Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступіть – бакалавр

на тему: «КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ ГРАФІВ КОКСТЕРА ВІДНОСНО ЗНАЧЕННЯ ІНДЕКСА»

Виконала: студентка 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна математика»
спеціальності 113 Прикладна математика
Когут Марія Володимирівна

Керівник: Тимошкевич Л.М.,
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач
Рецензент: Кочубінська Є.А.
(підпис та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою __________________
Секретар ЕК _______________
«_____»____________ 20 ___ р.

Київ – 2022

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

Затверджую
Голова кафедри математики,
проф., доктор фіз. мат. наук
Олійник Б.В. ____________
(підпис)
"____"________________ 2021

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
для кваліфікаційної роботи
студентці 4 курсу факультету інформатики
Когут Марії

ТЕМА: Класифікація зліченних графів Кокстера відносно індекса.
Зміст до кваліфікаційної роботи:

Дата видачі "____"__________ 2021 Керівник ________________________
(підпис)
Завдання отримала ____________________
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «____»____________ 2022р.

№ п/п	Назва етапу кваліфікаційної роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	17.10.2021	
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	20.10.2021	
3.	Розробка плану та структури роботи.	02.12.2021	
4.	Робота з науковою літературою.	07.12.2021	
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	25.01.2022	
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	17.05.2022	
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	25.05.2022	
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	14.06.2022	
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	04.07.2022	

Науковий керівник ______________________

(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи ______________________

(ПІБ)

Зміст

Анотація

Метою моєї роботи є дослідження зв'язку між структурую графа і його індексом та класифікування зліченних графів Кокстера відносно значення його індекса. В роботі розглянуто основні означення, твердження та теореми, пов'язані зі спектральною теорією зліченних графів Кокстера. Представлено наявні теореми щодо повної класифікації зліченних графів Кокстера, індекс яких належить проміжку $\left[2;\ \sqrt{\sqrt{5}+2}\right]$. Також наведено деякі раніше досліджені приклади знаходження індекса зліченних графів Кокстера. Використовуючи пропоновані методи, пораховано індекси зліченних графів Кокстера, що раніше не знаходились. На основі отриманих результатів зроблено висновки щодо класифікації деяких видів зліченних графів Кокстера з індексом у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$. На додаток виділено певні обмеження для зліченних графів Кокстера, індекс яких належить цьому проміжку.

Вступ

Дискретна математика – велика галузь математики, яка охоплює багато тем, пов'язаних із властивостями дискретних структур, і часто використовується в сучасності. Одним із розділів є теорія графів, яка вивчає властивості графів. Її застосування є найрізноманітнішим, оскільки багато речей та подій можна представити у вигляді графів і це буде зручно, бо їх легко графічно зобразити. Наприклад, транспортні шляхи, комп'ютерні мережі, молекулярне моделювання й багато іншого.

Важливим розділом теорії графів є спектральна теорія графів, яка вивчає зв'язок між графом та його характеристичним многочленом, власними векторами і власними значеннями матриць, таких, як матриця суміжності або матриця Кірхгофа. Вона виникла ще у 1950-60-х роках, наприклад, у роботі Коллатці та Сіноговіца "Spektren endlicher Grafen"в 1957 році [8]. Але тематика залишається актуальною й донині та досліджується багатьма людьми [9 - 11].

Спектральна теорія графів використовується в численних науках: хімії, фізиці, комп'ютерних науках, біології, економіці [12], соціальних науках [13, 14] і, звісно, у математиці. Наприклад, у машиному навчанні для покращення роботи згорткової нейроної мережі [15] або в соціологія для пошуку социальних сенсорів в епідеміологічних мережах [16]. Спектральна теорія графів Кокстера застосовується в класифікаційних теоремах, зокрема, для класифікації систем коренів, скінченних груп Кокстера.

Мета моєї роботи – класифікувати зліченні графи Кокстера відносно значення його індекса. Розглянути вже наявні теореми та приклади, дослідити індекси зліченних графів Кокстера, що не знаходилися раніше та зробити висновок щодо їхньої класифікації.

Зокрема, у роботі отримано результати:

- Сформульовано та доведено теорему щодо повної класифікації зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів A_∞
- Сформульовано та доведено теорему щодо повної класифікації зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів $A_\mathbb{Z}$
- Сформульовано та доведено теорему щодо повної класифікації зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих незважених T графів.

- Сформульовано та доведено теорему щодо повної класифікації злічeнних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів $T_{1,k,\infty}$ з позначкою з краю.
- Сформульовано та доведено твердження щодо певних обмежень для злічeнних графів Кокстера, індекс яких належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

1 Основні означення і твердження

1.1 Графи Костера

Означення 1.1. *Граф* – це сукупність $G = (V, R)$, де V – *множина вершин графа* G, непорожня скінченна множина, R – *множина ребер графа* G, множина, яка складається з невпорядкованих пар різних елементів множини V.

Означення 1.2. Вершини графа, що з'єднані ребром, називаються *суміжними.*

Означення 1.3. Вершина графа, що є кінцем ребра, та це ребро називаються *інцидентними.*

Означення 1.4. *Степінь вершини* v – кількість ребер інцидентних даній вершині. Позначається $dev\, v$.

Означення 1.5. *Порядок графа* – кількість вершин графа. Позначається $|G|$.

Означення 1.6. *Граф Кокстера* $\mathbf{G}$ – це сукупність (G, f), де G – граф, f – відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, які строго більші за 2, та символа ∞. Будемо вважати, що граф G підпорядкований графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Щоб було зручніше, представлятимемо граф Костера як підпорядкований граф з позначками $f(e)$ над кожним ребром e. Прийнято над ребрами не писати цифри 3. Такі ребра – непозначені, інші – позначені.

Зауваження 1.1. Звичайні графи є підмножиною графів Кокстера: f визначаємо як відображення ребер в число 3.

Означення 1.7. Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ - граф Кокстера. Граф $G_1 = (G_1, f_1)$ – *підграф* графа $\mathbf{G}$, якщо G_1 підграф G, і для довільного ребра e графа G_1: $f_1(e) \leqslant f(e)$. Позначається $\mathbf{G_1} \subset \mathbf{G}$.

Означення 1.8. Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини графа Кокстера. Визначимо *матрицю суміжності* як $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, де $n = |\mathbf{G}|$ – порядок графа G, а елементи матриці визначаються $a_{ij} = 2\cos(\frac{\pi}{k})$, якщо $f(i,j) = k$, $a_{ij} = 2$, якщо $f(i,j) = \infty$, $a_{ij} = 0$, якщо вершини i та j не з'єднані ребром.

Отже, в нашому випадку матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ – симетрична, дійсна та містить нулі на головній діагоналі. Вона залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Якщо граф $\mathbf{G}$ скінченний, $|V| < \infty$, то матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ буде квадратною порядка $|V|$.

Сукупність усіх власних значень матриці – це спектр матриці. Оскільки, матриця суміжності симетрична, то спектр буде дійсним. Розташуємо точки спектру λ_i в порядку спадання: $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n = q_{\mathbf{G}}$.

Означення 1.9. *Спектр графа* – це спектр матриці суміжності $A(\mathbf{G})$. Позначається $\sigma(\mathbf{G})$.

Означення 1.10. *Індекс графа* – це максимальне власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$.

Означення 1.11. *Характеристичним многочленом* матриці суміжності називається $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

1.2 Зліченні графи Костера

Означення 1.12. *Зліченний граф Кокстера* – граф Кокстера, що має зліченну множину вершин.

Для зручності будемо позначати множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{G}$ як $Fin(\mathbf{G})$.

Для зліченних графів Кокстера матриця суміжності буде нескінченною вправо та вниз.

Означення 1.13. *Індексом зліченного графа* називаємо додатнє число або символ ∞, яке визначається

$$ind\,\mathbf{G} = \sup_{\mathbf{\Gamma} \in Fin(\mathbf{G})} ind\,\mathbf{\Gamma}$$

Операції на зліченних графах Костера.

Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ – зліченний граф Кокстера. Визначимо операції [5 - 7]:

1. *Операція видалення вершини.* У графі G оберемо вершину x. Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де визначаємо множину вершин $V_1 = V \backslash x$, множину ребер, яку отримуємо шляхом видалення з R ребер, що інцидентні вершині x та функцію f_1, яка є обмеженням функції f на множину ребер R_1. Тоді граф Кокстера $\mathbf{G_1} = (G_1, f_1)$ – граф Кокстера, отриманий з графа $\mathbf{G}$ видаленням вершини x та позначається $\mathbf{G} - x$.

2. *Операція видалення ребра.* У графі G оберемо ребро e. Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де визначаємо множину вершин $V_1 = V$ незмінною, множину ребер $R_1 = R \backslash e$ та функцію f_1, яка є обмеженням функції f на множину ребер R_1. Тоді граф Кокстера $\mathbf{G_1} = (G_1, f_1)$ – граф Кокстера, отриманий з графа $\mathbf{G}$ видаленням ребра e та позначається $\mathbf{G} - e$.

3. *Операція зменшення мітки на ребрі.* У графі G оберемо ребро e. Розглянемо функцію f_1, яка тотожно рівна функції f на множині ребер $R \backslash e$, а на ребрі e визначається $f_1(e) < f(e)$. Тоді граф Кокстера $\mathbf{G_1} = (G, f_1)$ називається графом Кокстера, отриманий з графа $\mathbf{G}$ зменшенням мітки на ребрі e.

Введемо ще одну операція на незважених графах(всі позначки на ребрах дорівнюють 3). *Операція підрозбиття ребра або додавання вершини на внутрішнє ребро.* [7] У графі G оберемо ребро $e = x, y$. Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де визначаємо множину вершин $V_1 = V \bigcup z$, множину ребер $R_1 = (R \backslash e) \bigcup x, z \bigcup z, y$. Тоді граф Кокстера $\mathbf{G_1} = (G_1, f_1)$ – граф Кокстера, отриманий з графа $\mathbf{G}$ подрозбиттям ребра e або додаванням вершини z на внутрішнє ребро e.

Означення 1.14. *Підграф* графа $\mathbf{G}$ в термінах операцій над графами – граф, одержаний шляхом застосування операцій видалення вершини, ребра або зменшенням мітки на ребрі графа $\mathbf{G}$.

1.3 Теорема Фробеніуса

Означення 1.15. *Невід'ємною матрицею* A називаємо таку, у якій всі елементи є невід'ємними числами. Позначається $A \geqslant 0$.

Означення 1.16. *Додатною матрицею* A називаємо таку, у якій всі елементи є додатними числами. Позначається $A > 0$.

Аналогічно визначаються *невід'ємний* та *додатній вектори*, вектори з невід'ємними та додатніми координатами відповідно. Невід'ємний вектор позначається x $\geqslant 0$, а додатній – $x > 0$.

Означення 1.17. *Розкладною* матрицею A називається така, у якій переставивши рядки у певному порядку, а потім стовпчики у тому самому порядку можна отримати блочну матрицю вигляду $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ з квадратними матрицями на діагоналі. В іншому випадку – *нерозкладна.*

Теорема 1.1. *(Фробеніуса)* [1, 3, 4, 7] Невід'ємна нерозкладна матриця A завжди має додатнє власне значення r, що задовольняє властивостям:

1. r – простий корінь характеристичного рівняння;

2. модулі всіх інших власних значень не перевищують r;

3. власному числу r відповідає власний додатній вектор.

До того ж, якщо A має k власних значень, які за модулем дорівнюють r, то ці числа всі різні між собою та є коренями рівняння $\lambda^k - x^k = 0$. Якщо розглядати весь спектр матриці A як систему точок на комплексній площині, то він відображається на себе при повороті на кут $2\pi/k$.
Якщо $k > 1$, то перестановкою рядків у деякому порядку, а потім стовпчиків у тому самому порядку можна звести матрицю A до "циклічного"вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця A *імпритивна*, якщо $k > 1$. Число k – *індекс імпритивності* матриці A. В іншому разі матриця A – *примітивна.*

Твердження 1.1. $[1, 4, 7]$ Матриця суміжності графа нерозкладна тоді і тільки тоді, коли граф – зв'язний.

Матриця суміжності невід'ємна, тому всі властивості невід'ємних матриць правдиві для матриць суміжності, зокрема теорема Фробеніуса. Також всі власні значення матриці суміжності – дійсні числа. Отже, з **теореми 1.1** випливає теорема про спектральні властивості зв'язного графа.

Теорема 1.2. *(Фробеніуса для матриці суміжності)* [1, 4, 7] Нехай $\mathbf{G}$ – зв'язний граф. $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$ – власні значення графа в порядку не зростання. Тоді:

1. Індекс графа додатній($\lambda_{\mathbf{G}} > 0$);

2. Модуль довільного власного значення не перевищує індекс графа($\forall i$: $|\lambda_i| \leqslant \lambda_{\mathbf{G}}$);

3. Алгебраїчна кратність власного значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ дорівнює 1(отже геометрична кратність також рівна 1);

4. Існує додатній власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_{\mathbf{G}}$(цей вектор буде називатися вектором Перрона- Фробеніуса);

5. Якщо $-\lambda_{\mathbf{G}}$ – власне значення, то його алгебраїчна кратність дорівнює 1(отже геометрична кратність також рівна 1).

2 Індекси зліченних графів Кокстера

2.1 Основні теореми

Твердження 2.1. $[5-7]$ $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф. При видаленні вершини, або ребра графа $\mathbf{G}$, індекс не збільшується. При зменшенні мітки на ребрі графа $\mathbf{G}$, індекс строго зменшується.

Наслідок 2.1. $[5-7]$ Нехай $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ – зліченні графи. $\mathbf{G_1} \subset \mathbf{G_2}$. Тоді $ind\,\mathbf{G_1} \leqslant ind\,\mathbf{G_2}$

Твердження 2.2. $[6-7]$ $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф. При підрозбитті внутрішнього ребра графа $\mathbf{G}$, індекс не збільшується.

Твердження 2.3. $[5-7]$ Індекс зліченного графа рівен супремуму індексів його компонент зв'язності.

Далі графи, які будемо розглядати, вважатимемо зв'язними.

Теорема 2.1. $[5-7]$ Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний граф, $\{\mathbf{G_n}\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умовам:

1. $\mathbf{G_n} \subset \mathbf{G_{n+1}} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{G_n} = \mathbf{G}$.

Тоді $ind\,\mathbf{G} = \lim\limits_{n\to\infty} ind\,\mathbf{G_n}$.

Наслідок 2.2. $[5-7]$ Нехай $\mathbf{G^1}$, $\mathbf{G^2}$ – зліченні графи, $\left\{\mathbf{G^1_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\mathbf{G^2_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовності скінченних підграфів $\mathbf{G^1}$ і $\mathbf{G^2}$ відповідно. Нехай ці послідовності задовольняють умовам:

1. $\mathbf{G^1_n}$ ізоморфний $\mathbf{G^2_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbf{G^1_n} \subset \mathbf{G^1_{n+1}}$, $\mathbf{G^2_n} \subset \mathbf{G^2_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;
3. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{G^1_n} = \mathbf{G^1}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{G^2_n} = \mathbf{G^2}$.

Тоді $ind\,\mathbf{G^1} = ind\,\mathbf{G^2}$.

2.2 Індекси графів, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга

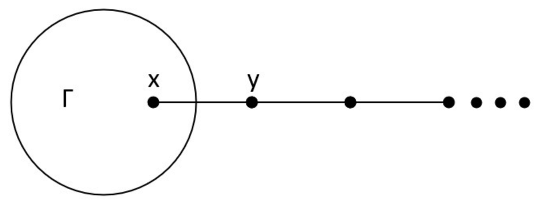


Рис.1

Граф $\mathbf{G}$ складається з скінченного графа $\mathbf{\Gamma}$, нескінченного ланцюга та ребра $\{x, y\}$, що з'єднує їх. Граф такого виду можна задати зліченною кількістю пар $(\mathbf{\Gamma}, x)$.

Теорема 2.2. $[6, 7]$ Нехай зліченний граф $(\mathbf{\Gamma}, x)$ складається з скінченного графа $\mathbf{\Gamma}$ та нескінченного ланцюга. Тоді:

1. Якщо $(\mathbf{\Gamma}, x) \in \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{D}_\infty, \mathbf{B}_\infty\}$, то $ind(\mathbf{\Gamma}, x) = 2$;

2. Якщо $(\mathbf{\Gamma}, x) \notin \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{D}_\infty, \mathbf{B}_\infty\}$, то $ind(\mathbf{\Gamma}, x) > 2$ та є максимальним коренем рівняння
$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Алгоритм знаходження індексу графа $\mathbf{G}$, що складається зі скінченного графа $\mathbf{\Gamma}$ та нескінченного ланцюга, за допомогою **теореми 2.2**:

1. Знайти характеристичні многочлени графів $\mathbf{\Gamma}$ та $\mathbf{\Gamma} - \mathbf{x}$: $P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda)$, $P_{\mathbf{\Gamma}-\mathbf{x}}(\lambda)$. Маємо рівняння $\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda)} = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$;

2. Для зручності зробити заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$. Тоді $\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2} = \mu$. Підставити значення у рівняння $\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda)} = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$. Отримуємо рівняння з одним невідомим μ;

3. У рівнянні з пункту 2 знайти максимальне значення μ;

4. Знайти λ, підставивши μ у заміну з пункту 2. Це значення λ і є шуканим індексом графа $\mathbf{G}$.

Кроки 1 та 2 можна об'єднати.

3 Класифікація зліченних графів Кокстера відносно значення індекса

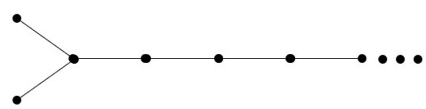
3.1 Графи Кокстера, які мають індекс у проміжку $\left[2, \sqrt{\sqrt{5}+2}\right]$

Дана теорема дає повну класифікацію зліченних графів Кокстера у проміжку $\left[2, \sqrt{\sqrt{5}+2}\right]$

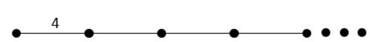
Теорема 3.1. [6, 7] Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера, то

1. $ind\,\mathbf{G} \geqslant 2$
2. Якщо $ind\,\mathbf{G} = 2$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

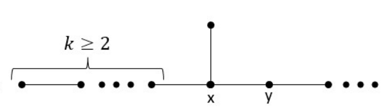
A_∞

D_∞ 

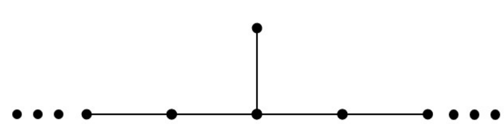
$A_\mathbb{Z}$

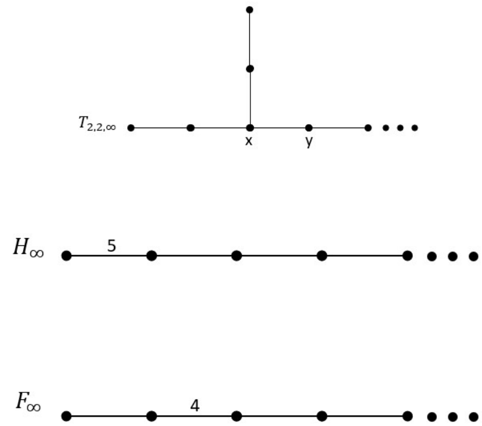
B_∞ 

3. Якщо $ind\,\mathbf{G} \in \left(2; \sqrt{\sqrt{5}+2}\right)$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

$T_{1,k,\infty}$ 

4. Якщо $ind\,\mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

$T_{1,\infty,\infty}$ 



3.2 Графи Кокстера, які мають індекс у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

Наведемо кілька визначень, лем та тверджень, що знадобляться для подальших розрахунків.

Означення 3.1. *Висячою вершиною* називаємо вершину графа, яка має степінь 1.

Дана лема допомагає обчислити характеристичний многочлен графа, у якого є висяча вершина.

Лема 3.1. [1] Нехай x – висяча вершина графа $\mathbf{G}$ та y – суміжна до x вершина.

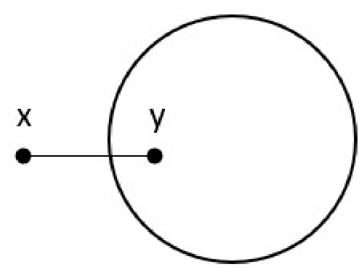


Рис.2

Тоді для обчислення характеристичного многочлена виконується рівність.

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-x}(\lambda) - P_{\mathbf{G}-x-y}(\lambda)$$

Сформулюємо подібну лему, якщо ребро, що з'єднує вершини x та y, має позначку k.

Лема 3.2. [1] Нехай x – висяча вершина графа $\mathbf{G}$ та y – суміжна до x вершина. Ребро, що з'єднує вершини x та y, має позначку k.

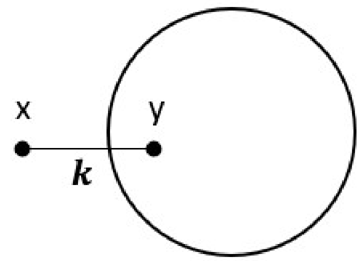


Рис.3

Тоді для обчислення характеристичного многочлена виконується рівність.

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda\, P_{\mathbf{G}-x}(\lambda) - 4\cos^2\frac{\pi}{k}\, P_{\mathbf{G}-x-y}(\lambda)$$

Доведення. Побудуємо матрицю суміжності для графа $\mathbf{G}$ для порядку вершин $x, y, \ldots$ (подальший порядок неважливий). Введемо для матриць суміжності графів $\mathbf{G}-x$ та $\mathbf{G}-x-y$ позначення $A_1 = A(\mathbf{G}-x)$ та $A_2 = A(\mathbf{G}-x-y)$ відповідно. Тоді характеристичні многочени будуть $P_{\mathbf{G}-x} = |\lambda I - A_1|$ та $P_{\mathbf{G}-x-y} = |\lambda I - A_2|$ відповідно.

Розглянемо структуру характеристичного многочлену $P_{\mathbf{G}} = |\lambda I - A|$:

$$P_{\mathbf{G}} = \left|\begin{array}{c|cccc} \lambda & -2\cos\frac{\pi}{k} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline -2\cos\frac{\pi}{k} & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \lambda I - A_1 & & \\ 0 & & & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|ccc} \lambda & -2\cos\frac{\pi}{k} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline -2\cos\frac{\pi}{k} & \lambda & * & \ldots & * \\ \cline{3-5} 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda I - A_2 & \\ 0 & * & & & \end{array}\right|$$

Розкладемо визначник за першим рядком.

$$P_{\mathbf{G}} = \lambda|\lambda I - A_1| - (-2\cos\tfrac{\pi}{k}) \left|\begin{array}{c|ccc} -2\cos\frac{\pi}{k} & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \lambda I - A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right| =$$

$$= \lambda|\lambda I - A_1| + 2\cos\tfrac{\pi}{k} \left|\begin{array}{c|ccc} -2\cos\frac{\pi}{k} & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \lambda I - A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right|$$

Розкладемо визначник у другому доданку за першим стовпчиком.

$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda\,|\lambda I - A_1| + 2\cos\frac{\pi}{k}\,(-2\cos\frac{\pi}{k})\,|\lambda I - A_2| = \lambda\,|\lambda I - A_1| - 4\cos^2\frac{\pi}{k}\,|\lambda I - A_2| =$

$= \lambda\, P_{\mathbf{G}-x}(\lambda) - 4\cos^2\frac{\pi}{k}\, P_{\mathbf{G}-x-y}(\lambda)$

$\square$

Зауваження 3.1. Для зручності характеристичний многочлен графа A_n будемо позначати: $P_{A_n}(\lambda) = P_n(\lambda)$

Твердження 3.1. [1] Характеристичний многочлен графа A_n задоволняє наступному рекурентному співвідношеню:

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$$

З початковими умовами

$$P_1(\lambda) = \lambda$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Лема 3.3. Характеристичний многочлен графа A_n можна знайти за наступному формулою:

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}} \right), \text{ де}$$

$$\mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Твердження 3.2. [1] Характеристичний многочлен графа D_n задоволняє наступному рекурентному співвідношеню:

$$P_{D_n}(\lambda) = \lambda \left(P_{n-1}(\lambda) - P_{n-3}(\lambda) \right)$$

Твердження 3.3. Характеристичний многочлен графа B_n задовілняє наступному рекурентному співвідношеню:

$$P_{B_n}(\lambda) = \lambda P_{B_{n-1}}(\lambda) - P_{B_{n-2}}(\lambda)$$

З початковими умовами

$$P_{B_1}(\lambda) = \lambda$$

$$P_{B_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2$$

Лема 3.4. Характеристичний многочлен графа A_n можна знайти за наступному формулою:

$$P_{B_n}(\lambda) = \mu^n + \frac{1}{\mu^n}, \text{ де}$$

$$\mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Лема 3.5. Характеристичний многочлен незв'язного графа дорівнює добутку характеристичних многочленів його компонент зв'язності.

Лема 3.6. [7] Нехай $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ та $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$, тоді $\lambda = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

Доведення. [7]

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2(1+\sqrt{5})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(7+3\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-8-4\sqrt{5}}{-4}} = \sqrt{2+\sqrt{5}}$$

□

Приклад 3.1. Знайдемо індекс графа **G**, що складається з зірчатого скінченного графа $K_{1,n},\ n > 1$ та нескінченного ланцюга(рис.4). [17]

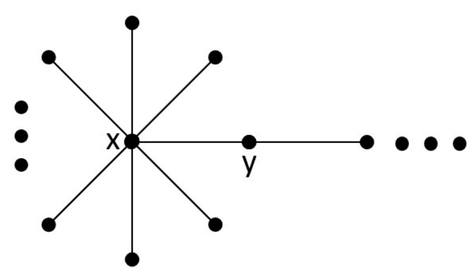


Рис.4

Нехай **Г** рівний графу $K_{1,n}$ на рис.5.

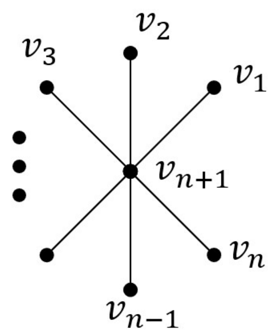


Рис.5

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma})| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - \frac{n}{\lambda} \end{vmatrix} =$$

$= \lambda^n(\lambda - \frac{n}{\lambda}) = \lambda^{n+1} - n\lambda^{n-1}$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{n+1} - n\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - n} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - n} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - n} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - n} = \mu$$

$$\frac{\mu^2+1}{\mu^4+(2-n)\mu^2+1}=1$$
$$\mu^4-(1-n)\mu^2=0$$
$$\mu^2+1-n=0$$
$$\mu=\sqrt{n-1}$$

4. Отже,
$$\lambda=\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}=\frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:
$$ind\,\mathbf{G}=\frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

При $n=2$ граф збігіється с графом D_∞ і $ind\,D_\infty=2$.
При $n=3$ граф збігіється с графом $T_{1,1,1,\infty}$ і $ind\,T_{1,1,1,\infty}=\frac{3}{\sqrt{2}}$
При $n=4$ $ind\,\mathbf{G}=\frac{4}{\sqrt{3}}>\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Отже, із зірчастих графів, індекс яких належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, підходить тільки при $n=3$. Тобто граф $T_{1,1,1,\infty}$, бо при $n=4$ індекс строго більший за $\frac{3}{\sqrt{2}}$, а при збільшені кількості ребер, індекс не зменшується (**твердження 2.1**).

Також можна зробити висновок, що степінь вершини не повинен перевищувати 3.

Приклад 3.2. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$, що складається з зірчатого скінченного графа $K_{1,n}$ загального виду, з позначками $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n$ на ребрах та нескінченного ланцюга(рис.6). [17]

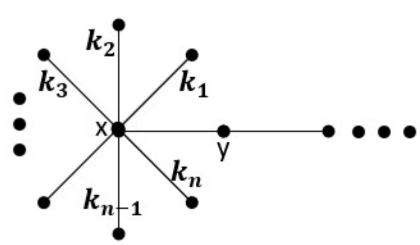


Рис.6

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу $K_{1,n}$ з позначками $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n$ на ребрах на рис.7.

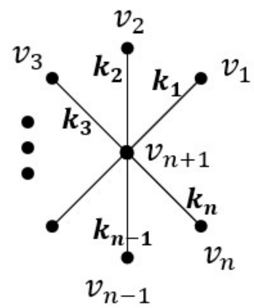


Рис.7

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2\cos\frac{\pi}{k_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\cos\frac{\pi}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\cos\frac{\pi}{k_n} \\ 2\cos\frac{\pi}{k_1} & 2\cos\frac{\pi}{k_2} & \dots & 2\cos\frac{\pi}{k_n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma})| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -2\cos\frac{\pi}{k_1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -2\cos\frac{\pi}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -2\cos\frac{\pi}{k_n} \\ -2\cos\frac{\pi}{k_1} & -2\cos\frac{\pi}{k_2} & \dots & -2\cos\frac{\pi}{k_n} & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -2\cos\frac{\pi}{k_1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -2\cos\frac{\pi}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -2\cos\frac{\pi}{k_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - \frac{4}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} \end{vmatrix} = \lambda^n\left(\lambda - \frac{4}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}\right) =$$

$$= \lambda^{n+1} - 4\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{n+1} - 4\lambda^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
   Маємо:
$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ
$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}} = \mu$$
$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - 4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}} = \mu$$
$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 + 1 + (2 - 4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i})\mu^2} = 1$$
$$\mu^4 + (1 - 4\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i})\mu^2 = 0$$
$$\mu^2 + 1 - 4\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} = 0$$
$$\mu = \sqrt{4\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} - 1}$$

4. Отже,

$$\lambda = \sqrt{4\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} - 1} + \frac{1}{\sqrt{4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} - 1}} = \frac{4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}}{\sqrt{4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} - 1}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G} = \frac{4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i}}{\sqrt{4\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\pi}{k_i} - 1}}$$

При $n = 2, k_1 = 3, k_2 = 4$ $ind\,\mathbf{G} = \frac{4(\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4})}{\sqrt{4(\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4})-1}} = \frac{4(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})}{\sqrt{4(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Якщо ще збільшити позначку, то індекс графа буде строго більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ **(твердження 2.1)**

При $n = 3, k_i = 3$ граф збігіється с графом $T_{1,1,1,\infty}$ і $ind\,T_{1,1,1,\infty} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. При збільшені мітки, індекс строго збільшується **(твердження 2.1)**, тому у ребер, інцидентних з вершиною степеня 4, може бути тільки одна позначка 4.

Приклад 3.3. Знайдемо індекс графа $T_{2,2,\infty}$(рис.8). [7]

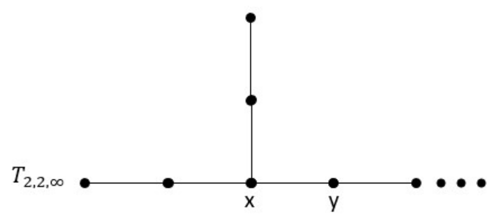


Рис.8

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.9.

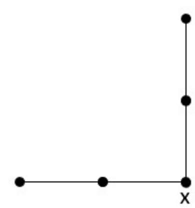


Рис.9

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_5(\lambda)$$

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \quad \textbf{(твердження 3.1)}$$

$$P_1(\lambda) = \lambda, \quad P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad P_3(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda,$$

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1, \quad P_5(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3)$$

Отже,

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3)$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_2(\lambda) \cdot P_2(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3)} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda(\lambda^2 - 3)} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^3 - 3\lambda} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
   Маємо:

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 1}{(\mu + \frac{1}{\mu})^3 - 3(\mu + \frac{1}{\mu})} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 1}{(\mu + \frac{1}{\mu})^3 - 3(\mu + \frac{1}{\mu})} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - 1}{\mu^3 + 3\mu + 3\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3} - 3\mu - 3\frac{1}{\mu}} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1}{\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}} = \mu$$

$$\frac{\mu^4 + \mu^2 + 1}{\mu^6 + 1} = 1$$

$$\mu^6 - \mu^4 - \mu^2 = 0$$

$$\mu^4 - \mu^2 - 1 = 0$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

4. Отже, за **лемою 3.6**

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{5}+2}$$

Індекс графа **G**:

$$ind\,\mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$$

Приклад 3.4. Знайдемо індекс графа $T_{1,k,\infty},\ k \geqslant 2$(рис 10). [7]

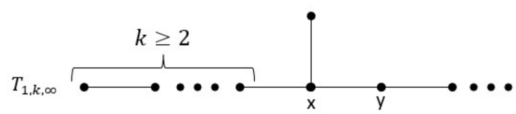


Рис.10

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.11.

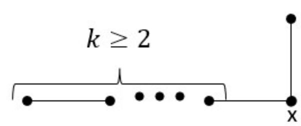


Рис.11

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_{k+2}(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+3} - \frac{1}{\mu^{k+3}})\textbf{(лема 3.3)}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_k(\lambda)\cdot P_1(\lambda) = \frac{\lambda}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})\textbf{(лема 3.3)}$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\frac{\mu+\frac{1}{\mu}}{\mu-\frac{1}{\mu}}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})}{\frac{1}{\mu-\frac{1}{\mu}}(\mu^{k+3} - \frac{1}{\mu^{k+3}})} = \frac{(\mu+\frac{1}{\mu})(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})}{\mu^{k+3} - \frac{1}{\mu^{k+3}}} = \frac{\mu(\mu^2+1)(\mu^{2k+2}-1)}{\mu^{2k+6}-1} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu(\mu^2+1)(\mu^{2k+2}-1)}{\mu^{2k+6}-1} = \mu$$

$$\frac{\mu^{2k+4}-\mu^2+\mu^{2k+2}-1}{\mu^{2k+6}-1} = 1$$

$$\mu^{2k+6}-\mu^{2k+4}-\mu^{2k+2}+\mu^2 = 0$$

$$\mu^{2k+4}-\mu^{2k+2}-\mu^{2k}+1 = 0$$

$$\mu^{2k}(\mu^4-\mu^2-1+\frac{1}{\mu^{2k}}) = 0$$

$$\mu^4-\mu^2-1+\frac{1}{\mu^{2k}} = 0$$

Граф $T_{1,k,\infty}$ одержується з $T_{1,k+1,\infty}$ видаленням вершини. Тому послідовність $ind\, T_{1,k,\infty}$ не спадає. Спрямуємо $k \to \infty$

$$\mu^4-\mu^2-1 \to 0$$

$$\mu \to \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

3. Отже, за **лемою 3.6**

$$\lambda \to \sqrt{\sqrt{5}+2}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\, T_{1,k,\infty} \uparrow \sqrt{\sqrt{5}+2}, \quad k \to \infty$$

Отже, для будь-якого $k \geqslant 2, \quad ind\, T_{1,k,\infty} < \sqrt{\sqrt{5}+2}$

Приклад 3.5. Знайдемо рівняння для знаходження індекса графа $T_{k,l,\infty},\ k \geqslant 2$(рис.12).

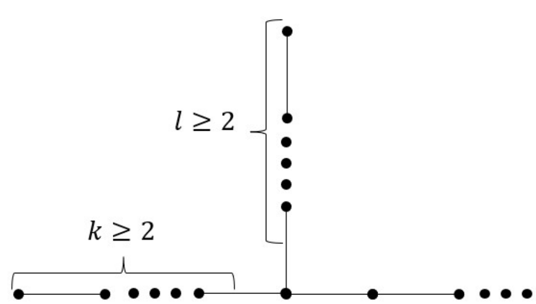


Рис.12

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.13.

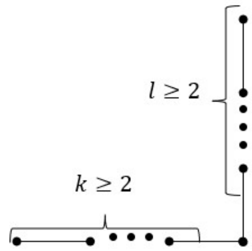


Рис.13

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_{k+l+1}(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+l+2} - \frac{1}{\mu^{k+l+2}})\textbf{(лема 3.3)}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_k(\lambda) \cdot P_l(\lambda) = \frac{1}{(\mu - \frac{1}{\mu})^2}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}})\textbf{(лема 3.3)}$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\frac{1}{(\mu-\frac{1}{\mu})^2}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}})}{\frac{1}{\mu-\frac{1}{\mu}}(\mu^{k+l+2} - \frac{1}{\mu^{k+l+2}})} = \frac{(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}})}{(\mu - \frac{1}{\mu})(\mu^{k+l+2} - \frac{1}{\mu^{k+l+2}})} = \mu$$

2. Спростимо вираз

$$\frac{(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}})}{(\mu - \frac{1}{\mu})(\mu^{k+l+2} - \frac{1}{\mu^{k+l+2}})} = \mu$$

$$\frac{(\mu^{2k+2} - 1)(\mu^{2l+2} - 1)}{(\mu^2 - 1)(\mu^{2k+2l+4} - 1)} = 1$$

$$\mu^{2k+2l+4} - \mu^{2k+2} - \mu^{2l+2} + 1 = \mu^{2k+2l+6} - \mu^2 - \mu^{2k+2l+4} + 1$$

$$\mu^{2k+2l+6} - 2\mu^{2k+2l+4} + \mu^{2k+2} + \mu^{2l+2} - \mu^2 = 0$$

$$\mu^2(\mu^{2k+2l+4} - 2\mu^{2k+2l+2} + \mu^{2k} + \mu^{2l} - 1) = 0$$

$$\mu^{2k+2l+4} - 2\mu^{2k+2l+2} + \mu^{2k} + \mu^{2l} - 1 = 0$$

Приклад 3.6. Знайдемо індекс графа $T_{2,3,\infty}$(рис.14). [7]

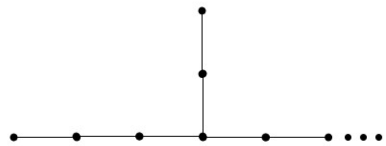


Рис.14

З **прикладу 3.5**

$$\mu^{2k+2l+4} - 2\mu^{2k+2l+2} + \mu^{2k} + \mu^{2l} - 1 = 0$$

$$k = 3;\ l = 2$$

$$\mu^{14} - 2\mu^{12} + \mu^{6} + \mu^{4} - 1 = 0$$

$$(\mu^2 - 1)(\mu^{12} - \mu^{10} - \mu^8 - \mu^6 + \mu^2 + 1) = 0$$

$$\mu^{12} - \mu^{10} - \mu^8 - \mu^6 + \mu^2 + 1 = 0$$

$$(\mu^2 - 1)(\mu^{10} - \mu^6 - 2\mu^4 - 2\mu^2 - 1) = 0$$

$$\mu^{10} - \mu^6 - 2\mu^4 - 2\mu^2 - 1 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$:

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{10} - \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{6} - 2\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{4} - 2\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{2} - 1 =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3} - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^5 + 5(\sqrt{5})^4 + 10(\sqrt{5})^3 + 10(\sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5} + 1}{2^5} - \frac{(\sqrt{5})^3 + 3(\sqrt{5})^2 + 3\sqrt{5} + 1}{2^3} -$$

$$-2\,\frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1}{2^2} - 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{25\sqrt{5} + 125 + 50\sqrt{5} + 50 + 5\sqrt{5} + 1}{2^5} - \frac{5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1}{2^3} -$$

$$-2\,\frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{2^2} - 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{176 + 80\sqrt{5}}{2^5} - \frac{16 + 8\sqrt{5}}{2^3} - 2\,\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2^2} - 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{2^4(11+5\sqrt{5})}{2^5} - \frac{2^3(2+\sqrt{5})}{2^3} - 2\,\frac{2(3+\sqrt{5})}{2^2} - 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{11+5\sqrt{5}}{2} - \frac{2(2+\sqrt{5})}{2} - \frac{2(3+\sqrt{5})}{2} - \frac{2(1+\sqrt{5})}{2} - 1 =$$

$$= \frac{11+5\sqrt{5}-4-2\sqrt{5}-6-2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-2}{2} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
Тоді $\lambda > \sqrt{\sqrt{5}+2}$ і індекс графа $ind\ T_{2,3,\infty} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$

Приклад 3.7. Знайдемо індекс графа $T_{\infty,\infty,\infty}$(рис.15).

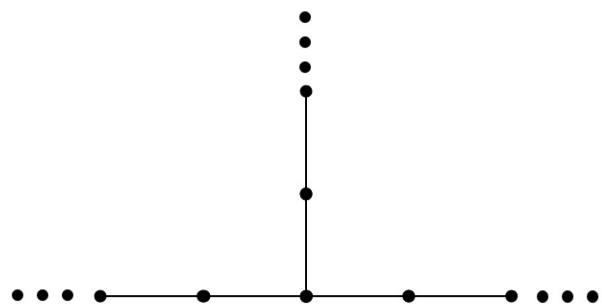


Рис.15

Розглянемо серію скінченних підграфів $T_{k,k,k}$

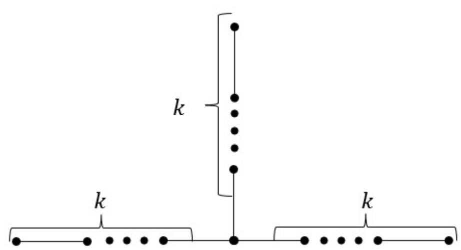
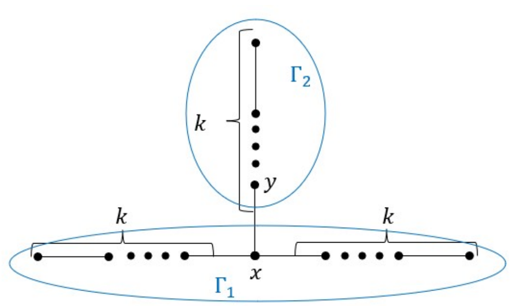


Рис.16

Розкладемо за мостом:



$$P_\Gamma(\lambda) = P_{\Gamma_1}P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 - x}P_{\Gamma_1 - y} = P_{2k+1}P_k - P_kP_kP_{k-1} =$$
$$= \frac{1}{\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2}\left(\mu^{2k+2} - \frac{1}{\mu^{2k+2}}\right)\left(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}}\right) -$$
$$-\frac{1}{\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^3}\left(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}}\right)^2\left(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})\left((\mu^{2k+2} - \frac{1}{\mu^{2k+2}}) - \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^k - \frac{1}{\mu^k})\right)$$

Прирівняємо до 0:

$$\frac{1}{\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})\left((\mu^{2k+2} - \frac{1}{\mu^{2k+2}}) - \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^k - \frac{1}{\mu^k})\right) = 0$$

$$(\mu^{2k+2} - \frac{1}{\mu^{2k+2}}) - \frac{\mu}{\mu^2 - 1}(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}) = 0$$
$$(\mu^{4k+4} - 1) - \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1}(\mu^{2k+2} - 1)(\mu^{2k} - 1) = 0$$
$$(\mu^{4k+4} - 1)(\mu^2 - 1) - \mu^2(\mu^{4k+2} - \mu^{2k+2} - \mu^{2k} + 1) = 0$$
$$\mu^{4k+6} - \mu^{4k+4} - \mu^2 + 1 - \mu^{4k+4} + \mu^{2k+4} + \mu^{2k+2} - \mu^2 = 0$$
$$\mu^{4k+6} - 2\mu^{4k+4} + \mu^{2k+4} + \mu^{2k+2} - 2\mu^2 + 1 = 0$$
$$\mu^{4k+4}\left(\mu^2 - 2 + \frac{1}{\mu^{2k}} + \frac{1}{\mu^{2k+2}} - 2\frac{1}{\mu^{4k+2}} + \frac{1}{\mu^{4k+4}}\right) = 0$$
$$\mu^2 - 2 + \frac{1}{\mu^{2k}} + \frac{1}{\mu^{2k+2}} - \frac{2}{\mu^{4k+2}} + \frac{1}{\mu^{4k+4}} = 0$$

Спрямуємо $k \to \infty$

$$\mu^2 - 2 \to 0$$
$$\mu \to \sqrt{2}$$

Отже,

$$\lambda \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа **G**:

$$ind\, T_{\infty,\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} ind\, T_{k,k,k} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.8. Знайдемо індекс графа $T_{1,1,2,\infty}$(рис.17).

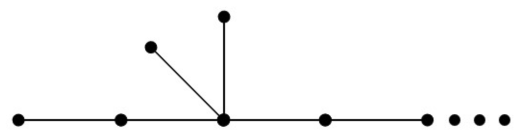


Рис.17

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.18.

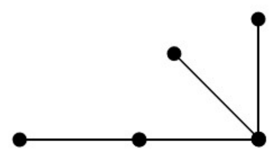


Рис.18

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_{D_5}(\lambda) = \lambda(P_4(\lambda) - P_2(\lambda)) = \lambda(\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 - (\lambda^2 - 1)) = \lambda(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2)$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_2(\lambda) \cdot P_1(\lambda) \cdot P_1(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1)}{\lambda(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2)} = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)}{\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
Маємо:

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})((\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 1)}{(\mu + \frac{1}{\mu})^4 - 4(\mu + \frac{1}{\mu})^2 + 2} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu+\frac{1}{\mu})((\mu+\frac{1}{\mu})^2-1)}{(\mu+\frac{1}{\mu})^4-4(\mu+\frac{1}{\mu})^2+2}=\mu$$

$$\frac{\mu^3+3\mu+3\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^3}-\mu-\frac{1}{\mu}}{\mu^4+4\mu^2+6+4\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\mu^4}-4\mu^2-8-4\frac{1}{\mu^2}+2}=\mu$$

$$\frac{\mu^3+\frac{1}{\mu^3}+2\mu+2\frac{1}{\mu}}{\mu^4+\frac{1}{\mu^4}}=\mu$$

$$\frac{\mu^6+1+2\mu^4+2\mu^2}{\mu^8+1}=1$$

$$\mu^8-\mu^6-2\mu^4-2\mu^2=0$$

$$\mu^6-\mu^4-2\mu^2-2=0$$

Підставимо у рівняння $\mu=\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^6-(\sqrt{2})^4-2(\sqrt{2})^2-2=2^3-2^2-2\cdot 2-2=$$
$$=8-4-4-2=-2<0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu=\sqrt{2}$.

4. Тоді

$$\lambda>\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа **G**:

$$ind\ T_{1,1,2,\infty}>\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.9. Знайдемо індекс графа **G**(рис.19).

Рис.19

Нехай **Г** рівний графу на рис.20.

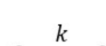


Рис.20

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\frac{\pi}{k} \\ 2\cos\frac{\pi}{k} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma})| = \begin{vmatrix} \lambda & -2\cos\frac{\pi}{k} \\ -2\cos\frac{\pi}{k} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\cos^2\frac{\pi}{k}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = \lambda$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4\cos^2\frac{\pi}{k}} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
   Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4\cos^2\frac{\pi}{k}} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4\cos^2\frac{\pi}{k}} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - 4\cos^2\frac{\pi}{k}} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 + 1 + 2\mu^2 - 4\mu^2\cos^2\frac{\pi}{k}} = 1$$

$$\mu^4 + \mu^2 - 4\mu^2\cos^2\frac{\pi}{k} = 0$$

$$\mu^2 + 1 - 4\cos^2\frac{\pi}{k} = 0$$

$$\mu^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{k} - 1$$

$$\mu = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{k} - 1}$$

4. Отже

$$\lambda = \frac{4\cos^2\frac{\pi}{k}}{\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{k} - 1}}$$

При $k = 4$ граф збігається з B_∞ і $ind\ B_\infty = 2$

При $k = 5$ граф збігається з H_∞ і $ind\ H_\infty = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

При $k = 6$ граф збігається з G_∞ і $ind\ G_\infty = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Приклад 3.10. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.21).

Рис.21

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.22.

Рис.22

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\cos\frac{\pi}{k} \\ 0 & 2\cos\frac{\pi}{k} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma})| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -2\cos\frac{\pi}{k} \\ 0 & -2\cos\frac{\pi}{k} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - (4\lambda\cos^2\frac{\pi}{k} + \lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 1 - 4\cos^2\tfrac{\pi}{k})$$

$$A(\mathbf{\Gamma} - x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma} - x)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda(\lambda^2 - 1 - 4\cos^2\frac{\pi}{k})} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
   Маємо:
$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{(\mu+\frac{1}{\mu})^2-1}{(\mu+\frac{1}{\mu})((\mu+\frac{1}{\mu})^2-1-4\cos^2\frac{\pi}{k})} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ
$$\frac{(\mu+\frac{1}{\mu})^2-1}{(\mu+\frac{1}{\mu})((\mu+\frac{1}{\mu})^2-1-4\cos^2\frac{\pi}{k})} = \mu$$
$$\frac{\mu^2+\frac{1}{\mu^2}+2-1}{(\mu+\frac{1}{\mu})(\mu^2+\frac{1}{\mu^2}+2-1-4\cos^2\frac{\pi}{k})} = \mu$$
$$\frac{\mu^2+\frac{1}{\mu^2}+1}{(\mu+\frac{1}{\mu})(\mu^2+\frac{1}{\mu^2}+1-4\cos^2\frac{\pi}{k})} = \mu$$
$$\frac{\mu^4+1+\mu^2}{(\mu^2+1)(\mu^4+1+\mu^2-4\mu^2\cos^2\frac{\pi}{k})} = 1$$
$$\mu^4+1+\mu^2 = \mu^6+\mu^2+\mu^4-4\mu^4\cos^2\frac{\pi}{k}+\mu^4+1+\mu^2-4\mu^2\cos^2\frac{\pi}{k}$$
$$\mu^6+\mu^4(1-4\cos^2\frac{\pi}{k})+\mu^2(1-4\cos^2\frac{\pi}{k}) = 0$$
$$\mu^4+\mu^2(1-4\cos^2\frac{\pi}{k})+1-4\cos^2\frac{\pi}{k} = 0$$
$$\mu^2 = \frac{4\cos^2\frac{\pi}{k}-1+\sqrt{16\cos^4\frac{\pi}{k}+8\cos^2\frac{\pi}{k}-3}}{2}$$
$$\mu = \sqrt{\frac{4\cos^2\frac{\pi}{k}-1+\sqrt{16\cos^4\frac{\pi}{k}+8\cos^2\frac{\pi}{k}-3}}{2}}$$

4. Отже
$$\lambda = \frac{4\cos^2\frac{\pi}{k}+1+\sqrt{16\cos^4\frac{\pi}{k}+8\cos^2\frac{\pi}{k}-3}}{\sqrt{2(4\cos^2\frac{\pi}{k}-1+\sqrt{16\cos^4\frac{\pi}{k}+8\cos^2\frac{\pi}{k}-3})}}$$

   При $k=4$ граф збігається з F_∞ і $ind\ F_\infty = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

   При $k=5$ граф збігається з $\widetilde{H}_\infty$ і $ind\ \widetilde{H}_\infty \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\frac{11+3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{1+\sqrt{5}+2\sqrt{\frac{11+3\sqrt{5}}{2}}}} > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Приклад 3.11. Знайдемо індекс графа $\widetilde{F}_\infty$(рис.23). [7]

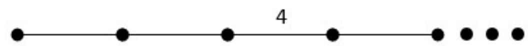


Рис.23

Нехай **Г** рівний графу на рис.24.

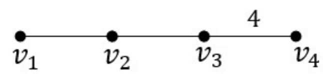


Рис.24

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени: Розкладемо за висячою вершиною:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{\Gamma - v_1}(\lambda) - P_{\Gamma - v_1 - v_2}(\lambda) = \lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 - 1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{4}) - (\lambda^2 - 4\cos^2 \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \lambda^4 - 4\lambda^2 + 2$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_3(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2)$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda(\lambda^2 - 2)}{\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
Маємо:

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})((\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 2)}{(\mu + \frac{1}{\mu})^4 - 4(\mu + \frac{1}{\mu})^2 + 2} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})((\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 2)}{(\mu + \frac{1}{\mu})^4 - 4(\mu + \frac{1}{\mu})^2 + 2} = \mu$$

$$\frac{\mu^3 + 3\mu + 3\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3} - 2\mu - 2\frac{1}{\mu}}{\mu^4 + 4\mu^2 + 6 + 4\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4} - 4\mu^2 - 8 - 4\frac{1}{\mu^2} + 2} = \mu$$

$$\frac{\mu^3 + \frac{1}{\mu^3} + \mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4}} = \mu$$

$$\frac{\mu^6 + 1 + \mu^4 + \mu^2}{\mu^8 + 1} = 1$$

$$\mu^8 - \mu^6 - \mu^4 - \mu^2 = 0$$

$$\mu^6 - \mu^4 - \mu^2 - 1 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$:

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^6 - \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^4 - \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{5} + 3(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3}{2^3} - \frac{1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{2^3} - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{2^2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{16 + 8\sqrt{5}}{2^3} - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2^2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{2^3(2+\sqrt{5})}{2^3} - \frac{2(3+\sqrt{5})}{2^2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{2(2+\sqrt{5}) - (3+\sqrt{5}) - (1+\sqrt{5}) - 2}{2} =$$

$$= \frac{-2}{2} = -1 < 0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

4. Тоді

$$\lambda > \sqrt{\sqrt{5} + 2}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\, T_{1,1,1,\infty} > \sqrt{\sqrt{5} + 2}$$

Приклад 3.12. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.25).

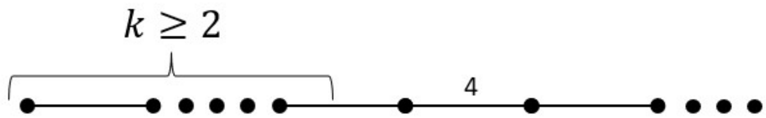


Рис.25

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.26.

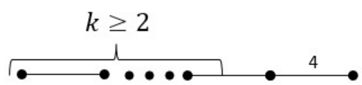


Рис.26

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_{B_{k+2}}(\lambda) = \mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_{k+1}(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}})$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\frac{1}{\mu-\frac{1}{\mu}}(\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}})}{\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}} = \frac{\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}}}{(\mu - \frac{1}{\mu})(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}})} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}}}{(\mu - \frac{1}{\mu})(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}})} = \mu$$

$$\frac{\mu^{2k+4} - 1}{(\mu^2 - 1)(\mu^{2k+4} + 1)} = 1$$

$$\mu^{2k+4} - 1 = \mu^{2k+6} + \mu^2 - \mu^{2k+4} - 1$$

$$\mu^{2k+6} - 2\mu^{2k+4} + \mu^2 = 0$$

$$\mu^{2k+4} - 2\mu^{2k+2} + 1 = 0$$

$$\mu^{2k+2}(\mu^2 - 2 + \frac{1}{\mu^{2k+2}}) = 0$$

$$\mu^2 - 2 + \frac{1}{\mu^{2k+2}} = 0$$

Граф $\mathbf{G}_k$ одержується з $\mathbf{G}_{k+1}$ видаленням вершини. Тому послідовність $ind\ \mathbf{G}_k$ не спадає. Спрямуємо $k \to \infty$

$$\mu^2 - 2 \to 0$$

$$\mu \to \sqrt{2}$$

3. Отже,

$$\lambda \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\ \mathbf{G}_k \uparrow \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad k \to \infty$$

Отже, для будь-якого $k \quad ind\ \mathbf{G}_k < \frac{3}{\sqrt{2}}$

Приклад 3.13. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.27).

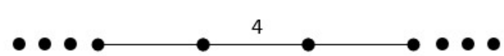


Рис.27

Розглянемо серію скінченних підграфів $\mathbf{\Gamma}_{k,k}$

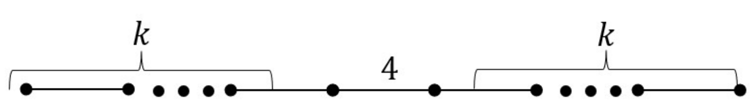
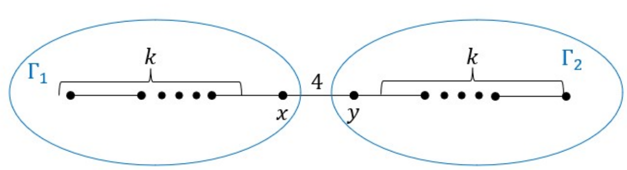


Рис.28

Розкладемо за мостом:



$$P_\Gamma(\lambda) = P_{\Gamma_1}P_{\Gamma_2} - 4\cos^2\frac{\pi}{4}P_{\Gamma_1-x}P_{\Gamma_1-y} = P_{k+1}P_{k+1} - 4\cdot\frac{1}{2}P_kP_k =$$

$$= \frac{1}{\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)^2}\left(\mu^{k+2}-\frac{1}{\mu^{k+2}}\right)^2 - 2\frac{1}{\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)^2}\left(\mu^{k+1}-\frac{1}{\mu^{k+1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)^2}\left(\left(\mu^{k+2}-\frac{1}{\mu^{k+2}}\right)^2 - 2\left(\mu^{k+1}-\frac{1}{\mu^{k+1}}\right)^2\right)$$

Прирівняємо до 0:

$$\frac{1}{\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)^2}\left(\left(\mu^{k+2}-\frac{1}{\mu^{k+2}}\right)^2 - 2\left(\mu^{k+1}-\frac{1}{\mu^{k+1}}\right)^2\right) = 0$$

$$\left(\mu^{k+2}-\frac{1}{\mu^{k+2}}\right)^2 - 2\left(\mu^{k+1}-\frac{1}{\mu^{k+1}}\right)^2 = 0$$

$$\mu^{2k+4} + \frac{1}{\mu^{2k+4}} - 2 - 2\mu^{2k+2} - 2\frac{1}{\mu^{2k+2}} + 4 = 0$$

$$\mu^{2k+2}\left(\mu^2 - 2 + 2\frac{1}{\mu^{2k+2}} + \frac{1}{\mu^{4k+6}} - 2\frac{1}{\mu^{4k+4}}\right) = 0$$

$$\mu^2 - 2 + 2\frac{1}{\mu^{2k+2}} + \frac{1}{\mu^{4k+6}} - 2\frac{1}{\mu^{4k+4}} = 0$$

Спрямуємо $k \to \infty$

$$\mu^2 - 2 \to 0$$

$$\mu \to \sqrt{2}$$

Отже,

$$\lambda \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G} = \lim_{k\to\infty} ind\,\mathbf{\Gamma}_{k,k} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.14. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.29).

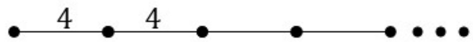


Рис.29

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.30.

Рис.30

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 2\cos\frac{\pi}{4} & 0 & 2\cos\frac{\pi}{4} \\ 0 & 2\cos\frac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma})| = \begin{vmatrix} \lambda & -2\cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ -2\cos\frac{\pi}{4} & \lambda & -2\cos\frac{\pi}{4} \\ 0 & -2\cos\frac{\pi}{4} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - (2\lambda + 2\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda$$

$$A(\mathbf{\Gamma} - x) = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\frac{\pi}{4} \\ 2\cos\frac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{\Gamma} - x)| = \begin{vmatrix} \lambda & -2\cos\frac{\pi}{4} \\ -2\cos\frac{\pi}{4} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda^3 - 4\lambda} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.
   Маємо:

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 2}{(\mu + \frac{1}{\mu})^3 - 4(\mu + \frac{1}{\mu})} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu+\frac{1}{\mu})^2-2}{(\mu+\frac{1}{\mu})^3-4(\mu+\frac{1}{\mu})}=\mu$$

$$\frac{\mu^2+\frac{1}{\mu^2}+2-2}{\mu^3+3\mu+3\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^3}-4\mu-4\frac{1}{\mu}}=\mu$$

$$\frac{\mu^2+\frac{1}{\mu^2}}{\mu^3+\frac{1}{\mu^3}-\mu-\frac{1}{\mu}}=\mu$$

$$\frac{\mu^4+1}{\mu^6+1-\mu^4-\mu^2}=1$$

$$\mu^6-2\mu^4-\mu^2=0$$

$$\mu^4-2\mu^2-1=0$$

$$\mu^2=1+\sqrt{2}$$

$$\mu=\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$\lambda=\sqrt{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}>\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.15. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.31).

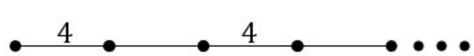


Рис.31

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.32.

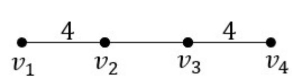


Рис.32

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени: Розкладемо за висячою вершиною:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{\Gamma - v_1}(\lambda) - 4\cos\frac{\pi}{4} P_{\Gamma - v_1 - v_2}(\lambda) = \lambda \cdot P_{B_3}(\lambda) - 2P_{B_2}(\lambda) =$$

$$= \lambda(\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}) - 2(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2})$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}} = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}) - 2(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2}) =$$

$$= \mu^4 + \frac{1}{\mu^2} + \mu^2 + \frac{1}{\mu^4} - 2\mu^2 - 2\frac{1}{\mu^2} = \mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - \mu^2 - \frac{1}{\mu^2}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_{B_3}(\lambda) = \mu^3 + \frac{1}{\mu^3}$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - \mu^2 - \frac{1}{\mu^2}} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - \mu^2 - \frac{1}{\mu^2}} = \mu$$

$$\frac{\mu^6 + 1}{\mu^8 + 1 - \mu^6 - \mu^2} = 1$$

$$\mu^8 - 2\mu^6 - \mu^2 = 0$$

$$\mu^6 - 2\mu^4 - 1 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^6 - 2(\sqrt{2})^4 - 1 = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 1 = 8 - 8 - 1 = -1 < 0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{2}$.

3. Тоді
$$\lambda > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

   Індекс графа **G**:
$$ind\,\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.16. Знайдемо індекс графа **G**(рис.33).

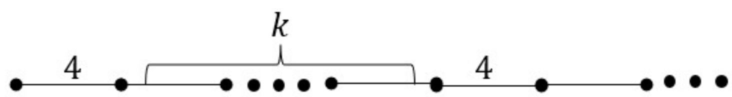


Рис.33

Нехай **Γ** рівний графу на рис.34.

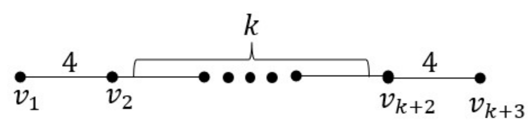


Рис.34

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени: Розкладемо за висячою вершиною:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{\Gamma - v_1}(\lambda) - 4\cos\frac{\pi}{4} P_{\Gamma - v_1 - v_2}(\lambda) = \lambda \cdot P_{B_{k+2}}(\lambda) - 2P_{B_{k+1}}(\lambda) =$$

$$= \lambda(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}) - 2(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}})$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}} = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}) - 2(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}}) =$$

$$= \mu^{k+3} + \frac{1}{\mu^{k+1}} + \mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+3}} - 2\mu^{k+1} - 2\frac{1}{\mu^{k+1}} = \mu^{k+3} + \frac{1}{\mu^{k+3}} - \mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_{B_{k+2}}(\lambda) = \mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}}{\mu^{k+3} + \frac{1}{\mu^{k+3}} - \mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}}} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}}{\mu^{k+3} + \frac{1}{\mu^{k+3}} - \mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}}} = \mu$$

$$\frac{\mu^{2k+4} + 1}{\mu^{2k+6} + 1 - \mu^{2k+4} - \mu^2} = 1$$

$$\mu^{2k+6} - 2\mu^{2k+4} - \mu^2 = 0$$

$$\mu^{2k+4} - 2\mu^{2k+2} - 1 = 0$$

$$\mu^{2k+2}(\mu^2 - 2 - \frac{1}{\mu^{2k+2}}) = 0$$

$$\mu^2 - 2 - \frac{1}{\mu^{2k+2}} = 0$$

Граф $\mathbf{G}_{k+1}$ одержується з $\mathbf{G}_k$ підрозбиттям внутрішнього ребра. Тому послідовність $ind\,\mathbf{G}_k$ не зростає. Спрямуємо $k \to \infty$

$$\mu^2 - 2 \to 0$$

$$\mu \to \sqrt{2}$$

3. Отже,

$$\lambda \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G}_k \downarrow \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad k \to \infty$$

Отже, для будь-якого k $\quad ind\,\mathbf{G}_k > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Приклад 3.17. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.35).

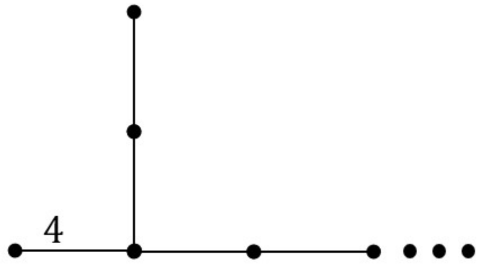


Рис.35

Нехай **Г** рівний графу на рис.36.

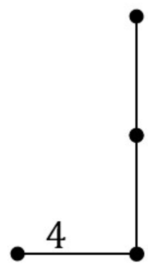


Рис.36

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_{B_4}(\lambda) = \mu^4 + \frac{1}{\mu^4}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_2(\lambda) \cdot P_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}-x} = (\mu + \frac{1}{\mu})\left((\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 1\right) =$$

$$= (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - 1) = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1)$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{(\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1)}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4}} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu+\frac{1}{\mu})(\mu^2+\frac{1}{\mu^2}+1)}{\mu^4+\frac{1}{\mu^4}}=\mu$$

$$\frac{(\mu^2+1)(\mu^4+1+\mu^2)}{\mu^8+1}=1$$

$$\mu^6+\mu^2+\mu^4+\mu^4+1+\mu^2=\mu^8+1$$

$$\mu^8-\mu^6-2\mu^4-2\mu^2=0$$

$$\mu^6-\mu^4-2\mu^2-2=0$$

Підставимо у рівняння $\mu=\sqrt{2}$:

$(\sqrt{2})^6-(\sqrt{2})^4-2(\sqrt{2})^2-2=2^3-2^2-2\cdot 2-2=8-4-4-2=-2<0$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu=\sqrt{2}$.

3. Тоді

$$\lambda>\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\ \mathbf{G}>\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.18. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.37).

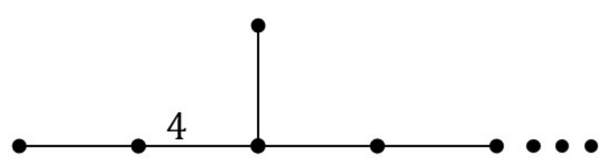


Рис.37

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.38.

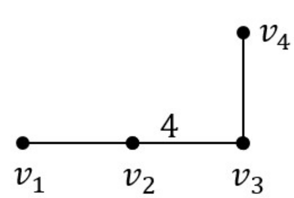


Рис.38

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени: Розкладемо за висячою вершиною v_1:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{\Gamma - v_1}(\lambda) - P_{\Gamma - v_1 - v_2}(\lambda) = \lambda P_{B_3}(\lambda) - P_2(\lambda) = \lambda(\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}) - (\lambda^2 - 1)$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}} = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}) - ((\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 1) =$$

$$= \mu^4 + \frac{1}{\mu^2} + \mu^2 + \frac{1}{\mu^4} - \mu^2 - \frac{1}{\mu^2} - 1 = \mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 1$$

Аналогічно до **прикладу 3.17**

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1)$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{(\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1)}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 1} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1)}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 1} = \mu$$

$$\frac{(\mu^2 + 1)(\mu^4 + 1 + \mu^2)}{\mu^8 + 1 - \mu^4} = 1$$

$$\mu^6 + \mu^2 + \mu^4 + \mu^4 + 1 + \mu^2 = \mu^8 + 1 - \mu^4$$

$$\mu^8 - \mu^6 - 3\mu^4 - 2\mu^2 = 0$$

$$\mu^6 - \mu^4 - 3\mu^2 - 2 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^6 - (\sqrt{2})^4 - 3(\sqrt{2})^2 - 2 = 2^3 - 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 8 - 4 - 6 - 2 = -4 < 0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{2}$.

3. Тоді
$$\lambda > \frac{3}{\sqrt{2}}$$
Індекс графа **G**:
$$ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.19. Знайдемо індекс графа **G**(рис.39). [7]

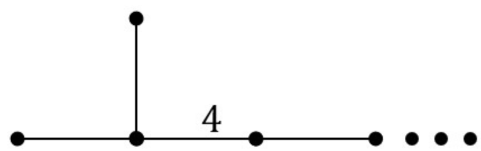


Рис.39

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.40.

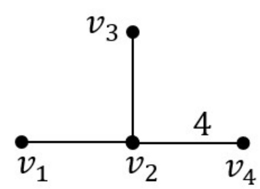


Рис.40

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени: Розкладемо за висячою вершиною v_1:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{\Gamma - v_1}(\lambda) - P_{\Gamma - v_1 - v_2}(\lambda) = \lambda P_{B_3}(\lambda) - (P_1(\lambda))^2 = \lambda(\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}) - \lambda^2$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}} = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}) - (\mu + \frac{1}{\mu})^2 =$$

$$= \mu^4 + \frac{1}{\mu^2} + \mu^2 + \frac{1}{\mu^4} - \mu^2 - \frac{1}{\mu^2} - 2 = \mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 2$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_3(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^4 - \frac{1}{\mu^4})$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\frac{1}{\mu-\frac{1}{\mu}}(\mu^4 - \frac{1}{\mu^4})}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 2} = \frac{\mu^4 - \frac{1}{\mu^4}}{(\mu - \frac{1}{\mu})(\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 2)} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\frac{1}{\mu-\frac{1}{\mu}}(\mu^4 - \frac{1}{\mu^4})}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 2} = \frac{\mu^4 - \frac{1}{\mu^4}}{(\mu - \frac{1}{\mu})(\mu^4 + \frac{1}{\mu^4} - 2)} = \mu$$

$$\frac{\mu^8 - 1}{(\mu^2 - 1)(\mu^8 + 1 + 2\mu^4)} = 1$$

$$\mu^8 - 1 = \mu^10 + \mu^2 - 2\mu^6 - \mu^8 - 1 + 2\mu^4$$

$$\mu^10 - 2\mu^8 - 2\mu^6 + 2\mu^4 + \mu^2 = 0$$

$$\mu^8 - 2\mu^6 - 2\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0$$

$$(\mu^2 - 1)(\mu^6 - \mu^4 - 3\mu^2 - 1) = 0$$

$$\mu^6 - \mu^4 - 3\mu^2 - 1 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{2}$:

$(\sqrt{2})^6 - (\sqrt{2})^4 - 3(\sqrt{2})^2 - 1 = 2^3 - 2^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 8 - 4 - 6 - 1 = -3 < 0$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{2}$.

3. Тоді

$$\lambda > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Приклад 3.20. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.41).

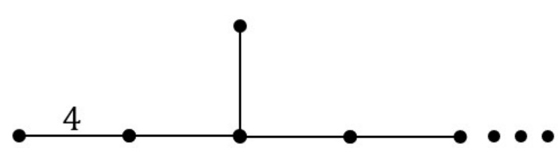


Рис.41

Нехай **Г** рівний графу на рис.42.

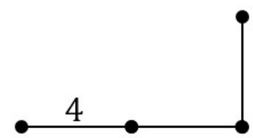


Рис.42

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = P_{B_4}(\lambda) = \mu^4 + \frac{1}{\mu^4}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_{B_2}(\lambda) \cdot P_1(\lambda) = \lambda(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2})$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}-x} = (\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2})$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{(\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2})}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4}} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2})}{\mu^4 + \frac{1}{\mu^4}} = \mu$$

$$\frac{(\mu^2 + 1)(\mu^4 + 1)}{\mu^8 + 1} = 1$$

$$\mu^6 + \mu^4 + \mu^2 + 1 = \mu^8 + 1$$

$$\mu^8 - \mu^6 - \mu^4 - \mu^2 = 0$$

$$\mu^6 - \mu^4 - \mu^2 - 1 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$:

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^6-\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2-1=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=$$

$$=\frac{(\sqrt{5})^3+3(\sqrt{5})^2+3\sqrt{5}+1}{2^3}-\frac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}{2^2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=$$

$$=\frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{2^3}-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{2^2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=$$

$$=\frac{16+8\sqrt{5}}{2^3}-\frac{6+2\sqrt{5}}{2^2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{2^3(2+\sqrt{5})}{2^3}-\frac{2(3+\sqrt{5})}{2^2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=$$

$$=\frac{2(2+\sqrt{5})}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{4+2\sqrt{5}-3-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}-2}{2}=$$

$$=\frac{-2}{2}=-1<0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Тоді $\lambda>\sqrt{\sqrt{5}+2}$ і індекс графа $ind\,\mathbf{G}>\sqrt{\sqrt{5}+2}$

Підставимо у рівняння $\mu=\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^6-(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^2-1=2^3-2^2-2-1=8-4-2-1=1>0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде меншим за $\mu=\sqrt{2}$.

Тоді $\lambda<\frac{3}{\sqrt{2}}$ і індекс графа $ind\,\mathbf{G}<\frac{3}{\sqrt{2}}$

3. Отже, індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G}\in\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Приклад 3.21. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.43).

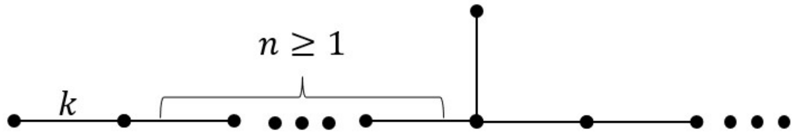


Рис.43

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.44.

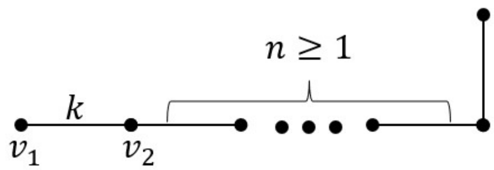


Рис.44

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени: Розкладемо за висячою вершиною v_1:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{\Gamma - v_1}(\lambda) - 4\cos^2\frac{\pi}{k} P_{\Gamma - v_1 - v_2}(\lambda) = \lambda P_{n+2}(\lambda) - 4\cos^2\frac{\pi}{k} P_{n+1}(\lambda) =$$

$$= \lambda \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{n+3} - \frac{1}{\mu^{n+3}}) - 4\cos^2\frac{\pi}{k}\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}})$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}-x} = (\mu + \frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{n+3} - \frac{1}{\mu^{n+3}}) - 4\cos^2\frac{\pi}{k}\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}}) =$$

$$= \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}\left(\mu^{n+4} - \frac{1}{\mu^{n+4}} + \mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} - 4\cos^2\frac{\pi}{k}(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}})\right)$$

Розкладемо за висячою вершиною v_1:

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_1(\lambda)(\lambda P_{\Gamma - x - v_1}(\lambda) - P_{\Gamma - x - v_1 - v_2}(\lambda)) =$$

$$= \lambda\left(\lambda P_n(\lambda) - 4\cos^2\frac{\pi}{k} P_{n-1}(\lambda)\right) =$$

$$= \lambda\left(\lambda \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}) - 4\cos^2\frac{\pi}{k}\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^n - \frac{1}{\mu^n})\right)$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}-x} =$$

$$= (\mu + \frac{1}{\mu}) \left((\mu + \frac{1}{\mu}) \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} (\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}) - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} (\mu^n - \frac{1}{\mu^n}) \right) =$$

$$= \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} + \mu^n - \frac{1}{\mu^n} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^n - \frac{1}{\mu^n}) \right)$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\frac{\mu+\frac{1}{\mu}}{\mu-\frac{1}{\mu}} \left(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} + \mu^n - \frac{1}{\mu^n} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^n - \frac{1}{\mu^n}) \right)}{\frac{1}{\mu-\frac{1}{\mu}} \left(\mu^{n+4} - \frac{1}{\mu^{n+4}} + \mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}}) \right)} =$$

$$= \frac{(\mu + \frac{1}{\mu}) \left(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} + \mu^n - \frac{1}{\mu^n} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^n - \frac{1}{\mu^n}) \right)}{\mu^{n+4} - \frac{1}{\mu^{n+4}} + \mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}})} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu}) \left(\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} + \mu^n - \frac{1}{\mu^n} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^n - \frac{1}{\mu^n}) \right)}{\mu^{n+4} - \frac{1}{\mu^{n+4}} + \mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} (\mu^{n+2} - \frac{1}{\mu^{n+2}})} = \mu$$

$$\frac{(\mu^2 + 1)(\mu^{2n+4} - 1 + \mu^{2n+2} - \mu^2 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \mu^{2n+2} + 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \mu^2)}{\mu^{2n+8} - 1 + \mu^{2n+6} - \mu^2 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \mu^{2n+6} + 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \mu^2} = 1$$

$$\mu^{2n+8} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \mu^{2n+6} - (2 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k}) \mu^{2n+4} - (1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k}) \mu^{2n+2} +$$

$+(1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k})\mu^4 + \mu^2 = 0$

$$\mu^{2n+6} - 4\cos^2 \frac{\pi}{k} \mu^{2n+4} - (2 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k}) \mu^{2n+2} - (1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k}) \mu^{2n} +$$

$+(1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{k})\mu^2 + 1 = 0$

Граф $\mathbf{G}_{n+1}$ одержується з $\mathbf{G}_n$ підрозбиттям внутрішнього ребра. Тому послідовність $ind\ \mathbf{G}_n$ не зростає.

3. Розглянемо для різних k

- $k = 4$
  $4\cos^2 \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$$\mu^{2n+6} - 2\mu^{2n+4} - (2-2)\mu^{2n+2} - (1-2)\mu^{2n} + (1-2)\mu^2 + 1 = 0$$

$$\mu^{2n+6} - 2\mu^{2n+4} + \mu^{2n} - \mu^2 + 1 = 0$$
$$\mu^{2n}(\mu^6 - 2\mu^4 + 1 - \frac{1}{\mu^{2n}}(\mu^2 - 1)) = 0$$
$$\mu^6 - 2\mu^4 + 1 - \frac{1}{\mu^{2n}}(\mu^2 - 1) = 0$$

Спрямуємо $n \to \infty$:
$$\mu^6 - 2\mu^4 + 1 \to 0$$
$$\mu \to \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Тоді
$$\lambda \to \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{2+\sqrt{5}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:
$$ind\,\mathbf{G}_n \downarrow \sqrt{2+\sqrt{5}}, \quad n \to \infty$$

При $n = 1$:
$$\mu^8 - 2\mu^6 + \mu^2 - \mu^2 + 1 = 0$$
$$\mu^8 - 2\mu^6 + 1 = 0$$
$$(\mu^2 - 1)(\mu^6 - \mu^4 - \mu^2 - 1) = 0$$
$$\mu^6 - \mu^4 - \mu^2 - 1 = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{2}$:
$$(\sqrt{2})^6 - (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 - 1 = 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = 8 - 4 - 2 - 1 = 1 > 0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде меншим за $\mu = \sqrt{2}$.
Тоді $\lambda < \frac{3}{\sqrt{2}}$ і індекс графа $ind\,\mathbf{G} < \frac{3}{\sqrt{2}}$
Отже, для $k = 4$ та $n \geqslant 1$, $ind\,\mathbf{G} \in \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

- $k = 5$
  $4\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$\mu^{2n+6} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^{2n+4} - (2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2})\mu^{2n+2} - (1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2})\mu^{2n} +$$

$$+(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2})\mu^2+1=0$$

$$\mu^{2n+6}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^{2n+4}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^{2n+2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2n}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2+1=0$$

$$\mu^{2n}(\mu^6-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^4-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\mu^{2n}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2+1))=0$$

$$\mu^6-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^4-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\mu^{2n}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2+1)=0$$

Спрямуємо $n \to \infty$:

$$\mu^6-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^4-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\to 0$$

$$\mu \to \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Тоді

$$\lambda \to \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G}_n \downarrow \sqrt{2+\sqrt{5}}, \quad n\to\infty$$

При $n=1$:

$$\mu^8-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^6-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^4+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2+1=0$$

$$\mu^8-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^6-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^4+1=0$$

$$(\mu^2-1)(2\mu^6-(1+\sqrt{5})\mu^4-2\mu^2-2)=0$$

$$2\mu^6-(1+\sqrt{5})\mu^4-2\mu^2-2=0$$

Підставимо у рівняння $\mu=\sqrt{2}$:

$$2(\sqrt{2})^6-(1+\sqrt{5})(\sqrt{2})^4-2(\sqrt{2})^2-2=2\cdot 2^3-(1+\sqrt{5})2^2-2\cdot 2-2=$$

$$=16-4-4\sqrt{5}-4-2=6-4\sqrt{5}<0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{2}$.
Тоді $\lambda > \frac{3}{\sqrt{2}}$ і індекс графа $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$
При $n = 2$:

$$\mu^{10} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\mu^8 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu^6 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^4 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2 + 1 = 0$$

$$(\mu^2 - 1)(2\mu^8 - (1+\sqrt{5})\mu^6 - 2\mu^4 - (1-\sqrt{5})\mu^2 - 2) = 0$$

$$2\mu^8 - (1+\sqrt{5})\mu^6 - 2\mu^4 - (1-\sqrt{5})\mu^2 - 2) = 0$$

Підставимо у рівняння $\mu = \sqrt{2}$:

$$2(\sqrt{2})^8 - (1+\sqrt{5})(\sqrt{2})^6 - 2(\sqrt{2})^4 - (1-\sqrt{5})(\sqrt{2})^2 - 2 =$$

$$= 2 \cdot 2^4 - (1+\sqrt{5})2^3 - 2 \cdot 2^2 - (1-\sqrt{5})2 - 2 =$$

$$= 32 - 8 - 8\sqrt{5} - 8 - 2 + 2\sqrt{5} - 2 = 12 - 6\sqrt{5} < 0$$

Отже, максимальний корінь рівняння буде меншим за $\mu = \sqrt{2}$.
Тоді $\lambda < \frac{3}{\sqrt{2}}$ і індекс графа $ind\ \mathbf{G} < \frac{3}{\sqrt{2}}$
Отже, для $k = 5$ та $n \geqslant 2$, $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

- $k = 6$
  $4\cos^2\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

$$\mu^{2n+6} - 3\mu^{2n+4} - (2-3)\mu^{2n+2} - (1-3)\mu^{2n} + (1-3)\mu^2 + 1 = 0$$

$$\mu^{2n+6} - 3\mu^{2n+4} + \mu^{2n+2} + 2\mu^{2n} - 2\mu^2 + 1 = 0$$

$$\mu^{2n}(\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2 - \frac{1}{\mu^{2n}}(2\mu^2 - 1)) = 0$$

$$\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2 - \frac{1}{\mu^{2n}}(2\mu^2 - 1) = 0$$

Спрямуємо $n \to \infty$:

$$\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2 \to 0$$

$$\mu \to \sqrt{2}$$

Тоді

$$\lambda \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind\,\mathbf{G}_n \downarrow \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad n \to \infty$$

Отже, для $k = 6 \quad ind\,\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Приклад 3.22. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$(рис.45). [7]

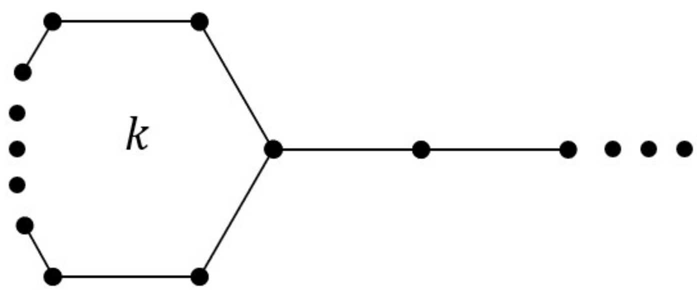


Рис.45

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ рівний графу на рис.46.

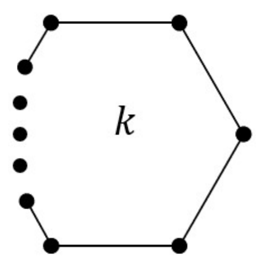


Рис.46

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$P_{\mathbf{\Gamma}}(\lambda) = \lambda P_{k-1}(\lambda) - 2P_{k-2}(\lambda) - 2 = \lambda \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}) - 2\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k-1} - \frac{1}{\mu^{k-1}}) - 2$$

$$\lambda = \mu + \frac{1}{\mu} \to P_{\mathbf{\Gamma}} = (\mu + \frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}) - 2\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}(\mu^{k-1} - \frac{1}{\mu^{k-1}}) - 2 =$$

$$= \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}\left(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k-1}} + \mu^{k-1} - \frac{1}{\mu^{k+1}} - 2\mu^{k-1} + 2\frac{1}{\mu^{k-1}}) - 2\mu + 2\frac{1}{\mu}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}} - \mu^{k-1} + \frac{1}{\mu^{k-1}} - 2\mu + 2\frac{1}{\mu} \right)$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-x}(\lambda) = P_{k-1}(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} (\mu^k - \frac{1}{\mu^k})$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\mathbf{\Gamma}-x}}{P_{\mathbf{\Gamma}}} = \frac{\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} (\mu^k - \frac{1}{\mu^k})}{\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}} - \mu^{k-1} + \frac{1}{\mu^{k-1}} - 2\mu + 2\frac{1}{\mu} \right)} =$$

$$= \frac{\mu^k - \frac{1}{\mu^k}}{\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}} - \mu^{k-1} + \frac{1}{\mu^{k-1}} - 2\mu + 2\frac{1}{\mu}} = \mu$$

2. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu^k - \frac{1}{\mu^k}}{\mu^{k+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}} - \mu^{k-1} + \frac{1}{\mu^{k-1}} - 2\mu + 2\frac{1}{\mu}} = \mu$$

$$\frac{\mu^{2k} - 1}{\mu^{2k+2} - \mu^{2k} - 2\mu^{k+2} - 1 + \mu^2 + 2\mu^k} = 1$$

$$\mu^{2k+2} - 2\mu^{2k} - 2\mu^{k+2} + 2\mu^k + \mu^2 = 0$$

$$\mu^{2k}(\mu^2 - 2 - \frac{1}{\mu^k}(2\mu^2 - 2) + \frac{1}{\mu^{2k}}\mu^2) = 0$$

$$\mu^2 - 2 - \frac{1}{\mu^k}(2\mu^2 - 2) + \frac{1}{\mu^{2k}}\mu^2 = 0$$

Граф $\mathbf{G}_{k+1}$ одержується з $\mathbf{G}_k$ підрозбиттям внутрішнього ребра. Тому послідовність $ind\ \mathbf{G}_k$ не зростає. Спрямуємо $k \to \infty$

$$\mu^2 - 2 \to 0$$

$$\mu \to \sqrt{2}$$

3. Отже,

$$\lambda \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

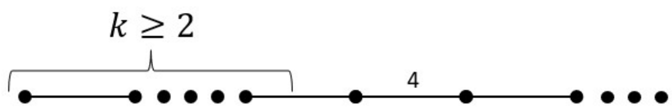
$$ind\ \mathbf{G}_k \downarrow \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad k \to \infty$$

Отже, для будь-якого $k \quad ind\, \mathbf{G}_k > \frac{3}{\sqrt{2}}$

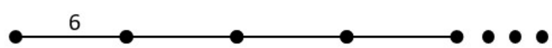
Дана теорема дає повну класифікацію зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів A_∞

Теорема 3.2. Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими графами A_∞, то

1. Якщо $ind\, \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:



2. Якщо $ind\, \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

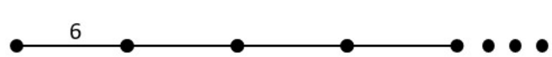


Доведення. Коли на ланцюзі немає позначок, то $ind\, \mathbf{G} = 2$.

Коли маємо на ланцюгу з краю позначку 4, то $ind\, \mathbf{G} = 2$.

Коли маємо на ланцюгу з краю позначку 5, то $ind\, \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$.

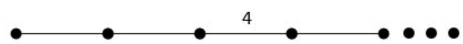
Коли маємо на ланцюгу з краю позначку 6, то $ind\, \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.



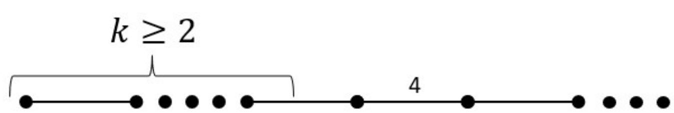
За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки на ланцюгу (7 та більше) $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Коли маємо позначку 4, посунуту на 1 ребро, то $ind\ \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$.

Коли маємо позначку 4, посунуту на 2 ребра, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$.



Коли маємо позначку 4, посунуту на k ребер, то $ind\ \mathbf{G} < \frac{3}{\sqrt{2}}$. За **твердженням 2.1** при видалені вершини, індекс графа не збільшується, тому при збільшені кількості ребер, на які посунута позначка 4, індекс графа не зменшується, тому при $k \geqslant 2 \quad ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$. Отже, $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

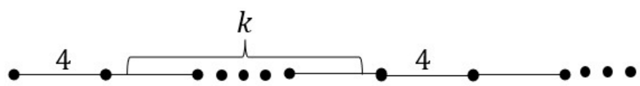


Коли маємо позначку 5, посунуту на 1 ребро, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$. За **твердженням 2.1** при видалені вершини, індекс графа не збільшується, тому при збільшені кількості ребер, на які посунута позначка 5, індекс графа не зменшується. Отже, при зсуву позначки 5 на k ребер, $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$. Отож, індекси ланцюгів з позначкою 5, не належать до необхідного проміжку.

За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки, індекс графа збільшується. Оскільки при зсуві 5 від края, $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$, тому для позначок більших за 5, також буде виконуватись дана нерівність.

Коли маємо дві позначки 4 поруч з краю, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Коли маємо дві позначки 4 на відстанні k, одна з яких знаходиться з краю, то ind $\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$. Отже, на ланцюгу не може бути 2 позначки 4, одна з яких знаходиться з краю. Якщо посунути ці позначки на певну кількість ребер, то він буде містити цей граф, тому з **наслідка 3.1** $ind\, \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки, індекс графа збільшується. Оскільки при наявності двох позначок 4 $ind\, \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$, тому при збільшені будь-якої позначки 4 або появі нових позначок, $ind\, \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

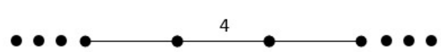
Отже, заданим умовам задовільнають лише графи з однією позначкою 4, посунутою на $k \geqslant 2$, індекси яких лежать у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ та ланцюг з міткою 6 з краю, індекс якого дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

□

Дана теорема дає повну класифікацію зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів $A_{\mathbb{Z}}$

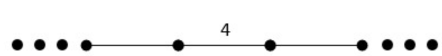
Теорема 3.3. Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими графами $A_{\mathbb{Z}}$, то

1. Якщо $ind\, \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:



Доведення. Коли на нескінченному в обидві боки ланцюзі немає позначок, то $ind\, \mathbf{G} = 2$.

Коли на нескінченному в обидві боки ланцюзі маємо позначку 4, то $ind\, \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.



За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки на нескінченному в обидві боки ланцюгу (5 та більше) $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Якщо нескінченний в обидві боки ланцюг містить дві або більше позначок, то він буде містити нескінчений ланцюг в одну сторону з цими позначками, тому з **наслідка 3.1** $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

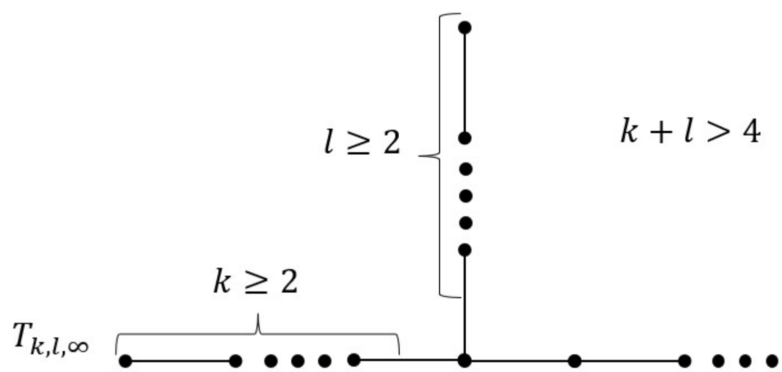
Отже, заданим умовам задовільняє лише нескінченний в обидві боки ланцюг позначкою 4, індекс якого дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

□

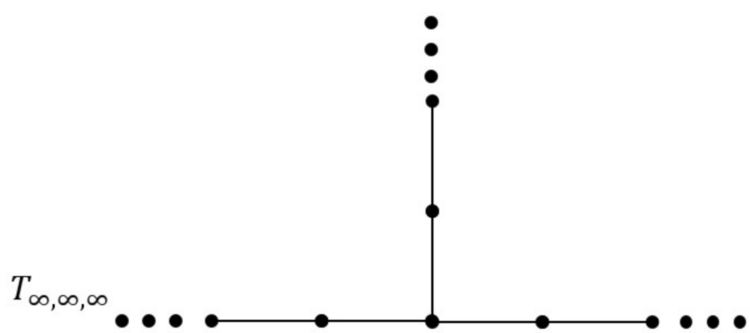
Дана теорема дає повну класифікацію зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих незважених T графів.

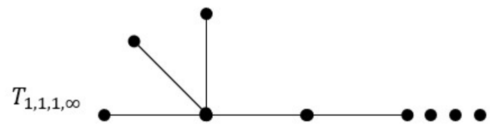
Теорема 3.4. Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими незваженими T графами, то

1. Якщо $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

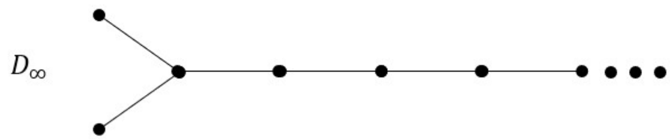


2. Якщо $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

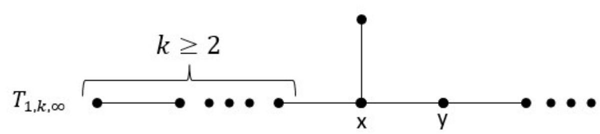




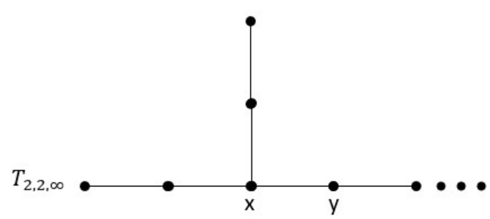
Доведення. Коли маємо граф $T_{1,1,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = 2$.



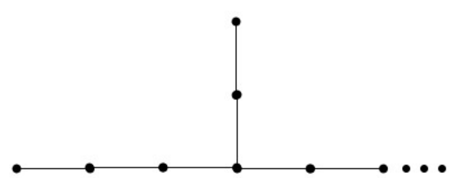
Коли маємо граф $T_{1,k,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} < \sqrt{\sqrt{5}+2}$. Отже, індекс графа з висячою вершиною, інцидентною вершині степеня 3, буде меншим $\sqrt{\sqrt{5}+2}$



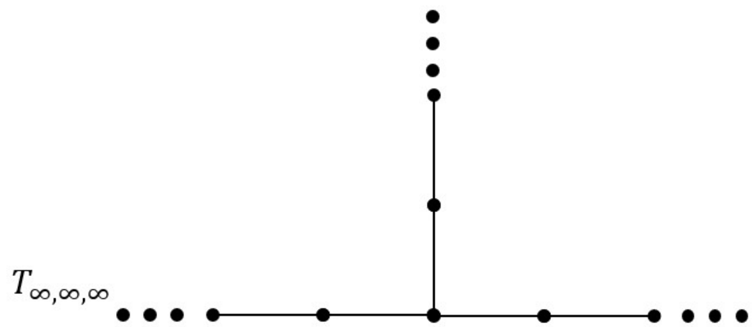
Коли маємо граф $T_{2,2,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$.



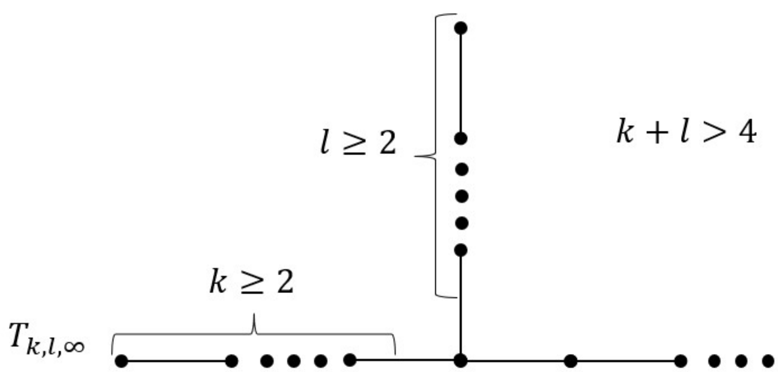
Коли маємо граф $T_{2,3,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$.



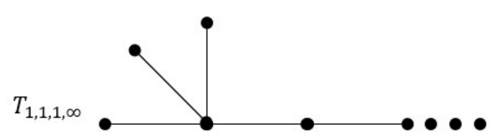
Коли маємо граф $T_{\infty,\infty,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.



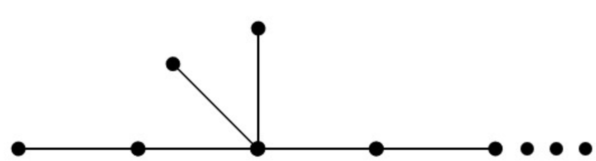
За **твердженням 2.1** при видалені вершини, індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{k,l,\infty}$ при $k \geqslant 2, l \geqslant 2$ та $k+l > 4$ мають індекс, який належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$



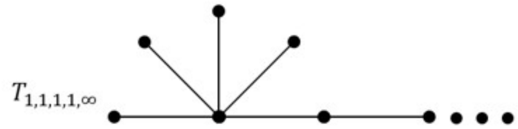
Коли маємо граф $T_{1,1,1,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.



Коли маємо граф $T_{1,1,2,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$. Якщо збільшити довжину будь-якого підланцюга, то граф буде містити $T_{1,1,2,\infty}$, тому з **наслідка 3.1** $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



Якщо збільшити кількість ланцюгів, тобто збільшити степінь вершини, граф буде містити зірчастий граф $K_1, 4$ з нескінченним ланцюгом, індекс якого більший за $\frac{3}{\sqrt{2}}$, тому з **наслідка 3.1** $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



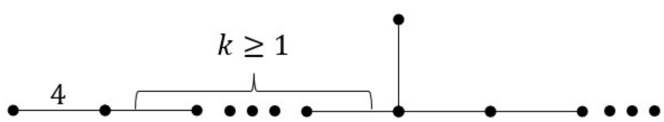
Отже, заданим умовам задовільнають лише графи $T_{k,l,\infty}$ при $k \geqslant 2, l \geqslant 2$ та $k + l \geqslant 4$, індекси яких лежать у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ та $T_{\infty,\infty,\infty}$ і $T_{1,1,1,\infty}$, індекси яких дорівнюють $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

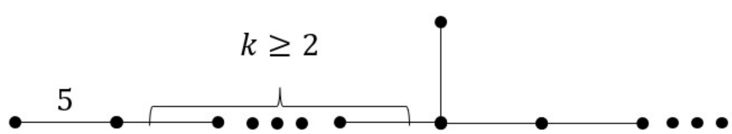
$\square$

Дана теорема дає повну класифікацію злічених графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів $T_{1,k,\infty}$ з позначкою з краю.

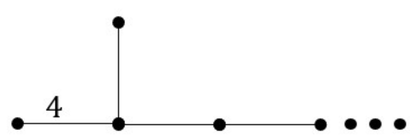
Теорема 3.5. Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими графами $T_{1,k,\infty}$ з позначкою з краю, то

1. Якщо $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:

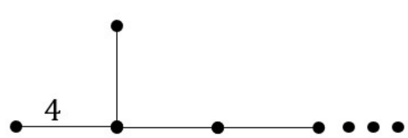




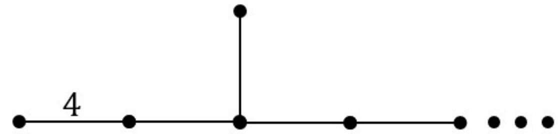
2. Якщо $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:



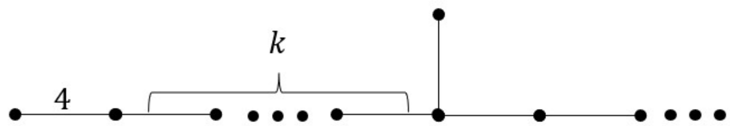
Доведення. Коли маємо граф $T_{1,1,\infty}$ з позначкою 4, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.



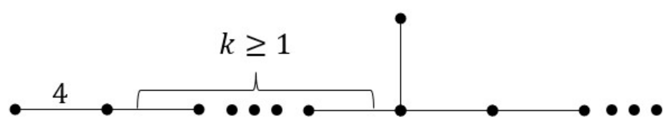
Коли маємо граф $T_{1,2,\infty}$ з позначкою 4, то $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.



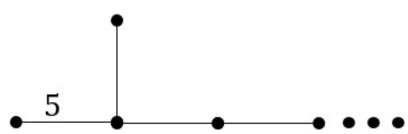
Коли маємо граф $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 4, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$.



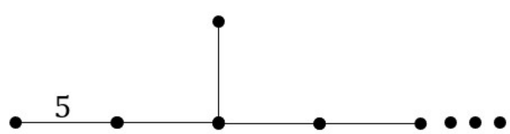
За **твердженням 2.2** при підрозбитті внутрішнього ребра, індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 4 при $k \geqslant 1$ мають індекс, який належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$



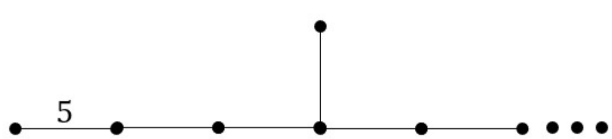
Коли маємо граф $T_{1,1,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



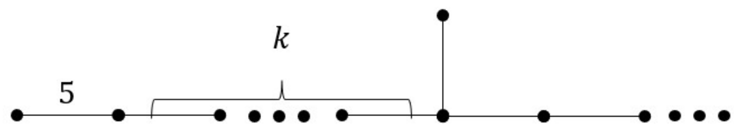
Коли маємо граф $T_{1,2,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



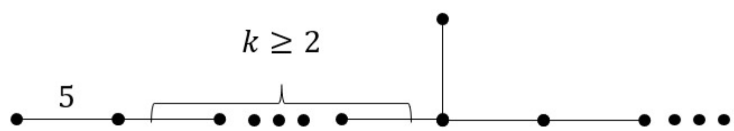
Коли маємо граф $T_{1,3,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.



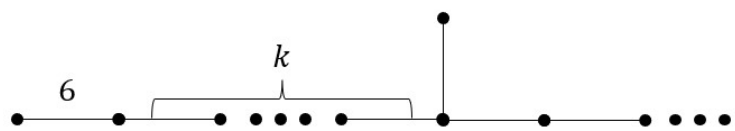
Коли маємо граф $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$.



За **твердженням 2.1** при підрозбитті внутрішнього ребра, індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 5 при $k \geqslant 2$ мають індекс, який належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$



Коли маємо граф $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 6, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



За **твердженням 2.1** при підрозбитті внутрішнього ребра, індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 6 мають індекс, який більше $\frac{3}{\sqrt{2}}$

За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки, індекс графа збільшується. Оскільки при наявності в графі $T_{1,k+1,\infty}$ мітки 6 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$, тому при збільшені позначки (7 і більше) $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Отже, заданим умовам задовільнають лише графи $T_{1,k,\infty}$ з позначкою 4 при $k \geqslant 1$ і $T_{1,k,\infty}$ позначкою 5 при $k \geqslant 2$, індекси яких лежать у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ та $T_{1,1,\infty}$ з позначкою 4, індекс якого дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

□

Твердження 3.4. Нехай $\mathbf{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера. $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, тоді $\mathbf{G}$ не може:

1. Мати позначку 7 або більше на ребрі;

2. Мати позначку 5 або 6 на ребрі, не інцидентному висячій вершині;

3. Мати дві позначки;

4. Мати вершину степеня 5;

5. Ребра, інцидентні вершині степеня 4, не можуть бути інциденті висячим вершинам, окрім одного;

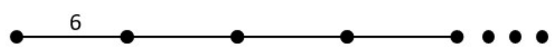
6. Мати позначку відмінну від 4 на ребрі, інцидентному вершині степеня 3;

7. Мати позначку 6, якщо має вершину степеня 3;

8. Мати цикл будь-якої довжини.

Доведення. 1. Нехай граф має позначку 7 або більше на ребрі.

Коли маємо на ланцюгу позначку 6, то $ind\,\mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.



За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки (7 та більше) $ind\,\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$;

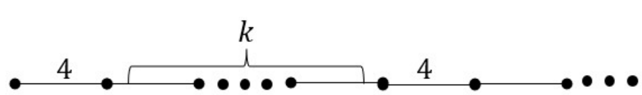
2. Нехай граф має позначку 5 або 6 на ребрі, не інцидентному висячій вершині.

Для позначки 5 рахували.

Для позначки 6 за **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки $ind\,\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

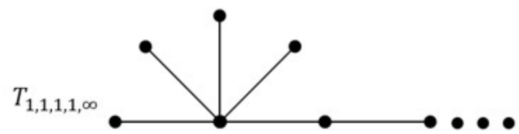
3. Нехай граф має дві позначки 4.



Індекс такого графа більший за $\frac{3}{\sqrt{2}}$. За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

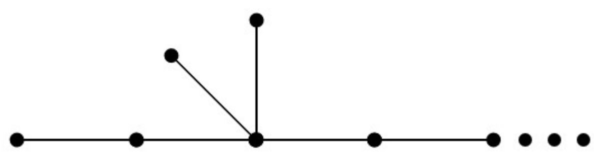
Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

4. Нехай граф має вершину степеня 5.



Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

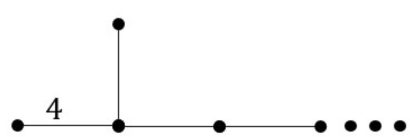
5. Нехай граф у якому ребра, інцидентні вершині степеня 4, є інцидентими висячим вершинам, окрім одного.



Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

6. Нехай граф має позначку відмінну від 4 на ребрі, інцидентному вершині степеня 3.

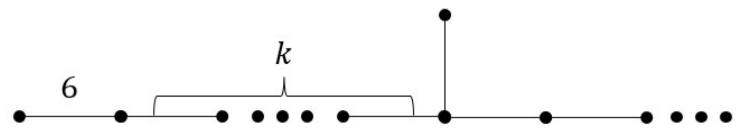
З позначкою 4 індекс графа дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.



За **твердженням 2.1** при зменшені мітки на ребрі, індекс графа зменшується, тому при збільшені мітки $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$

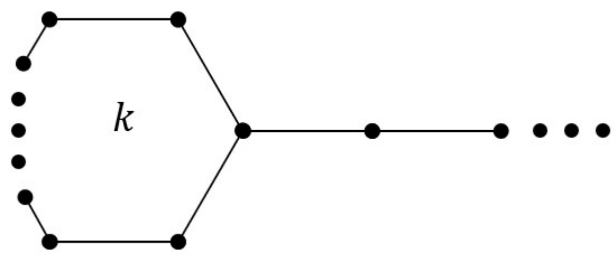
Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

7. Нехай граф має позначку 6 і має вершину степеня 3.



Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

8. Нехай граф має цикл будь-якої довжини



Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

$\square$

Висновки

У першому розділі кваліфікаційної роботи наведено означення графа Кокстера та основні поняття спектральної теорії графів. Також розглянуто визначення зліченного графа Кокстера, основні терміни спектральної теорії та операції над графами в зліченному випадку. Преставлено теорему Фробеніуса для матриць суміжності.

У другому розділі роботи розглянуто основні теореми, які трапляються в спектральній теорії графів Кокстера, для знаходження індекса графа. Наведено теорему для знаходження індекса графа, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга.

У третьому розділі представлено теорему про класифікацію зліченних графів Кокстера, індекс яких належить проміжку $\left[2;\ \sqrt{\sqrt{5}+2}\right]$. Розглянуто приклади знаходження індексів зліченного графа Кокстера та сформульовано й доведено кілька теорем про класифікацію зліченних графів Кокстера, які мають індекс у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$. Також виділено кілька обмежень для зліченний графів Кокстера, індекс яких належить даному проміжку.

Список літератури

1. *Москалева Ю.П., Самойленко Ю.С.*, Введение в спектральную теорию графов, Киев, Центр учебной литературы, 2007.

2. *Goodman F.M., P. de la Harpe, Jones V.F.R.*, Coxeter Graphs and Towers of Algebras, Springer Verlag New York, 1989.

3. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов, теория и применение, Киев, "Наукова думка", 1984

4. *Самойленко Ю.С., Тимошкевич Л.М.*, Про спектральну теорію графів Кокстера, "У світі математики" 15 (2009), №3, с.14-24.

5. *Коротков А.С., Самойленко Ю.С.*, Про індекси зліченних графів, "У світі математики" 18 (2012), №3, с.7-17.

6. *Коротков А.С., Тимошкевич Л.М.*, Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України, 2013, №12, с. 19–24

7. *Тимошкевич Л.М.*, Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера, Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 160 с.

8. *Collatz, L. and Sinogowitz, U.*, Spektren endlicher Grafen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 21(1957), 63-77.

9. *Liu L.*, Two conjectures in spectral graph theory involving the linear combinations of graph eigenvalues, arXiv preprint arXiv:2206.03723. – 2022.

10. *Anarkis, B. T., Riyadi, S.*, The spectrum on prism graph using circulant matrix, Bulletin of Applied Mathematics and Mathematics Education 2.1 (2022): 1-10.

11. *Ramane, H. S., Parvathalu, B., Patil, D., Ashoka, K.*, Iterated line graphs with only negative eigenvalues -2, their complements and energy, arXiv preprint arXiv:2205.02276. – 2022.

12. *Cvetkovic D. M,.* Applications of graph spectra, Cvetkovic D. M., Gutman I., Zbornik radova. – 2009. – 13(21). – 138 pp.

13. *Ключаръов П.Г., Чесноков В. О.*, Исследование спектральных свойств социального графа сети LiveJournal, Машиностроение и компьютерные технологии, 2013

14. *Ключаръов П.Г., Басараб М.А.*, Спектральные методы анализа социальных сетей, Машиностроение и компьютерные технологии, 2017

15. *Salim A., Sumitra S.*, Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. – 2022.

16. *Sen S., Pal S., Sengupta S.*, Social Sensors in Epidemiological Networks via Graph Eigenvectors, arXiv preprint arXiv:2112.14385. – 2021.

17. *Когут М.В.*, Спектральна теорія зліченних графів Кокстера, 2021