - 1) * step)
                break
    return inv_subordinator, t_calendar
```



# Моделювання субдуфузій. Ітеративна схема

9

- ▶ Для симуляції стохастичного субдифузійного процесу використаємо ітеративну схему:

$$x_{k+1} = x_k + \mu x_k \Delta H(t) + \sigma x_k \sqrt{\Delta H(t)} \varepsilon_k$$

$\Delta H, \varepsilon_k$  - випадковим чином згенерований нормальний розподіл для кожного  $k$ -елементу

```
def model_subdiffusion_black_scholes(inverse_subordinator):
```

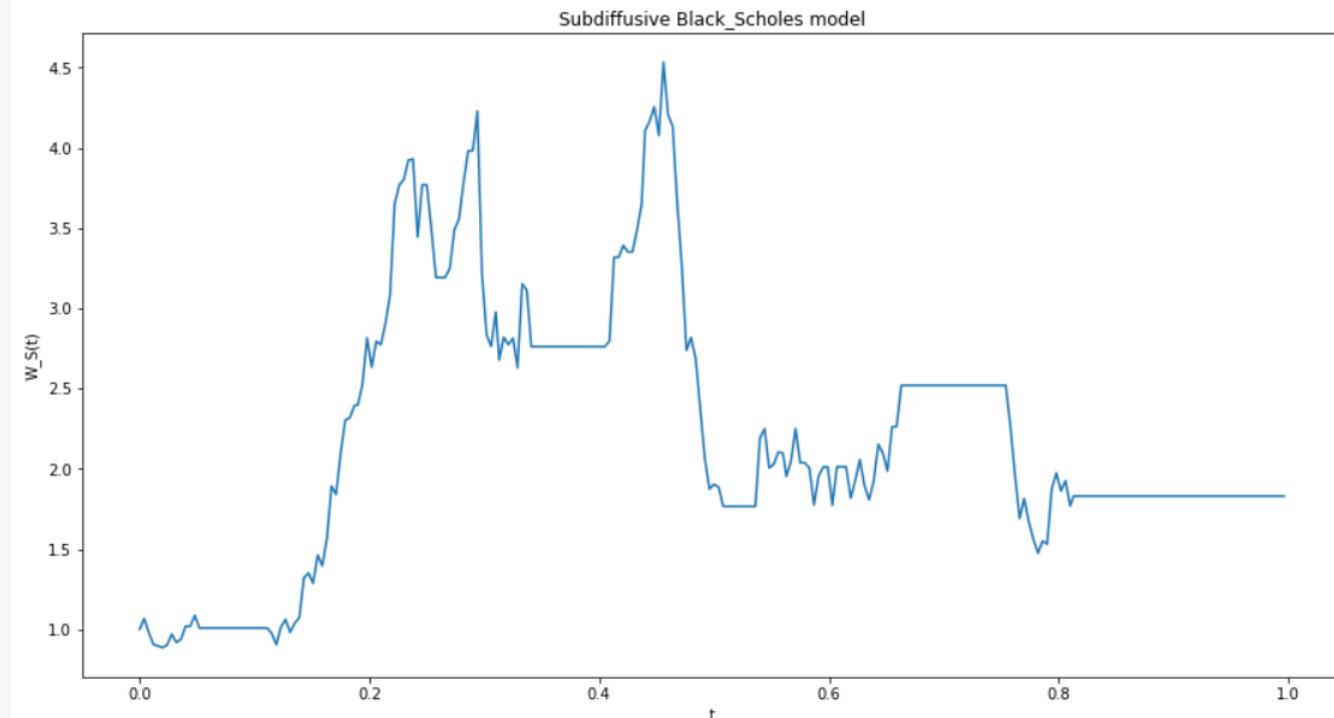
```
    x = 1
    t = 0
    x_array = [x]
    t_array = [t]

    inv_subordinator, t_calendar = inverse_subordinator
    t_gbm, w_gbm, epsilon_gbm = model_black_scholes()

    for i in range(num - 1):
        t_i = t_gbm[i]
        t_j = t_gbm[i+1]
        epsilon = epsilon_gbm[i+1]
        dt = inv_subordinator[i+1] - inv_subordinator[i]
        sqrt_dt = math.sqrt(dt)
        x += a_g(x, t) * dt + b_g(x, t) * sqrt_dt * epsilon

        t_array.append(t_i)
        x_array.append(x)
```

```
draw_plot(t_gbm, w_gbm, 't', 'W', 'Geometric Brownian Motion Black-Scholes')
draw_plot(t_array, x_array, 't', 'W_S(t)', 'Subdiffusive Black_Scholes model')
```



# Оцінювання опціонів для субдифузійної моделі.

Справедлива ціна колл опціонів у субдифузійній моделі за методом наближення інтеграла:

$$\begin{aligned} C_{sub_{-\infty}}(S, K, T, \sigma) &= \langle C(S, K, H(T), \sigma) \rangle \\ &= \int_0^{\infty} C(S, K, x, \sigma) g(x, T) dx \end{aligned}$$

де,  $\langle H(T) \rangle$  – середнє значення для різних  $H(t)$

Або за методом Монте-Карло:

$$\begin{aligned} C_{sub}(S, K, T, \sigma) &= \langle C(S, K, H(T), \sigma) \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(S, K, H_i(T), \sigma) \end{aligned}$$

# Дані для аналізу. Ціни акцій.

11

## Airbnb, Inc. Class A Common Stock (ABNB)

Nasdaq Listed Nasdaq 100

\$106.81 +2.39 (+2.29%)

Volume: 4,680,146

MAY 26, 2023

0

+ ADD TO WATCHLIST

+ ADD TO PORTFOLIO

Exp. Date	Calls						Puts						
	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.	Strike	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.
May 26, 2023													
May 26	9.90	+0.60▲	9.60	9.95	1	30	97.00	0.01	-0.02▼	–	0.03	208	639
May 26	8.25	+2.05▲	8.55	8.95	21	30	98.00	0.01	-0.03▼	–	0.01	71	2672
May 26	5.23	–	7.55	8.05	–	17	99.00	0.01	-0.04▼	–	0.01	20	352
May 26	6.90	+2.09▲	6.55	6.95	19	71	100.00	0.01	-0.05▼	–	0.01	256	1089
May 26	5.80	+1.93▲	5.60	6.05	7	59	101.00	0.01	-0.10▼	–	0.01	326	552
May 26	5.08	+2.18▲	4.55	5.00	2	76	102.00	0.01	-0.22▼	–	0.01	177	909
May 26	3.83	+1.87▲	3.60	4.00	38	148	103.00	0.01	-0.44▼	–	0.02	151	661
May 26	2.90	+1.77▲	2.70	2.93	71	298	104.00	0.01	-0.77▼	–	0.02	411	952
May 26	1.90	+1.22▲	1.58	1.96	419	584	105.00	0.01	-1.24▼	–	0.01	959	3696
May 26	0.79	+0.44▲	0.72	0.98	1150	1878	106.00	0.01	-1.84▼	–	0.03	473	2585

# Дані для аналізу. Ціни опціонів

12

Strike	4/10/2023	4/11/2023	4/12/2023	4/13/2023	4/14/2023	4/15/2023	4/16/2023	4/17/2023	4/18/2023	4/19/2023	4/20/2023	4/21/2023
95	15.78	16.83	18.6	18.5	18.5	18.5	19.11	19.11	20.15	21	23.46	20
100	11	13.1	15	14.12	14.12	14.12	13.75	13.75	15.7	17	20.22	15.15
105	6.9	7.7	10.05	8.75	8.75	8.75	9.05	9.05	10.8	13	15.06	9.96
106	6.85	5.55	8.44	8.8	8.8	8.8	8.75	8.75	9.9	9.9	9.9	9.9
107	5.65	5.45	5.45	7.2	7.2	7.2	8.12	8.12	8.59	10.5	13.1	6.6
108	5	6.15	7.4	5.22	5.22	5.22	6.05	6.05	6.05	6.05	6.05	7.58
109	4.36	5.35	5.95	5.78	5.78	5.78	6.1	6.1	6.16	9	11.26	6.09
110	3.75	4.85	5.92	5.1	5.1	5.1	5.38	5.38	6.35	7.5	9.9	5.3
111	3.34	4.1	4.6	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	5.5	7	9.05	4.14
112	2.86	3.6	4.45	3.6	3.6	3.6	3.7	3.7	4.27	5	7.95	3.35
113	2.42	3.05	2.74	3	3	3	3.15	3.15	3.6	4.5	7.25	2.24
114	2.08	2.68	3.25	2.58	2.58	2.58	2.64	2.64	3.2	4	5.88	1.22
115	1.75	2.25	2.77	2.04	2.04	2.04	1.97	1.97	2.51	3	4.95	0.14
116	1.46	1.88	2.27	1.67	1.67	1.67	1.48	1.48	1.95	2.5	4.3	0.01
117	1.21	1.55	1.92	1.3	1.3	1.3	1.15	1.15	1.45	2.5	3.6	0.02
118	0.94	1.23	1.55	1.05	1.05	1.05	0.86	0.86	1.08	1.7	2.59	0.01
119	0.81	1.02	1.22	0.81	0.81	0.81	0.64	0.64	0.68	1.2	1.64	0.02
120	0.63	0.85	1.01	0.61	0.61	0.61	0.46	0.46	0.5	0.7	1.15	0.01
121	0.62	0.68	0.78	0.5	0.5	0.5	0.37	0.37	0.35	0.5	0.74	0.03
122	0.41	0.58	0.64	0.33	0.33	0.33	0.22	0.22	0.24	0.34	0.5	0.01

# Порівняння моделей.

13

	10 Apr	11 Apr	12 Apr	13 Apr	14 Apr	15 Apr	16 Apr	17 Apr	18 Apr	19 Apr	20 Apr	21 Apr
<b>Real Data</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>Black-Scholes</b>	-0.318124	-0.210639	0.019737	-0.13044	-0.141129	-0.226266	-0.261722	-0.301094	-0.319704	-0.26678	0.001866	-0.169145
<b>BI-Sch subdiffused</b>	-0.493186	-0.151374	0.085899	-0.111118	-0.119936	-0.143145	-0.160227	-0.26598	-0.295202	-0.237159	0.014468	-0.131016



	Real Data	Black-Scholes	BI-Sch subdiffused
<b>10 Apr</b>	11.00	14.499365	16.425051
<b>11 Apr</b>	13.10	15.859365	15.082996
<b>12 Apr</b>	15.00	14.703945	13.711508
<b>13 Apr</b>	14.12	15.961817	15.688990
<b>14 Apr</b>	14.12	16.112743	15.813494
<b>15 Apr</b>	14.12	17.314882	16.141213
<b>16 Apr</b>	13.75	17.348682	15.953117
<b>17 Apr</b>	13.75	17.890046	17.407231
<b>18 Apr</b>	15.70	20.719351	20.334673
<b>19 Apr</b>	17.00	21.535258	21.031696
<b>20 Apr</b>	20.22	20.182264	19.927459
<b>21 Apr</b>	15.15	17.712548	17.134899

# Value-at-Risk

14

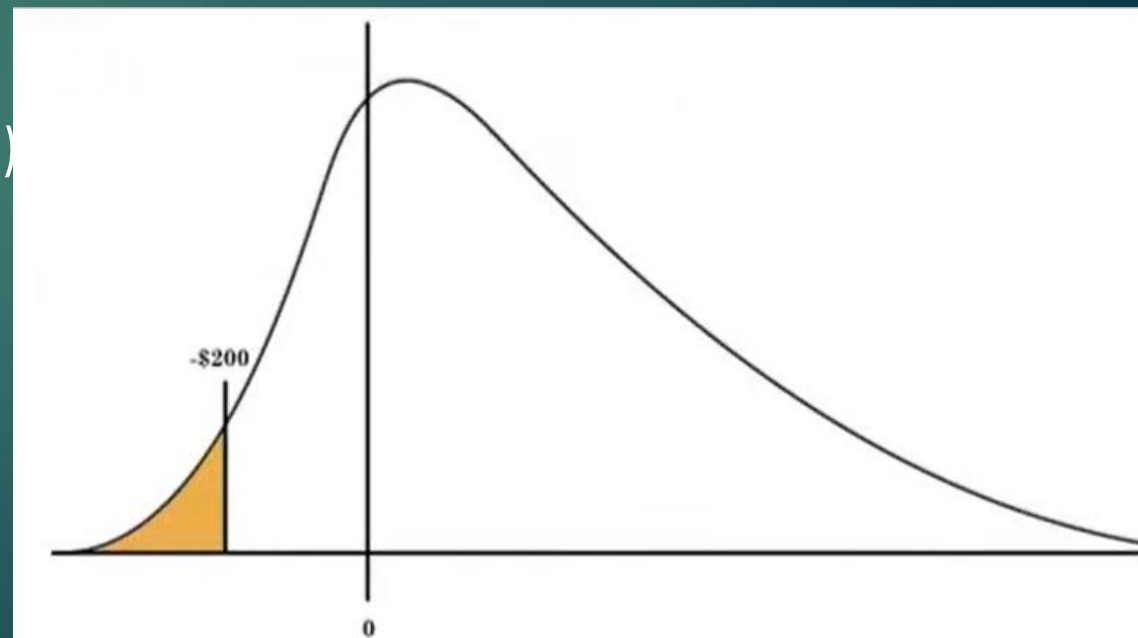
- ▶ VaR – метод оцінки ризику, який використовується для вимірювання максимально можливих витрат.
- ▶ VaR розраховується на основі статистичного аналізу попередніх даних про рух цін активів або інвестиційних портфельів за формулою(...):

$$P(\Delta v \leq -VaR) = \alpha$$

де,  $\alpha$  – порогове значення ймовірності\*

$\Delta v$  – зміна вартості активів (прибуток/втрати)

\*Дані які потрапили до обраного квантилю



# Метод Монте-Карло для оцінки VaR

З статі [3]

1. Обчислюємо початкову  $p_t$
2. Симулюємо N-разів  $S_{t+1}$  (симулюємо наступний день)
3. Для кожного  $S_{t+1}$  з п.2 рахуємо  $p_{t+1}$  (симулюємо наступний день)
4. Рахуємо різницю  $p_{t+1} - p_t$  (прибуток/витрати)
5. Обчислюємо VaR з рівнем довіри (0.99, 0.98, 0.95)

$p_t$  - справедлива ціна колл-опціону,  $S_t$  - ринкова ціна колл-опціону

# ΜΕΤΟΔ ΜΟΝΤΕ-ΚΑΡΛΟ, ΚΟΔ

16

```
def monte_carlo(n, S0, exp_time, K, r, bs_subdiff_call, bs_subdiff_vol):
    white_noise_S = np.random.normal(m, s, size = n)

    p_t = bs_subdiff_call

    S_t_next = np.zeros(len(white_noise_S))
    for i in range(len(white_noise_S)):
        S_t_next[i] = S0 * np.exp((mu - 0.5 * bs_subdiff_vol**2)*
                                   12/252 + np.sqrt(12/252) * bs_subdiff_vol * white_noise_S[i])

    p_t_next = np.zeros(len(white_noise_S))
    for i in range(len(white_noise_S)):
        p_t_next[i] = bs_subdiffusion_fair_call_price_avg(100, S_t_next[i], K, exp_time, r, bs_subdiff_vol)
        #print(p_t_next[i])

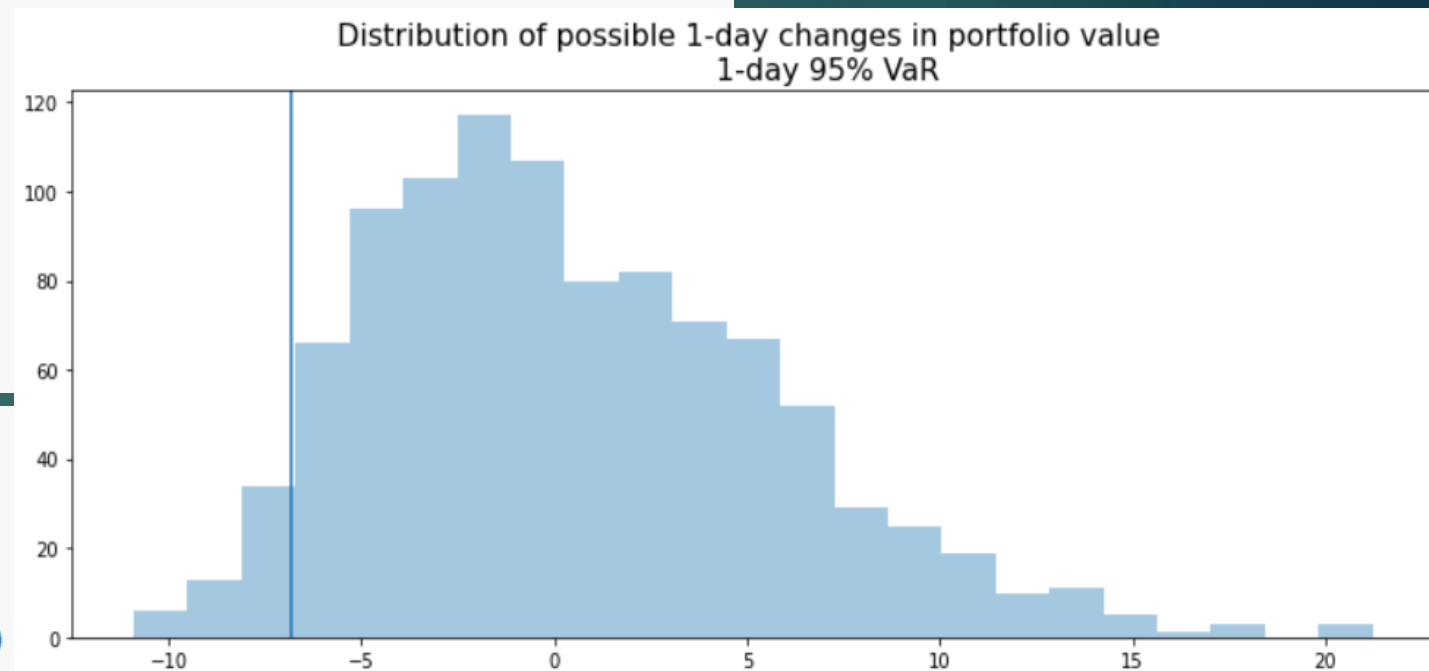
    p_t_diff = np.zeros(len(white_noise_S))
    for i in range(len(white_noise_S)):
        p_t_diff[i] = p_t_next[i] - p_t

    mc_table = pd.DataFrame({'S_t_next': S_t_next,
                             'p_t_next': p_t_next,
                             'p_t_diff': p_t_diff})

    return mc_table

P_diff_sorted = np.sort(P_diff)
percentiles = [0.01, 0.1, 1.]
var = np.percentile(P_diff_sorted, percentiles)

for x, y in zip(percentiles, var):
    print(f'1-day VaR with {100-x}% confidence: {-y:.2f}$')
```





# Proportion of failure test. Тест статистика.

Для знаходження VaR. Функція prof виконує перевірку частки невдач. частки, коли витрати перевищили

$$LR = -2 \log \left( \frac{(1 - pVaR)^{N-x} pVaR^x}{\left(1 - \frac{x}{N}\right)^{n-x} \left(\frac{x}{N}\right)^x} \right) =$$
$$-2 \log((1 - pVaR)^{N-x} pVaR^x) + 2 \log \left( \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{n-x} \left(\frac{x}{N}\right)^x \right)$$

де  $N$  – кількість спостережень,  $x$  – кількість відмов(перевищення VaR),  
 $pVaR = 1 - VaRLevel$ .

Тест POF — це тест співвідношення правдоподібності, запропонований Купецом (1995) для оцінки того, чи частка невдач (кількість невдач, поділена на кількість спостережень) відповідає рівню довіри VaR.

# Proportion of failure test. Код і результат.

```
alpha = 0.95
n = strike_count * days_count
x = 0

for j in range(strike_count):
    for i in range(days_count):
        if failures_table.at[j, failures_table.columns[i + 1]] == 0:
            x += 1

print(x)
LRatio = (-2 * math.log(((1 - alpha)**(n - x)) * (alpha**x))
          + 2 * math.log(((1 - (x/n))**(n - x)) * ((x/n)**x)))

print(f"LRatio = {LRatio}")

p_value = 1 - stats.chi2.cdf(LRatio, 1)
print(f"p-value = {p_value}")
```

89

LRatio = 992.1737020948051

p-value = 0.0

- ▶ P-value рівне 0, що менше за обраний рівень значущості 0.05. Таким чином, відхиляється гіпотеза про відповідність частки невдач пороговій ймовірності. Модель не підходить для ризик-менеджменту та неадекватно описує реальність.

# ВИСНОВКИ.

- ▶ У дослідженні оцінюється ефективність субдифузійної моделі Блека-Шоулза. Використовуються два критерії: точність ціноутворення та оцінка ризику Value-at-Risk.
- ▶ Субдифузійна модель показує більш точні результати ціноутворення порівняно з дифузійною моделлю.
- ▶ Аналіз Value-at-Risk показує його неадекватність для опису реальності на даному періоді.

# Works cited.

- [1] Lehar, A., Scheicher, M., Schittenkopf, C. GARCH vs. stochastic volatility: Option pricing and risk management. *Journal of banking and finance*, 26(2-3), 323-345 (2002).
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 8:1637–1659, 1973.
- [3] V. Pauk, O. Petrenko, N. Shchestyuk. Two approaches for option pricing under illiquidity. *Mohyla Mathematical Journal*, 2022
- [4] M. Magdziarz Black–Scholes formula in subdiffusive regime, *J. Stat. Phys.* 136553–564 (2009).
- [5] Magdziarz, M., Orzeł, S., and Weron, A. Option Pricing in Subdiffusive Bachelier Model. *J Stat Phys* 145, 187 (2011).
- [6] Kupiec, P. "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models." *Journal of Derivatives*. Vol. 3, 1995, pp. 73 – 84.
- [7] S. Pichler and K. Selitsch. A comparison of analytical VaR methodologies for portfolios that include options. Working Paper, Technische Universität Wien, 1999.
- [8] Wylomanska, A., Kumar, A., Polocz´anski, R., Vellaisamy, P. Inverse Gaussian and its inverse process as the subordinators of fractional Brownian motion.// *Physical Review*. 96 (2016).
- [9] Fokker, A. D.. "Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld". *Ann. Phys.* 348 (4. Folge 43): 810–820. (1914)
- [10] AirBNB historical data and option chain. NASDAQ. URL: <https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/abnb>

# The End

22

▶ Дякую за увагу!