Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«АЛГОРИТМ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ СІЛЬВЕСТРА»**

Виконала: студентка 4-го року навчання

освітньої програми «Прикладна математика»,

спеціальності 113 Прикладна математика

Комарцова Євгенія Володимирівна

Керівник: доцент, доктор фіз.-мат. наук Олійник Б.В.

Рецензент________________________
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою ________________________

Секретар ЕК _____________________
«____» __________________ 2021 р.

Київ 2021

Тема: **Алгоритм існування розв'язку системи матричних рівнянь Сільвестра**

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу	02.11.2020	
2.	Огляд літератури за темою роботи	15.11.2020	
3.	Опрацювання матеріалів	17.11.2020	
4.	Проведення аналізу	20.01.2021	
5.	Написання роботи	06.03.2021	
6.	Перевірка та погодження роботи	09.05.2021	
7.	Створення презентації та написання доповіді	10.05.2021	
8.	Передзахист роботи	14.05.2021	
9.	Остаточне оформлення роботи	22.05.2021	
10.	Захист роботи	08.06.2021	

Студент ________________________________

Керівник________________________________

"______"______________

ЗМІСТ

Вступ

Матричне рівняння Сільвестра, є одним найвідомішим з матричних рівнянь. Воно виникає під час розв'язку диференціальних рівнянь Рікатті та Бернуллі, при вирішенні рівнянь з частковими похідними, в задачах відновлення зображень. Також воно нерідко зустрічається в теорії оптимального керування та теорії стійкості руху. А також часто використовуються похідні від нього рівняння –Ляпунова та Стейна [1].

Нерідко зустрічаються і системи, що містять матричні рівнянння Сільвестра, такі системи можуть мати від 1до n кількості невідомих матриць X, які потрібно знайти. Для таких систем існують теореми, що характеризують існування розв'язку.

В кваліфікаційній роботі представлений алгоритм перевірки існування розв'язку для системи, що складається з двох матричних рівнянь Сільвестра, а матриці є квадратними матрицями порядку 2, який був створений на основі аналізу роботи, зазначеної вище.

Робота складається зі вступу і двох розділів. В першому розділі розглянуто загальну інформацію про рівняння Сільвестра, наведено умову єдиного розв'язку та умову відсутності розв'язку. У другому наведено опис відомих результатів щодо систем матричних рівнянь та алгоритм перевірки існування розв'язку для системи з двох матричних рівнянь.

1.1. Загальні поняття

Лінійне матричне рівняння Сільвестра,

$$AX + XB = C$$

яке іноді також називають неперервним рівнянням Сільвестра часто зустрічається при вирішенні диференціальних рівнянь Рікатті та Бернуллі, при вирішенні рівнянь з частковими похідними, в задачах відновлення зображень, в теорії оптимального керування та теорії стійкості руху [1].

Існує умова єдиного розв'язку рівняння Сільвестра, а також декілька алгоритмів розв'язку, наприклад, алгоритм Бартельса – Стюарта та Голуба-Неша-Ван Лоана. В програмі MATLAB існують функції *lyap* та *dlyap* які є реалізаціями вищезгаданих алгоритмів, а також це рівняння можна розв'язати за допомогою функції $X = sylvester\ (A, B, C)$.

1.2. Умова єдиного розв'язку

Рівняння Сільвестра $AX + XB = C$ (де $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{m\times m}$, $\mathrm{C} \in R^{n\times m}$, де m може дорівнювати n) має єдиний розв'язок $X \in R^{n\times m}$ тоді і тільки тоді, коли виконується наступне:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$$

де σ – спектр, тобто множина всіх власних значень матриці [2]. Отже рівняння Сільвестра матиме єдиний розв'язок тільки за умови, що множини власних чисел матриці A і B не матимуть однакових власних значень, при цьому матриця C розмірності $n \times m$ може бути довільна.

1.3. Приклад розв'язку матричного рівняння Сільвестра

Маємо рівняння Сільвестра $AX + XB = C$,

де матриці *A, B, C* - квадратні матриці другого порядку:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Знайдемо власні числа матриць *A*:

Запишемо характеристичний поліном матриці *A*:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \quad (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$$

Відповідно власні числа матриці *A*: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$

Запишемо характеристичний поліном матриці *B*:

$$\det(\mathrm{B} - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Відповідно власні числа матриці *B*: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$

Множини власних чисел матриць *A* і *B* не перетинаються, що означає, що існує тільки одна така матриця X, що $AX + XB = C$.

Знайдемо матрицю X за допомогою програмного забезпечення MATLAB [3].

$$X = \begin{bmatrix} 0.6056 & -0.4507 \\ -0.3944 & 0.5493 \end{bmatrix}$$

1.4. Умови відсутності розв’язку

Проаналізувавши умову єдиного розв’язку матричного рівняння Сільвестра, можемо вивести деякі умови відсутності розв’язку:

Матричне рівняння Сільвестра не має розв’язку, якщо:
- якщо матриці A і B не є квадратними
- якщо матриця С має іншу розмірність ніж $n \times m$ (за умови $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{m\times m}$, де m може дорівнювати n)

Якщо множини власних чисел квадратних матриць А і В не перетинаються – то матричне рівняння Сільвестра має єдиний розв’язок.
Якщо ж множини власних чисел квадратних матриць А і В перетинаються – рівняння може мати від двох і більше розв’язків або ж не мати розв’язків взагалі.

1.5. Висновки розділу 1

В цьому розділі розглянуто рівняння Сільвестра, обговорено відомі результати А. Дмитришина і Б.Кагстрома [4], з яких випливають умова існування єдиного розв’язку матричного рівняння та умови відсутності розв’язку системи Сільвестра. Обговорено використання спеціальних програмних засобів для знаходження розв'язку системи Сільвестра та наведений приклад розв'язку рівняння за допомогою комп'ютерної системи MATLAB [3].

2.1. Опис відомих результатів щодо систем матричних рівнянь

Тепер розглянемо систему з n матричних рівнянь з однією невідомою матрицею X.

Теорема 1 [А. Дмитришин, Б. Кагстром, 2]:

Система матричних рівнянь

$$A_i X - X B_i = C_i \quad i = 1, \dots n$$

Має єдиний розв'язок X тоді і тільки тоді, коли існує невироджена матриця P, така що:

$$P^{-1} \begin{bmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots n$$

2.2. Алгоритм перевірки існування розв'язку для системи, що складається з двох рівнянь

Розглянемо частковий випадок умови теореми 1, коли система матричних рівнянь складається всього з двох рівнянь:

$$\begin{cases} AX - XB = C \\ DX - XE = F \end{cases} \quad (1)$$

де матриці A, B, C, D, E, F є квадратними матрицями порядку 2 і одна невідома матриця X.

Використаємо нашу теорему 1: система матиме розв'язок, якщо існує невироджена матриця P, така що:

$$P^{-1}\begin{bmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \ \ (2)$$

Так, як $P^{-1} * P = I_d, \ \ P * P^{-1} = I_d$, ми можемо домножити зліва рівність (2) на матрицю P:

$$PP^{-1}\begin{bmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{bmatrix} P = P\begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{bmatrix} P = P\begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix}$$

Таким чином систему (1) можна переписати в такому вигляді:

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} P = P\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \ (3) \\ \begin{bmatrix} D & F \\ 0 & E \end{bmatrix} P = P\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \ (4) \end{cases}$$

2.2.1.

Позначимо елементи матриць:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Запишемо рівняння (3) в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Система (1) буде мати розв'язок тоді і тільки тоді, коли існує матриця Р, елементи якої задовольняють рівності вище.

Ця рівність еквівалентна знаходженню невідомих $p_{i,j}$ з такої системи рівнянь:

$$a_{11}p_{11} + a_{12}p_{21} + c_{11}p_{31} + c_{12}p_{41} = p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21} + p_{13} * 0 + p_{14} * 0$$

$$a_{21}p_{11} + a_{22}p_{21} + c_{21}p_{31} + c_{22}p_{41} = p_{21}a_{11} + p_{22}a_{21} + p_{23} * 0 + p_{24} * 0$$

$$0 * p_{11} + 0 * p_{21} + b_{11}p_{31} + b_{12}p_{41} = p_{31}a_{11} + p_{32}a_{21} + p_{33} * 0 + p_{34} * 0$$

$$0 * p_{11} + 0 * p_{21} + b_{21}p_{31} + b_{22}p_{41} = p_{41}a_{11} + p_{42}a_{21} + p_{43} * 0 + p_{44} * 0$$

$$a_{11}p_{12} + a_{12}p_{22} + c_{11}p_{32} + c_{12}p_{42} = p_{11}a_{12} + p_{12}a_{22} + p_{13} * 0 + p_{14} * 0$$

$$a_{21}p_{12} + a_{22}p_{22} + c_{21}p_{32} + c_{22}p_{42} = p_{21}a_{12} + p_{22}a_{22} + p_{23} * 0 + p_{24} * 0$$

$$0 * p_{12} + 0 * p_{22} + b_{11}p_{32} + b_{12}p_{42} = p_{31}a_{12} + p_{32}a_{22} + p_{33} * 0 + p_{34} * 0$$

$$0 * p_{12} + 0 * p_{22} + b_{21}p_{32} + b_{22}p_{42} = p_{41}a_{12} + p_{42}a_{22} + p_{43} * 0 + p_{44} * 0$$

$$a_{11}p_{13} + a_{12}p_{23} + c_{11}p_{33} + c_{12}p_{43} = p_{11} * 0 + p_{12} * 0 + p_{13}b_{11} + p_{14}b_{21}$$

$$a_{21}p_{13} + a_{22}p_{23} + c_{21}p_{33} + c_{22}p_{43} = p_{21} * 0 + p_{22} * 0 + p_{23}b_{11} + p_{24}b_{21}$$

$$0 * p_{13} + 0 * p_{23} + b_{11}p_{33} + b_{12}p_{43} = p_{31} * 0 + p_{32} * 0 + p_{33}b_{11} + p_{34}b_{21}$$

$$0 * p_{13} + 0 * p_{23} + b_{21}p_{33} + b_{22}p_{43} = p_{41} * 0 + p_{42} * 0 + p_{43}b_{11} + p_{44}b_{21}$$

$$a_{11}p_{14} + a_{12}p_{24} + c_{11}p_{34} + c_{12}p_{44} = p_{11} * 0 + p_{12} * 0 + p_{13}b_{12} + p_{14}b_{22}$$

$$a_{21}p_{14} + a_{22}p_{24} + c_{21}p_{34} + c_{22}p_{44} = p_{21} * 0 + p_{22} * 0 + p_{23}b_{12} + p_{24}b_{22}$$

$$0 * p_{14} + 0 * p_{24} + b_{11}p_{34} + b_{12}p_{44} = p_{31} * 0 + p_{32} * 0 + p_{33}b_{12} + \; p_{34}b_{22}$$

$$0 * p_{14} + 0 * p_{24} + b_{21}p_{34} + b_{22}p_{44} = p_{41} * 0 + p_{42} * 0 + p_{43}b_{12} + \; p_{44}b_{22}$$

Після скорочень матимемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases}
-a_{21}p_{12} + a_{12}p_{21} + c_{11}p_{31} + c_{12}p_{41} = 0 \\
a_{21}p_{11} + p_{21}(a_{22} - \; a_{11}) - \; a_{21}p_{22} + c_{21}p_{31} + c_{22}p_{41} = 0 \\
p_{31}(\, b_{11} - a_{11}) - a_{21}p_{32} + b_{12}p_{41} = 0 \\
b_{21}p_{31} + p_{41}(b_{22} - a_{11}) - a_{21}p_{42} = 0 \\
-a_{12}p_{11} + p_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}p_{22} + c_{11}p_{32} + c_{12}p_{42} = 0 \\
a_{21}p_{12} - a_{12}p_{21} + c_{21}p_{32} + c_{22}p_{42} = 0 \\
-a_{12}p_{31} + p_{32}(b_{11} - a_{22}) + b_{12}p_{42} = 0 \\
b_{21}p_{32} - a_{12}p_{41} + p_{42}(b_{22} - a_{22}) = 0 \\
p_{13}(a_{11} - b_{11}) - \; b_{21}p_{14} + a_{12}p_{23} + c_{11}p_{33} + c_{12}p_{43} = 0 \\
a_{21}p_{13} + p_{23}(a_{22} - b_{11)} - \; b_{21}p_{24} + \; c_{21}p_{33} + c_{22}p_{43} = 0 \\
-\, b_{21}p_{34} + b_{12}p_{43} = 0 \\
b_{21}p_{33} + p_{43}(b_{22} - b_{11}) - \; b_{21}p_{44} = 0 \\
-b_{12}\, p_{13} + p_{14}(a_{11} - \; b_{22}) + a_{12}p_{24} + c_{11}p_{34} + c_{12}p_{44} = 0 \\
a_{21}p_{14} - b_{12}p_{23} + a_{22}p_{24} - b_{22}p_{24} + \; c_{21}p_{34} + c_{22}p_{44} = 0 \\
-b_{12}p_{33} + p_{34}(b_{11} - \; b_{22}) + b_{12}p_{44} = 0 \\
b_{21}p_{34} - b_{12}p_{43} = 0
\end{cases} \qquad (5)$$

Отже якщо система матричних рівнянь (1) має розв'язок, то система (5) також має розв'язок, при цьому цей розв'язок не є нульовим, так як матриця P має бути невироджена. Система лінійних рівнянь (5) є однорідною, а тому ранг системи не може перевищувати кількості невідомих [5].

2.2.2.

Позначимо елементи матриць:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \;\; E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}, \;\; F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Аналогічно запишемо рівняння для матриць з рівняння (4):

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & f_{11} & f_{12} \\ d_{21} & d_{22} & f_{21} & f_{22} \\ 0 & 0 & e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 & e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 & e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

Тоді відповідна система лінійних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} -d_{21}p_{12} + d_{12}p_{21} + f_{11}p_{31} + f_{12}p_{41} = 0 \\ d_{21}p_{11} + p_{21}(d_{22} - d_{11}) - d_{21}p_{22} + f_{21}p_{31} + f_{22}p_{41} = 0 \\ p_{31}(e_{11} - d_{11}) - d_{21}p_{32} + e_{12}p_{41} = 0 \\ e_{21}p_{31} + p_{41}(e_{22} - d_{11}) - d_{21}p_{42} = 0 \\ -d_{12}p_{11} + p_{12}(d_{11} - d_{22}) + d_{12}p_{22} + f_{11}p_{32} + f_{12}p_{42} = 0 \\ d_{21}p_{12} - d_{12}p_{21} + f_{21}p_{32} + f_{22}p_{42} = 0 \\ -d_{12}p_{31} + p_{32}(e_{11} - d_{22}) + e_{12}p_{42} = 0 \\ e_{21}p_{32} - d_{12}p_{41} + p_{42}(e_{22} - d_{22}) = 0 \\ p_{13}(d_{11} - e_{11}) - e_{21}p_{14} + d_{12}p_{23} + f_{11}p_{33} + f_{12}p_{43} = 0 \\ d_{21}p_{13} + p_{23}(d_{22} - e_{11)} - e_{21}p_{24} + f_{21}p_{33} + f_{22}p_{43} = 0 \\ -e_{21}p_{34} + e_{12}p_{43} = 0 \\ e_{21}p_{33} + p_{43}(e_{22} - e_{11}) - e_{21}p_{44} = 0 \\ -e_{12}\,p_{13} + p_{14}(d_{11} - e_{22}) + d_{12}p_{24} + f_{11}p_{34} + f_{12}p_{44} = 0 \\ a_{21}p_{14} - e_{12}p_{23} + d_{22}p_{24} - e_{22}p_{24} + f_{21}p_{34} + f_{22}p_{44} = 0 \\ -e_{12}p_{33} + p_{34}(e_{11} - e_{22}) + e_{12}p_{44} = 0 \\ e_{21}p_{34} - e_{12}p_{43} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Зауважимо, що матриця P, яка використовується в рівняннях (3), (4) є однією і тією ж самою матрицею. А тому з теореми 1 випливає, що система (1) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система, що складається з рівнянь систем (5) і (6). Випишемо цю систему:

$$\left\{\begin{array}{c}
-a_{21}p_{12}+a_{12}p_{21}+\mathrm{c}_{11}p_{31}+\mathrm{c}_{12}p_{41}=0\\
a_{21}p_{11}+p_{21}(a_{22}-\ a_{11})-\ a_{21}p_{22}+\mathrm{c}_{21}p_{31}+\mathrm{c}_{22}p_{41}=0\\
p_{31}(\ b_{11}-a_{11})-a_{21}p_{32}+b_{12}p_{41}=0\\
b_{21}p_{31}+p_{41}(b_{22}-a_{11})-a_{21}p_{42}=0\\
-a_{12}p_{11}+p_{12}(a_{11}-a_{22})+a_{12}p_{22}+\mathrm{c}_{11}p_{32}+\mathrm{c}_{12}p_{42}=0\\
a_{21}p_{12}-a_{12}p_{21}+\mathrm{c}_{21}p_{32}+\mathrm{c}_{22}p_{42}=0\\
-a_{12}p_{31}+p_{32}(b_{11}-a_{22})+b_{12}p_{42}=0\\
b_{21}p_{32}-a_{12}p_{41}+p_{42}(b_{22}-a_{22})=0\\
p_{13}(a_{11}-b_{11})-\ b_{21}p_{14}+a_{12}p_{23}+\mathrm{c}_{11}p_{33}+\mathrm{c}_{12}p_{43}=0\\
a_{21}p_{13}+p_{23}(a_{22}-b_{11)}-\ b_{21}p_{24}\ +\ \mathrm{c}_{21}p_{33}+\mathrm{c}_{22}p_{43}=0\\
-\ b_{21}p_{34}+b_{12}p_{43}=0\\
b_{21}p_{33}+p_{43}(b_{22}-b_{11})-\ b_{21}p_{44}=0\\
-b_{12}\,p_{13}+p_{14}(a_{11}-\ b_{22})+a_{12}p_{24}+\mathrm{c}_{11}p_{34}+\mathrm{c}_{12}p_{44}=0\\
a_{21}p_{14}-b_{12}p_{23}+a_{22}p_{24}-b_{22}p_{24}+\ \mathrm{c}_{21}p_{34}+\mathrm{c}_{22}p_{44}=0\\
-b_{12}p_{33}+p_{34}(b_{11}-\ b_{22})+b_{12}p_{44}=0\\
b_{21}p_{34}-b_{12}p_{43}=0\\
-d_{21}p_{12}+d_{12}p_{21}+f_{11}p_{31}+f_{12}p_{41}=0\\
d_{21}p_{11}+p_{21}(d_{22}-\ d_{11})-\ d_{21}p_{22}+f_{21}p_{31}+f_{22}p_{41}=0\\
p_{31}(\ e_{11}-d_{11})-d_{21}p_{32}+e_{12}p_{41}=0\\
e_{21}p_{31}+p_{41}(e_{22}-d_{11})-d_{21}p_{42}=0\\
-d_{12}p_{11}+p_{12}(d_{11}-d_{22})+d_{12}p_{22}+f_{11}p_{32}+f_{12}p_{42}=0\\
d_{21}p_{12}-d_{12}p_{21}+f_{21}p_{32}+f_{22}p_{42}=0\\
-d_{12}p_{31}+p_{32}(e_{11}-d_{22})+e_{12}p_{42}=0\\
e_{21}p_{32}-d_{12}p_{41}+p_{42}(e_{22}-d_{22})=0\\
p_{13}(d_{11}-e_{11})-\ e_{21}p_{14}+d_{12}p_{23}+f_{11}p_{33}+f_{12}p_{43}=0\\
d_{21}p_{13}+p_{23}(d_{22}-e_{11)}-\ e_{21}p_{24}\ +\ f_{21}p_{33}+f_{22}p_{43}=0\\
-\ e_{21}p_{34}+e_{12}p_{43}=0\\
e_{21}p_{33}+p_{43}(e_{22}-e_{11})-\ e_{21}p_{44}=0\\
-e_{12}\,p_{13}+p_{14}(d_{11}-\ e_{22})+d_{12}p_{24}+f_{11}p_{34}+f_{12}p_{44}=0\\
a_{21}p_{14}-e_{12}p_{23}+d_{22}p_{24}-e_{22}p_{24}+\ f_{21}p_{34}+f_{22}p_{44}=0\\
-e_{12}p_{33}+p_{34}(e_{11}-\ e_{22})+e_{12}p_{44}=0\\
e_{21}p_{34}-e_{12}p_{43}=0
\end{array}\right. \quad (7)$$

Так як система лінійних рівнянь (7) є однорідною, а отже вона матиме не нульовий розв’язок, тоді і тільки тоді, коли ранг відповідної матриці коефіцієнтів є меншим за кількість невідомих елементів (висновок з теореми Кронекера Капеллі) [6]. А тому з міркувань наведених вище маємо:

Твердження 2. Система матричних рівнянь 1 має розв'язок, тоді і тільки тоді, коли ранг системи (7) менше кількості невідомих матриці P, тобто 16.

Випишемо матрицю коефіцієнтів K системи лінійних рівнянь (7):

$$
\begin{pmatrix}
0 & -a_{21} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{22}-a_{11} & -a_{21} & 0 & 0 & c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{11}+b_{11} & -a_{21} & 0 & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & -a_{11}+b_{22} & -a_{21} & 0 & 0 \\
-a_{12} & -a_{22}+a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 \\
0 & a_{21} & 0 & 0 & 0 & -a_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{22} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{12} & -a_{22}+b_{11} & 0 & 0 & 0 & b_{12} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & -a_{12} & -a_{22}+b_{22} & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{11}-b_{11} & -b_{21} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 \\
0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{22}-b_{11} & -b_{21} & 0 & 0 & c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{22} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{21} & 0 & 0 & b_{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & -b_{11}+b_{22} & -b_{21} \\
0 & 0 & -b_{12} & a_{11}-b_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{12} \\
0 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & -b_{12} & a_{22}-b_{22} & 0 & 0 & 0 & c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{22} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{12} & b_{11}-b_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & -b_{12} & 0 \\
0 & -d_{21} & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 & 0 & f_{11} & 0 & 0 & 0 & f_{12} & 0 & 0 & 0 \\
d_{21} & 0 & 0 & 0 & d_{22}-d_{11} & -d_{21} & 0 & 0 & f_{21} & 0 & 0 & 0 & f_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{11}+e_{11} & -d_{21} & 0 & 0 & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{21} & 0 & 0 & 0 & -d_{11}+e_{22} & -d_{21} & 0 & 0 \\
-d_{12} & -d_{22}+d_{11} & 0 & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 & 0 & f_{11} & 0 & 0 & 0 & f_{12} & 0 & 0 \\
0 & d_{21} & 0 & 0 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 & 0 & f_{21} & 0 & 0 & 0 & f_{22} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{12} & -d_{22}+e_{11} & 0 & 0 & 0 & e_{12} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{21} & 0 & 0 & -d_{12} & -d_{22}+e_{22} & 0 & 0 \\
0 & 0 & d_{11}-e_{11} & -e_{21} & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 & 0 & f_{11} & 0 & 0 & 0 & f_{12} & 0 \\
0 & 0 & d_{21} & 0 & 0 & 0 & d_{22}-e_{11} & -e_{21} & 0 & 0 & f_{21} & 0 & 0 & 0 & f_{22} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{21} & 0 & 0 & e_{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{21} & 0 & 0 & 0 & -e_{11}+e_{22} & -e_{21} \\
0 & 0 & -e_{12} & d_{11}-e_{22} & 0 & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 & 0 & f_{11} & 0 & 0 & 0 & f_{12} \\
0 & 0 & 0 & d_{21} & 0 & 0 & -e_{12} & d_{22}-e_{22} & 0 & 0 & 0 & f_{21} & 0 & 0 & 0 & f_{22} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{12} & e_{11}-e_{22} & 0 & 0 & 0 & e_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{21} & 0 & 0 & -e_{12} & 0
\end{pmatrix}
$$

Твердження 3. Система матричних рівнянь 1 має розв'язок, тоді і тільки тоді, коли ранг матриці K < 16.

Ранг матриці K можна обчислити за допомогою спеціалізованих програм: MATLAB, Octave, wims matrix calculator, matrix reshish rank calculation.

2.3. Алгоритм перевірки існування розв'язку системи (1)

Вхід: система матричних рівнянь

$$
\begin{cases} AX - XB = C \\ DX - XE = F \end{cases}
$$

Вихід: відповідь «так» або «ні» на запитання чи існує розв'язок вхідної системи.

1. Виписуємо матрицю K коефіцієнтів вхідних матриць A, B, C, D, E, F.

2. Знаходимо ранг матриці K за допомогою програмного забезпечення. (Наприклад wims matrix calculator або matrix.reshish.com rank calculation).

3. Якщо ранг < 16 (кількості невідомих елементів матриці P) ⇒ робимо висновок, що система має розв'язки.

4. Якщо ж ранг ≥16 – система має тільки один нульовий розв'язок, який нам не підходить.

Коректність наведеного алгоритму випливає з твердження 3.

2.4. Приклади

Покажемо, як працює цей алгоритм на конкретних прикладах систем з двох матричних рівнянь, де всі матриці є квадратними матрицями порядку 2.

Приклад 1.

Маємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} AX - XB = C \\ DX - XE = F \end{cases}$$

де матриці $A, B, C, D, E, F -$ квадратні матриці порядку 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Випишемо матрицю коефіцієнтів K:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
$$

2. Порахуємо ранг цієї матриці за допомогою платформи wims. Ранг дорівнює 16, отже за твердженням 3 не існує матриці X, яка б задовільняла вхідним двом рівнянням.

Відповідь: система матричних рівнянь не має розв'язків.

Приклад 2.

Маємо систему з двох матричних рівнянь

$$\begin{cases} AX - XB = C \\ DX - XE = F \end{cases}$$

де матриці $A, B, C, D, E, F -$ є квадратні матриці порядку 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Випишемо матрицю K з коефіцієнтами:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
$$

3. Порахуємо ранг цієї матриці за допомогою платформи wims. Ранг цієї матриці дорівнює 15, а отже за твердженням 3 робимо висновок, що існує матриця X, яка

є розв'язком вхідної системи.

Для перевірки знайдемо матрицю *P* за допомогою онлайн ресурсу matrixcalc.org:

Випишемо систему 7 для знаходження матриці P:

$$\begin{cases} p_{11} = p_{22} \\ p_{12} = p_{21} \\ p_{13} = 0 \\ p_{14} = 0 \\ p_{23} = 0 \\ p_{24} = 0 \\ p_{31} = 0 \\ p_{32} = 0 \\ p_{34} = p_{43} \\ p_{33} - 2p_{43} - p_{44} = 0 \\ p_{41} = 0 \\ p_{42} = 0 \\ p_{12} = -p_{21} \\ p_{11} + p_{21} - p_{22} = 0 \\ p_{13} = 0 \\ p_{14} = 0 \\ p_{23} = 0 \\ p_{24} = 0 \\ p_{31} = 0 \\ p_{32} = 0 \\ p_{34} = p_{43} \\ p_{33} + 2p_{43} - p_{44} = 0 \\ p_{41} = 0 \\ p_{42} = 0 \end{cases}$$

Перепишемо нашу систему рівнянь, скоротивши рівняння, що повторюються та отримаємо наступну однопараметричну систему розв'язків:

$$\begin{cases} p_{11} = p_{22} \\ p_{12} = 0 \\ p_{13} = 0 \\ p_{14} = 0 \\ p_{23} = 0 \\ p_{24} = 0 \\ p_{31} = 0 \\ p_{32} = 0 \\ p_{34} = p_{43} \\ p_{21} = 0 \\ p_{41} = 0 \\ p_{42} = 0 \\ p_{33} - 2p_{43} - p_{44=0} \\ p_{33} + 2p_{43} - p_{44} = 0 \end{cases} \qquad (7^*)$$

Виберемо з системи (7*) частковий розв'язок:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(P) = 4$$

з чого робимо висновок, що наша система матричних рівнянь має розв'язок.

2.4. Висновок до розділу 2

У другому розділі використовуючи результати А. Дмитришина і Б. Кагстрома [3] ми довели, що система матричних рівнянь, що складається з двох рівнянь і складається з квадратних матриць порядку 2 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг спеціальним чином сконструйованої матриці К < 16.

Проведені дослідження дозволили побудувати простий алгоритм перевірки існування розв'язку для систем матричних рівнянь Сільвестра, що складаються з двох рівнянь квадратних матриць порядку 2.

Висновки

В кваліфікаційній роботі розглянуто систему з двох матричних рівнянь Сільвестра, що складаються з квадратних матриць другого порядку:

$$\begin{cases} AX - XB = C \\ DX - XE = F \end{cases}$$

Враховуючи результати Андрія Дмитришина та Бо Кагстрома [4] побудовано алгоритм перевірки існування розв’язку таких систем матричних рівнянь. Доведено коректність цього алгоритму, наведені приклади.

Джерела:

1. Х. Д. Икрамов , Ю. О. Воронцов, Численное решение матричных уравнений Сильвестра с нормальными коэффициентами, Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем. и киберн. 2017. No 4
2. Mathematical Systems Theory: Advanced Course Exercise Session 4
3. https://uk.mathworks.com/help/matlab/ref/sylvester.html
4. Андрій Дмитришин, Бо Кагстром, «Coupled sylvester-type matrix equations and block diagonalization», SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. 2015 Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 36, No. 2, pp. 580–593
5. Ю.В.Боднарчук, Б.В. Олійник .Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчально-методичний посібник для студентів-інформатиків. Київ: Вид. дім „Києво-Могилянська академія ”, 2010 -175 с.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984,- 117 с.
7. *Q. Hu, D. Cheng / Applied Mathematics Letters 19* , The polynomial solution to the Sylvester matrix equation*, 2006*
8. С. М. Чуйко, О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра, Чебышевский сб., 2015