

Міністерство освіти та науки України
Національний університет “Києво-Могилянська академія”
Факультет природничих наук
Кафедра фізико-математичних наук

Кваліфікаційна робота
освітній ступень - бакалавр

на тему: **«ЧУТЛИВІСТЬ КОСМІЧНОЇ ОБСЕРВАТОРІЇ LISA ДО
АСТРОФІЗИЧНИХ ДЖЕРЕЛ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ»**

Виконала студентка 4 року навчання
спеціальності
104 Фізика та астрономія
Хандога Ольга Михайлівна

Керівник Сергієнко Ольга Миколаївна
кандидат фізико-математичних наук

Рецензент Добричева Д. В.

Кваліфікаційна робота захищена
оцінкою

Секретар ЕК _____
« ____ » _____ 20 ____ р.

Київ – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ	4
Метричні теорії гравітації.	4
Асимптотична метрика стаціонарної системи.	6
Асимптотична метрика джерела, що залежить від часу.	7
Реакція детектора гравітаційних хвиль на гравітаційні поляризації.	8
МЕТОДИКА СИМУЛЯЦІЇ СПОСТЕРЕЖЕНЬ LISA	11
Сигнал гравітаційних хвиль	11
Розкладання моди та кут поляризації	12
Відповідь LISA в частотній області	14
Інтерферометрія затримки часу	16
Межа низьких частот	18
Байєсовський аналіз	21
Модель зменшеного порядку для сигналів EOBNRv2HM	22
Байєсовська вибірка	24
Оцінка параметрів матриці Фішера	25
ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ДЖЕРЕЛА НА ОСНОВІ СИНТЕТИЧНИХ НАБОРІВ ДАНИХ LISA	26
ВИСНОВКИ	367
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	378

ВСТУП

Актуальність теми. Аналіз спостережень гравітаційних хвиль дуже важливий для сучасної фізики та астрофізики, оскільки це дає можливість підтвердити загальну теорію відносності, протестувати альтернативні теорії гравітації, дослідити вже знайомі людству ділянки Всесвіту на предмет нових об'єктів та структур, краще вивчити сам Всесвіт загалом та об'єкти в ньому.

Мета, задачі та методи дослідження. Метою роботи є дослідження того, наскільки точно спостереження мод поляризації гравітаційних хвиль за допомогою LISA дозволять визначати параметри джерел. Завдання, яке стоїть перед нами, полягає в симуляції даних спостережень за допомогою LISA масивних подвійних чорних дір та подвійних чорних дір зоряної маси, визначення на їх основі параметрів джерел.

Об'єкт дослідження: гравітаційні хвилі, подвійні чорні діри.

Предмет дослідження: детектування мод поляризації гравітаційних хвиль.

Методи дослідження: числове моделювання, метод марківських ланцюжків Монте-Карло.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

В загальній теорії відносності гравітаційні хвилі мають дві моди поляризації: $A_{+}(\tau)$ і $A_{\times}(\tau)$, де $\tau \equiv t - \frac{R}{c}$ позначає час з запізненням, а R - відстань до джерела. У випадку, коли хвилі поширюються в z -напрямку, такі поляризації відповідають незникаючим компонентам хвильового поля $h^{xx} = -h^{yy} = GA_{+} \frac{1}{(c^4 R)}$ і $h^{xy} = -h^{yx} = G \frac{A_{\times}}{(c^4 R)}$. В межах загальної теорії відносності ці два ступені свободи також визначають відгук детектора гравітаційних хвиль, який регулюється рівнянням геодезичного відхилення між двома часоподібними геодезичними.

Метричні теорії гравітації

В рамках розширених теорій гравітації можуть існувати додаткові динамічні ступені свободи в межах гравітаційного сектора. Насправді існування додаткових динамічних ступенів свободи можна розглядати як унікальний підпис перебування поза загальною теорією відносності. Однак не всі ці гравітаційні ступені вільності можуть безпосередньо впливати на відповідь детектора на відповідне асимптотичне випромінювання. Тому в цьому випадку корисно розрізняти поняття динамічних ступенів свободи, визначених як кількість незалежних пертурбативних розв'язків хвильоподібного рівняння руху і гравітаційних поляризацій, які керують реакцією детектора на асимптотичне випромінювання. Зокрема, це стосується так званих метричних теорій гравітації. Точніше, метричні теорії гравітації допускають лише до шести мод гравітаційної поляризації. Це твердження значною мірою спирається на визначення метричних теорій гравітації.

Базуючись на принципі еквівалентності Ейнштейна, теорії метрики охоплюють усі теорії, які відповідають принципам універсального та мінімального зв'язку через існування єдиної фізичної метрики g , тобто єдиного гравітаційного поля, яке безпосередньо пов'язане з сектором матерії, описаним через набір поля Ψ_m . Точніше, припускаючи існування коваріантної та локальної дії метричної теорії, додаткові гравітаційні поля Ψ , ідентифіковані через їх немінимальний зв'язок з фізичною метрикою, безпосередньо не з'являються в дії матерії теорії, де поля матерії є

мінімально поєднані лише з фізичною метрикою. Тому загальна дія метричної теорії приймає схематичну форму

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2k} L_G[g, \psi] + L_m^{min}[g, \psi_m] \right)$$

з лагранжіаном матерії L_m^{min} , де поля матерії ψ_m мінімально пов'язані лише з метрикою g , а гравітаційний лагранжіан L_G коваріантно залежить від метрики, а також, можливо, від набору додаткових немінимальних полів Ψ . Принципи універсального та мінімального зв'язку гарантують, що всі негравітаційні закони фізики локально відновлюються в межах нормальних координат фізичної метрики, таким чином задовольняючи принцип еквівалентності Ейнштейна. Крім того, разом із загальною коваріацією дії, такий розподіл між мінімально зв'язаними полями матерії та додатковими гравітаційними полями забезпечує існування чітко визначеного та локально збереженого тензора енергії-імпульсу полів матерії. Крім того, універсальний і мінімальний зв'язок матерії з єдиною фізичною метрикою — це те, що дозволяє однозначно говорити про метрику як про властивість простору-часу, а не про додаткове поле над простором-часом.

Зокрема, той факт, що в рамках метричних теорій лише фізичний метричний тензор безпосередньо взаємодіє з полями матерії, також дозволяє просто визначити відповідь гравітаційно-хвильового детектора, повністю базуючись на рівнянні геодезичного відхилення. Слід зауважити, що це рівняння не залежить від рівнянь руху теорії. Тому, як і в загальній теорії відносності, геодезичне рівняння девіації між двома часоподібними геодезичними будь-якої метричної теорії гравітації визначається через електричну частину тензора Рімана, пов'язаного з фізичною метрикою, яка має лише до шести незалежних компонентів. Ці шість потенційних режимів гравітаційної поляризації безпосередньо пов'язані з шістьма ступенями вільності в межах фізичної метрики. Простий доказ цих тверджень можна надати, обмежившись метрикою простору-часу в далекій хвильовій зоні та припустивши, що а) рівняння поля зводяться до хвильових рівнянь у цій зоні; б) гравітаційні хвилі поширюються зі швидкістю

світла. До такого ж висновку можна дійти, якщо відмовитися від останньої гіпотези, як це має місце в багатьох альтернативних теоріях гравітації.

Асимптотична метрика стаціонарної системи

Спочатку варто проаналізувати метрику нерухомої системи в системі відліку центру мас. Провідні члени метрики 1^{pn} для $R \rightarrow \infty \in [2]$

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{c^2 R} + \frac{GM}{c^4 R} [(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\omega^2 - \alpha_2(\omega N)^2],$$

$$g_{0j} = \frac{GM}{2c^3 R} \omega^k [(2\alpha_2 - \alpha_1)\delta_{jk} - 2\alpha_2 N_j N_k],$$

$$g_{jk} = \left(1 + \frac{2\gamma GM}{c^2 R}\right) \delta_{jk},$$

де M це гравітаційна маса стаціонарного джерела, $R \equiv |x|$, $N = x/R$, а $\square$ швидкість вибраної позиції по відношенню до бажаної універсальної позиції. Параметри α_n пов'язані з порушеннями локальної лоренц-інваріантності в гравітаційній фізиці, тоді як параметр Еддінгтона γ є мірою просторової кривизни, створеної тілом, відносно того, що передбачає загальна теорія відносності.

Рівняння вище дозволяють побудувати гравітаційні потенціали як

$$h^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}.$$

Які набувають вигляду [2]

$$h^{00} = (3\gamma + 1) \frac{GM}{c^2 R} + O(c^{-4}),$$

$$h^{0j} = \frac{GM}{2c^3 R} \omega^k [(2\alpha_2 - \alpha_1)\delta_{jk} - 2\alpha_2 N_j N_k] + O(c^{-5}),$$

$$h^{jk} = (1 - \gamma) \frac{GM}{c^2 R} \delta^{jk} + O(c^{-4}).$$

Легко перевірити, що стаціонарні вирази ЗТВ коректно відновлюються в межах $\gamma = 1$, $\alpha_n = 0$.

Асимптотична метрика джерела, що залежить від часу

Тепер можна зробити один крок далі і припустити, що джерело залежить від часу та випромінює гравітаційні хвилі. Рівняння у дальній зоні хвилі тоді має вигляд

$$\Delta h^{\alpha\beta} = \frac{G}{c^4 R} A^{\alpha\beta}(\tau, N).$$

Фізичний зміст амплітуд $A^{\alpha\beta}$ можна зрозуміти, розклавши $\Delta h^{\alpha\beta}$ на незвідні компоненти, подібно до того, що відбувається в ЗТВ. Однак, на відміну від стандартної системи, у загальній метричній теорії гравітації не можна скористатися перевагами калібрувальних умов, щоб зменшити кількість поляризацій гравітаційних хвиль лише до двох незалежних мод. В такому випадку матимемо [2]

$$\Delta h^{00} = \frac{G}{c^4 R} C(\tau, N),$$

$$\Delta h^{0j} = \frac{G}{c^4 R} D^j(\tau, N),$$

$$\Delta h^{jk} = \frac{G}{c^4 R} A^{jk}(\tau, N),$$

3

$$D^j = DN^j + D_T^j,$$

$$A^{jk} = \frac{\delta^{jk}}{3} A + \left(N^j N^k - \frac{\delta^{jk}}{3} \right) B + 2N^j A_T^k + A_{TT}^{jk}$$

Тут A, B, C, D є скалярами, що загалом залежать від змінної часу τ і N , тоді як A_T^j і D_T^j є поперечними векторними полями, що підкоряються $N_j A_T^j = N_j D_T^j = 0$. Поперечно-вільне тензорне поле A задовольняє $N_j A_{TT}^{jk} = \delta_{jk} A_{TT}^{jk} = 0$. Таким чином, на цьому етапі розкладу задіяно десять незалежних функцій.

Далі слід зауважити, що деяке спрощення все ще можна отримати, вдаючись до калібрувальної свободи. Тим часом не слід забувати, що в дальній хвильовій зоні гравітаційні потенціали мають зберігати задану форму, що можливо лише в разі задоволення умови координатних перетворень в вигляді $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \zeta^\alpha(x^\beta)$, де калібрувальне векторне поле має вигляд

$$\zeta^0 = \frac{G}{c^3 R} \alpha(\tau, N) + O(R^{-2}),$$

$$\zeta^j = \frac{G}{c^3 R} \beta^j(\tau, N) + O(R^{-2}).$$

Тут α і β^j довільні функції від τ , N , а множник G/c^3 був введений для зручності.

Якщо тепер розкласти β^j на поздовжню і поперечну частини, $\beta^j = N^j \beta + \beta_T^j$, і здійснити калібрувальне перетворення, отримаємо [2]

$$\Delta h'^{00} = \frac{G}{c^4 R} C'(\tau, N),$$

$$\Delta h'^{0j} = \frac{G}{c^4 R} D'^j(\tau, N),$$

$$\Delta h'^{jk} = \frac{G}{c^4 R} A'^{jk}(\tau, N),$$

де

$$A' = A + \partial_\tau(3\alpha - \beta),$$

$$B' = B + 2\partial_\tau\beta,$$

$$C' = C + \partial_\tau(\alpha + \beta),$$

$$D' = D + \partial_\tau(\alpha + \beta),$$

$$D'^j_T = D^j_T + \partial_\tau\beta^j_T$$

$$A'^j_T = A^j_T + \partial_\tau\beta^j_T$$

$$A'^{jk}_{TT} = A^{jk}_{TT}$$

Яким би не був довільний вибір із чотирьох функцій α, β і β_T^j , залишається шість незалежних ступенів свободи в специфікації $A'^{\alpha\beta}$, що відповідає шести модам поляризації.

Реакція детектора гравітаційних хвиль на гравітаційні поляризації

Щоб краще зрозуміти значення цих додаткових ступенів свободи, розглянемо взаємодію гравітаційних хвиль з детектором. Припустимо, що детектор складається з двох пробних мас, які вільно і досить повільно рухаються в далекій зоні хвилі. Позначаючи вектор відстані між масами через ξ^α і вважаючи відносну відстань малою

порівняно з характерною довжиною хвилі випромінювання, еволюція ξ^α підкоряється наближеному вигляду рівняння геодезичного відхилення

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = -c^2 R_{0j0k} \xi^k,$$

де компоненти лінеаризованого тензора Рімана:

$$R_{0j0k} = -\frac{1}{2} \left(\partial_{00} h^{jk} - \frac{1}{2} \partial_{00} h \delta_{jk} + \partial_{jk} h^{00} + \frac{1}{2} \partial_{jk} h + \partial_{0j} h^{0k} + \partial_{0k} h^{0j} \right),$$

з $h \equiv \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = -h^{00} + h^{kk}$. На відміну від ЗТВ, де R_{0j0k} повністю задано через поперечно-безслідну частину h_{TT}^{jk} , у розширеній гравітації маємо

$$c^2 R_{0j0k} = -\frac{G}{2c^4 R} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S^{jk}(\tau, N),$$

де визначено

$$S^{jk} \equiv (\delta^{jk} - N^j N^k) A_S + N^j N^k A_L + 2N^j A_V^k + A_{TT}^{jk},$$

з

$$A_S \equiv -\frac{1}{6} (A + 2B - 3C),$$

$$A_L \equiv \frac{1}{3} (A + 2B + 3C - 6D),$$

$$A_V^k \equiv A_T^k - D_T^k.$$

Слід зауважити, що в ЗТВ три співвідношення $C = D$, $A + 2B = 3D$ і $D_T^k = A_T^k$, які впливають із умови калібрування, забезпечують $A_S = A_L = A_V^j = 0$.

Після інтегрування рівняння

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = -c^2 R_{0j0k} \xi^k,$$

отримуємо основний порядок

$$\xi^j(t) = \xi^j(0) + \frac{G}{2c^4 R} S^{jk}(\tau, N) \xi^k(0),$$

це означає, що, окрім поперечно-безслідних мод A_{TT}^{jk} загальної теорії відносності, відгук детектора залежить від скалярної моди A_S , поперечної до напрямку поширення (але не

безслідної), поздовжньої моди A_L і двох векторних мод A_V^j , які є частково поздовжніми і частково поперечними.

Полярні кути (θ, φ) для опису поширення гравітаційних хвиль в термінах ортогонального векторного базису $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$ вводяться як

$$\begin{aligned} N &\equiv [\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta], \\ \theta &\equiv [\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta], \\ \varphi &\equiv [-\sin\varphi, \cos\varphi, 0]. \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{N}$ має поздовжній напрямок, а $\boldsymbol{\theta}(\varphi)$ вказує напрямок збільшення широти (довготи) на поверхні сфери.

Задані вище рівняння дозволяють визначити поляризації гравітаційних хвиль як

$$\begin{aligned} A_{V1} &\equiv \theta_k A_V^k, \\ A_{V2} &\equiv \varphi_k A_V^k \\ A_+ &\equiv \frac{1}{2}(\theta_j \theta_k - \varphi_j \varphi_k) A_{TT}^{jk}, \\ A_\times &\equiv \frac{1}{2}(\theta_j \varphi_k + \varphi_j \theta_k) A_{TT}^{jk}. \end{aligned}$$

Після підстановки в рівняння

$$S^{jk} \equiv (\delta^{jk} - N^j N^k) A_S + N^j N^k A_L + 2N^j A_V^k + A_{TT}^{jk},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} S^{jk} &= A_S(\theta^j \theta^k + \varphi^j \varphi^k) + A_L N^j N^k + 2A_{V1} N^j \theta^k + 2A_{V2} N^j \varphi^k + A_+ \\ &\quad + A_\times(\theta^j \varphi^k + \varphi^j \theta^k). \end{aligned}$$

Якщо розглядається, наприклад, поширення вздовж осі z , S^{jk} можна записати в матричну форму

$$S^{jk} = \begin{pmatrix} A_S + A_+ & A_\times & A_{V1} \\ A_\times & A_S - A_+ & A_{V2} \\ A_{V1} & A_{V2} & A_L \end{pmatrix}.$$

МЕТОДИКА СИМУЛЯЦІЇ СПОСТЕРЕЖЕНЬ LISA

Для опису відгуку інструменту LISA будуть використані одиниці з $G = c = 1$ і враховано запропоновану довжину плеча для LISA, $L = 2,5$ Гм [5].

Сигнал гравітаційних хвиль

Щоб описати сигнал гравітаційної хвилі, спочатку потрібно визначити систему відліку джерела, пов'язану із подвійною системою. Вектор поширення гравітаційної хвилі k , спрямований від джерела до спостерігача, має полярні кути $(\iota; \phi)$ у цій вихідній системі відліку. Вектори поляризації p, q вводяться так, що $(p; q; k)$ — пряма тріада.

Форма гравітаційної хвилі в поперечно-безслідному датчику описується двома поляризаціями $h_+, h_\times$. Якщо $H_{ij} = h_{ij}^{TT}$ представляє сигнал гравітаційної хвилі в матричній формі [1]

$$\square = h_+ \square_+ + h_\times \square_\times,$$

з тензорами поляризації

$$\square_+ = \square \otimes \square - \square \otimes \square,$$

$$\square_\times = \square \otimes \square + \square \otimes \square.$$

Навпаки, поляризація є

$$h_+ = \frac{1}{2}(\square \otimes \square - \square \otimes \square): \square,$$

$$h_\times = \frac{1}{2}(\square \otimes \square + \square \otimes \square): \square.$$

Можна розкласти сигнал гравітаційної хвилі, який розглядається як функція напрямку випромінювання (ϑ ; φ) у системі джерела, на сферичні гармоніки, зважені за спіном, як

$$h_+ - i h_\times = \sum_{\ell \geq 2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} h_{\ell m}.$$

Далі буде використано виключно цю параметризацію форми сигналу як набір $h_{\ell m}$. Домінуючою гармонікою є h_{22} , а інші називаються вищими модами (НМ) або вищими гармоніками.

Сигнали будуть згенеровані та відповідь застосована безпосередньо в області Фур'є. Конвенція для перетворення Фур'є функції F така:

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt.$$

Розклад мод та кут поляризації

Переведемо розклад мод в область Фур'є. Маємо [7]

$$h_+ = \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} h_{\ell m} + (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} h_{\ell m}^*,$$

$$h_\times = \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} h_{\ell m} - (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} h_{\ell m}^*,$$

використовуючи симетрію, можна записати

$$h_{+, \times} = \sum_{\ell, m} \alpha_{\ell m}^{+, \times} h_{\ell m},$$

3

$$\alpha_{\ell m}^+ = \frac{1}{2} (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} + (-1)^m (-2)^{\ell+m} \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}},$$

$$\alpha_{\ell m}^\times = \frac{1}{2} (-2)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} - (-1)^m (-2)^{\ell+m} \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}.$$

Переходячи до області Фур'є, наближення, яке часто використовують, полягає в тому, щоб нехтувати підсиленням від'ємних/додатних частот відповідно до

$$\hat{h}_{lm}(f) \approx 0 \text{ для } m < 0, f > 0 (m > 0, f < 0)$$

і нехтувати модами h_{l0} . Це наближення буде використовуватись і надалі. Використаємо $f > 0$ і маємо

$$\hat{h}_{+, \times} = \sum_{\square} \sum_{\square > 0} \square_{\square \square}^{+, \times} \hat{h}_{\square \square}.$$

Далі зручно ввести

$$\square_{\square \square} = \square_{+} \square_{\square \square}^{+} + \square_{\times} \square_{\square \square}^{\times},$$

звідки

$$H = \sum_{l, m > 0} P_{lm} h_{lm}.$$

Кут поляризації ψ можна розглядати як ступінь свободи у відношенні між системою відліку джерела та системою відліку детектора, параметризуючи обертання навколо хвильового вектора $\mathbf{k}$. Для визначення цього кута вводяться опорні вектори $(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ ортогональні до $\mathbf{k}$, які визначають нуль кута поляризації як $(\mathbf{p}; \mathbf{q})(\psi = 0) = (\mathbf{u}; \mathbf{v})$.

Щоб зробити явною поляризаційну залежність, можна визначити поляризаційні тензори для нульового кута поляризації як

$$\square_{+}^0 = \square_{+}(\square = 0) = \square \otimes \square - \square \otimes \square,$$

$$\square_{\times}^0 = \square_{\times}(\square = 0) = \square \otimes \square + \square \otimes \square.$$

Тоді можна записати

$$\square_{+} + \square \square_{\times} = \square^{-2\square\square} (\square_{+}^0 + \square \square_{\times}^0),$$

або

$$\begin{aligned} & \square_{\square\square}(\square, \square, \square) \\ &= \frac{I}{2} \square_{-2\square\square}(\square, \square) \square^{+2\square\square}(\square_+^0 - \square\square_\times^0) + \frac{I}{2} (-I) \square_{-2\square\square}(\square, \square) \square^{+2\square\square}(\square_+^0 \\ & - \square\square_\times^0). \end{aligned}$$

Запис матриць P_{lm} таким чином дозволяє явно виділити всі залежності в зовнішніх параметрах (ι ; ϕ ; ψ). Разом із відстанню за світністю D , яка масштабує загальну амплітуду сигналу, ці параметри входять як постійні (незалежні від часу та частоти) множники у відповідь для кожного h_{lm} .

Відповідь LISA в частотній області

Відгук LISA можна побудувати з одноланкових спостережуваних величин $y_{slr} = \frac{(v_r - v_s)}{v}$, що представляють зсув частоти лазера між космічним кораблем, що передає s , і космічним кораблем, що приймає, в каналі l . Слід використати вираз [7]

$$\square_{\square\square\square} = \frac{I \square_{\square} \otimes \square_{\square}}{2I - \square \cdot \square_{\square}} : [\square(\square - \square - \square \cdot \square_{\square}) - \square(\square - \square \cdot \square_{\square})],$$

де $\mathbf{H}$ — поперечно-безслідна матриця, що представляє гравітаційну хвилю, $\mathbf{k}$ — вектор поширення хвилі, L — затримка вздовж одного плеча, n_l — одиничні вектори зв'язку (від s до r), а p_s, p_r — положення космічних апаратів. Тут n_l, p_s і p_r оцінюються одночасно. Далі взаємозамінно використовуємо позначення y_{sr} замість y_{slr} , оскільки n_l можна вивести з індексів відправлення та отримання s, r .

Формалізм відповіді застосовується до хвильових форм, які можна представити як комбінацію гармонік із повільно змінною амплітудою та фазою, як

$$\hat{h}_{\square\square}(\square) = \square_{\square\square}(\square) \square^{-\square\square\square}(\square).$$

Проводиться аналіз і записується відгук в окремих спостережуваних величинах y_{slr} , з перехідною функцією для кожної сферичної гармонічної моди як

$$\tilde{y}_{\square\square\square} = \sum_{\square, \square} \square_{\square\square\square}(\square) \hat{h}_{\square\square}.$$

Основними часовими масштабами для порівняння є часовий масштаб радіаційної реакції подвійної системи та орбітальний часовий масштаб LISA 1 рік. У провідному порядку у розділенні цих часових масштабів, для сигналу, який подається досить швидко, отримується

$$\chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}(\omega) = \chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}(\omega, \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}),$$

де

$$\begin{aligned} \chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}(\omega, \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}) &= \frac{\omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}}{2} \chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}[\chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}(1 - \omega \cdot \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}})] \cdot \chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}[\chi_{\text{eff}}^{\text{eff}}(\omega + \omega \cdot (\omega_{\text{eff}}^{\text{eff}} \\ &+ \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}))] \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}} \cdot \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}} \cdot \omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}, \end{aligned}$$

В рівнянні вище

$$\chi_{\text{eff}}^{\text{eff}} = -\frac{1}{2\omega} \frac{\omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}}{\omega_{\text{eff}}^{\text{eff}}},$$

це ефективна частотно-часова відповідність, визначена в усьому частотному діапазоні, включаючи орбітальне зближення та злиття. Це визначення узагальнює наближення стаціонарної фази.

Аналіз показав, що поправки вищого порядку у розділенні часових масштабів у відповіді LISA загалом малі для систем подвійних чорних дір, що зливаються, а також малі для систем надмасивних чорних дір за умови, що вони не надто далеко від злиття. Той факт, що використано однакову обробку перехідних функцій для коефіцієнтів Фур'є як для сигналу, так і для шаблонів, також повинен зменшити помилки моделювання.

Розкладемо позиції модулів як

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{\text{eff}},$$

де $\mathbf{r}_0$ - положення центру сузір'я LISA. Це дозволяє відзначити важливу особливість: окрім глобального множника фазової затримки $\exp(i\pi f k \cdot \mathbf{r}_0)$, частотно-залежні члени містять лише проекції

$$\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{p}_{0,\parallel},$$

де $k_{\parallel}$ — проекція хвильового вектора $\mathbf{k}$ у (миттєвій) площині LISA, і, таким чином, частотно-залежні множники є інваріантними, коли відбивається $\mathbf{k}$ через цю площину. Затримка $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_0$ є єдиною базовою лінією поза площиною LISA. Це залишатиметься вірним під час побудови змінних інтерферометрії з часовою затримкою.

У рівняннях вище можна виділити два типи затримок: з одного боку, затримка, пов'язана з положенням $\mathbf{p}_0$ центру сузір'я на його орбіті навколо Сонця, з базовою лінією $R = 1$ а.о., а з іншого боку затримки, пов'язані з положеннями окремих космічних апаратів у сузір'ї, з базовою лінією довжини плеча L . Це визначає частоти передачі

$$\omega_{\parallel} = 1/\tau = 2.0 \times 10^{-3} \text{ Гц},$$

$$\omega_{\perp} = 1/\tau = 0.12 \text{ Гц}.$$

Частота передачі f_L відповідає довжині хвилі на довжині плеча, відхилення від довгохвильового наближення починають бути важливими на значно нижчих частотах.

Інтерферометрія затримки часу

На основні спостережувані величини в одному плечі впливає лазерний шум, амплітуда якого на порядки перевищує астрофізичний сигнал. Однак інтерферометрія з затримкою часу дозволяє побудувати новий набір спостережуваних величин із затриманих комбінацій y_{slr} , де лазерний шум пригнічений на порядки. Було запропоновано різні покоління схем інтерферометрії з затримкою часу для роботи з нежорстким і обертовим сузір'ям LISA. Однак ці уточнення лише незначно впливають на реакцію на гравітаційні хвилі. Отже, ми розглядаємо лише інтерферометрію з затримкою часу першого покоління та прийняте жорстке наближення для сузір'я, де всі затримки постійні та дорівнюють L . Використовуючи позначення $y_{slr,nL} = y_{slr}(t - nL)$, інтерферометрія першого покоління зі змінними Майкельсона X записується як [1,3]

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{31} + \mathbf{X}_{13,\parallel} + (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{X}_{12,\parallel})_{,2\parallel} - (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{X}_{12,\parallel}) - (\mathbf{X}_{31} + \mathbf{X}_{13,\parallel})_{,2\parallel}.$$

Ці канали є незалежними за умови ідентичного та нескорельованого шуму в плечах детектора. З постійними затримками в жорсткому наближенні та використанням позначення $z \equiv \exp(2i\pi fL)$, комбінації інтерферометрії в частотній області набувають вигляду

$$\tilde{a} = (1 + \alpha)(\tilde{y}_{31} + \tilde{y}_{13}) - \tilde{y}_{23} - \alpha\tilde{y}_{32} - \tilde{y}_{21} - \alpha\tilde{y}_{12},$$

$$\tilde{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}[(1 - \alpha)(\tilde{y}_{13} - \tilde{y}_{31}) + (2 + \alpha)(\tilde{y}_{12} - \tilde{y}_{32}) + (1 + 2\alpha)(\tilde{y}_{21} - \tilde{y}_{23})],$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}[\tilde{y}_{21} - \tilde{y}_{12} + \tilde{y}_{32} - \tilde{y}_{23} + \tilde{y}_{13} - \tilde{y}_{31}],$$

де усунуті частотно-залежні множники, які є спільними для сигналу та шуму, введенням перемасштабування [3]

$$\tilde{a}, \tilde{e} = \frac{\alpha^{-2} \alpha \alpha \alpha \alpha}{\alpha \sqrt{2} \alpha \alpha \alpha (2 \alpha \alpha \alpha \alpha)} \times \tilde{A}, \tilde{E},$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha^{-3} \alpha \alpha \alpha \alpha}{2 \sqrt{2} \alpha \alpha \alpha (\alpha \alpha \alpha) \alpha \alpha \alpha (2 \alpha \alpha \alpha \alpha)} \times \tilde{T}.$$

Буде використано функції передачі моди за модою для цих скорочених каналів як

$$\tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{\alpha} = \sum_{\alpha \alpha} \alpha_{\alpha, \alpha, \alpha}^{\alpha \alpha} \hat{h}_{\alpha \alpha}.$$

Щоб зробити зв'язок між цими скороченими спостережуваними інтерферометріями та гравітаційною деформацією більш звичним у контексті наземних приладів, також введено позначення

$$\hat{h}_{\alpha, \alpha, \alpha} \equiv \frac{1}{(-6 \alpha \alpha \alpha \alpha)} \times \tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{\alpha},$$

$$\alpha_{h_{\alpha, h_{\alpha}, h_{\alpha}}}^{\alpha \alpha} = \frac{1}{(-6 \alpha \alpha \alpha \alpha)} \alpha_{\alpha, \alpha, \alpha}^{\alpha \alpha}.$$

Масштабуванням тих самих квадратичних коефіцієнтів, як

$$\sigma_{\square\square}^2, \sigma_{\square\square}^2 = 2\square\square\square^2(2\square\square\square) \times \sigma_{\square\square}^2, \sigma_{\square\square}^2,$$

$$\sigma_{\square\square}^2 = 8\square\square\square^2(\square\square\square)\square\square\square^2(2\square\square\square)\sigma_{\square\square}^2,$$

спектральна густина потужності шуму по трьох каналах приймає форму [7]

$$\sigma_{\square\square}^2 = \sigma_{\square\square}^2 = 2(3 + 2\square\square\square(2\square\square\square) + \square\square\square(4\square\square\square))\sigma^{\square\square}(\square) + (2 + \square\square\square(2\square\square\square))\sigma^{\square\square}(\square),$$

$$\sigma_{\square\square}^2 = 4\square\square\square^2(2\square\square\square)\sigma^{\square\square}(\square) + \sigma^{\square\square}(\square),$$

де S^{pm} це спектральна густина потужності шуму тестових мас, а S^{op} це спектральна густина оптичного шуму. Також включено шум плутанини, що походить від фону галактичних подвійних систем у діапазоні LISA, який додається до інструментального шуму. Можна визначити деформаційну спектральну густину шуму, пов'язану із спостережуваними інтерферометріями з затримкою часу, подібними до деформацій

$$\sigma_{h^{\square,\square,\square}}^{\square,\square,\square}(\square) = \frac{\sigma_{\square,\square,\square}^{\square,\square,\square}(\square)}{(6\square\square\square)^2}.$$

Множники є коливальними і мають переходи через нуль на високих частотах, причому перший відбувається на $f_L/2 = 0,06$ Гц, тому їх зручно вилучати, щоб уникнути невизначеності 0/0. Цей метод не може бути застосованим безпосередньо до більш реалістичної моделі для LISA з різною довжиною плеча та залишковим лазерним шумом. У такому випадку недосконале занулення поблизу нульових точок, ймовірно, призведе до локальної втрати чутливості.

Межа низьких частот

Хоча оцінка параметрів в основному використовує повну відповідь LISA, буде корисно розглянути деякі спрощені асимптотичні межі, щоб зрозуміти виродження параметрів.

Як відомо, у низькочастотній межі (також називається довгохвильовим наближенням) ефекти кінцевої довжини плеча зникають, і відгук LISA аналогічний відгуку двох детекторів типу LIGO, повернутих один відносно одного на $\pi/4$ і приведених в рух.

Для $f \ll f_L$ маємо $2\pi fL \ll 1$ і одне з попередніх рівнянь зводиться до [7]

$$\square_{\square\square\square\square} \simeq \frac{\square\square\square\square}{2} \square\square\square [2\square\square\square\square \cdot \square_0] \square_{\square} \otimes \square_{\square} : \square_{\square\square}.$$

Експоненціальний множник є фазою затримки, для якої введемо позначення

$$\Phi_{\square} \equiv 2\square\square\square \cdot \square_0, \quad \square\Phi_{\square} = \Phi_{\square} - \Phi_{\square} (\square = \square_{\square}^{\square\square\square\square}).$$

Величина Φ_R в літературі часто називається фазою Доплера; вона може здатися великою для $f \gg f_R$, але потрібно пам'ятати, що вона частково відповідає просто фіксованій затримці між часом прибуття в барицентр Сонячної системи та часом прибуття в сузір'я LISA. У межах короткочасних сигналів злиття лише доплерівська зміна фази $\Delta\Phi_R$ несе корисну інформацію про положення в небі.

Для $2\pi fL \ll 1$ буде $z \simeq 1$, $y_{\sim str} \simeq y_{\sim r-ls}$, так що

$$\tilde{a} \simeq 4\tilde{y}_{3l} - 2\tilde{y}_{23} - 2\tilde{y}_{12},$$

$$\tilde{e} \simeq 2\sqrt{3}[\tilde{y}_{12} - \tilde{y}_{23}],$$

$$\square^{\sim} \simeq 0,$$

при цьому Т-канал стає незначним у цій межі. Тепер можна записати

$$\tilde{a}, \tilde{e} = (-2\square\square\square)\square\square\square [2\square\square\square\square \cdot \square_0] \sum_{\square, \square > 0} \hat{h}_{\square\square\square\square, \square} : \square_{\square\square},$$

де представлено тензори детектора як

$$\square_{\square} = \frac{\square}{2} (\square_1 \otimes \square_1 - 2\square_2 \otimes \square_2),$$

$$\square_{\square} = \frac{\square\sqrt{3}}{2} (\square_1 \otimes \square_1 - \square_3 \otimes \square_3).$$

Тут зроблено очевидними коефіцієнти $(-2i\pi f)$, які відповідають похідній за часом в області Фур'є. Таким чином, спостережувані

$\square_{\sim}$ та $\square_{\sim}$ є аналогічними похідним за часом деформації, які зазвичай використовуються для наземних детекторів.

Тепер можна зіставити ці два канали з двома фіктивними детекторами типу LIGO. Для ортогонального детектора такої ж установки, як наземні LIGO та Virgo з довжиною плеча L_D , повернутою на кут ϵ_D від базисних векторів x, y , тензор детектора дорівнює

$$\square = \frac{\square_{\square}}{2} [\square_{\square\square} 2\square_{\square} (\square \otimes \square - \square \otimes \square) + \square_{\square\square} 2\square_{\square} (\square \otimes \square + \square \otimes \square)].$$

Тепер використовуються детектори LISA як каркас і отримується

$$\square_{\square} = \square_{\square} = 3\square, \quad \square_{\square} = \frac{2\square}{3}, \quad \square_{\square} = \frac{5\square}{12}.$$

Виродження $\pm\pi$ в $\epsilon_{a,e}$, що відображає свободу у виборі орієнтації цих ефективних детекторів. Ефективна довжина плеча $3L$ є умовною, оскільки вона залежить від довільного загального масштабування.

Далі слід вилучити ефективну довжину, визначаючи

$$\square_{\square,\square}^{+, \times} \equiv \frac{1}{3\square} \square_{\square,\square} : \square_{+, \times}^{\theta},$$

що дає координатні кути в системі відліку LISA λ_L, β_L

$$\square_{\square}^{+} = \frac{1}{2} (1 + \square_{\square\square}^2 \square_{\square}) \square_{\square\square} (2\square_{\square} - \frac{\square}{3}),$$

$$\square_{\square}^{\times} = \square_{\square\square\square\square} \square_{\square\square\square} (2\square_{\square} - \frac{\square}{3}),$$

$$\square_{\square}^{+} = \frac{1}{2} (1 + \square_{\square\square}^2 \square_{\square}) \square_{\square\square} (2\square_{\square} + \frac{\square}{6}),$$

$$\square_{\square}^{\times} = \square_{\square\square\square\square} \square_{\square\square\square} (2\square_{\square} + \frac{\square}{6}).$$

Ці функції є звичними шаблонними функціями наземних детекторів (для $\psi_L = 0$).

Можна перевірити, що вирази для каналу e отримані з виразів для a із заміною $\lambda_L \rightarrow \lambda_L + \pi/4$.

Якщо ввести [7]

$$\square_{\square,\square}^{\square\square} = \frac{I}{2} \left[-2\square_{\square\square}\square^{-2\square\square\square}(\square_{\square,\square}^{+} + \square\square_{\square,\square}^{\times}) + \frac{I}{2}(-I)\square \left[-2\square_{\square,-\square}^{*}\square^{+2\square\square\square}(\square_{\square,\square}^{+} - \square\square_{\square,\square}^{\times}) \right] \right],$$

то

$$\tilde{a}, \tilde{e} = \sum_{\square,\square} \square_{\square,\square}^{\square\square} \hat{h}_{\square\square} = (-6\square\square\square\square)\square\square\square[2\square\square\square\square \cdot \square_0] \sum_{\square,\square} \square_{\square,\square}^{\square\square} \hat{h}_{\square\square}.$$

Видно, що масштабування $(-6\pi fL)$ повертає до деформаційних спостережуваних величин. Єдиною відмінністю від відгуку наземної обсерваторії є залежність від часу, що входить до $\square_0(t)$ і кутів LISA $\lambda_{\square}(t)$, $\beta_{\square}(t)$, $\psi_{\square}(t)$, з оцінкою часу $\square_{\square\square}$.

Нарешті, слід зауважити, що можна включити кут поляризації у функції шаблону наступним чином. Вище записано ψ як зовнішній множник, але можна також записати ψ -залежні функції шаблону як [7]

$$\begin{aligned} \square_{\square,\square}^{+}(\square_{\square}, \square_{\square}, \square_{\square}) &= \square\square\square 2\square_{\square}\square_{\square,\square}^{+} + \square\square\square 2\square_{\square}\square_{\square,\square}^{\times}, \\ \square_{\square,\square}^{\times}(\square_{\square}, \square_{\square}, \square_{\square}) &= -\square\square\square 2\square_{\square}\square_{\square,\square}^{+} + \square\square\square 2\square_{\square}\square_{\square,\square}^{\times}, \end{aligned}$$

так що в низькочастотному наближенні відповідь для деформаційних спостережуваних величин є

$$\hat{h}_{\square,\square} = \square_{\square,\square}^{+}(\square_{\square}, \square_{\square}, \square_{\square})\hat{h}_{+} + \square_{\square,\square}^{\times}(\square_{\square}, \square_{\square}, \square_{\square})\hat{h}_{\times},$$

якщо ігнорувати затримку $k \cdot p_0$ і розглядати кути як константи. Це більш звична форма реакції приладу, яка використовується для наземних детекторів.

Байєсівський аналіз

Використовуючи представлення

$$(\tilde{a}|\square\sim) = 4\square\square \int_0^{+\infty} \square\square \frac{\tilde{a}(\square)\square\sim(\square)}{\square_{\square}(\square)},$$

для стаціонарного гаусового шуму з спектральною густиною шуму S_n правдоподібність $\mathcal{L} = p(\theta)$ для даного каналу гравітаційної хвилі набуває вигляду [1]

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{1}{2} (h(\mathbf{d}) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) | h(\mathbf{d}) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})),$$

причому потік даних є суперпозицією сигналу гравітаційної хвилі для справжніх параметрів θ_0 та реалізації шуму в експерименті, $\mathbf{d} = \mathbf{h}(\theta_0) + \mathbf{n}$. Апостеріорний розподіл для фізичних параметрів $\boldsymbol{\theta}$ з урахуванням спостережених даних $\mathbf{d}$ є таким

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{d} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{d})},$$

де $p(\boldsymbol{\theta})$ – це апіорні розподіли параметрів, а $p(\mathbf{d})$ – доказові розподіли.

Загалом, шаблони $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$, що використовуються для аналізу, будуть лише наближенням фізичних сигналів, присутніх у потоці даних $\mathbf{d}$. Тут повністю ігнорується ця відмінність і припускається, що шаблонні сигнали точно відповідають астрофізичним сигналам. Іншими словами, ми не обговорюємо питання систематичних похибок, що виникають через неповне моделювання хвильових форм для злиття компактних подвійних систем.

Сигнали симулюються, їх байєсівський аналіз виконується за допомогою рівнянь для отримання апостеріорних розподілів параметрів. При цьому використовується так зване наближення нульового шуму, тобто встановлення $\mathbf{n} = 0$. Це дозволяє прискорити обчислення правдоподібності. Наближення достатнє для дослідження структури ймовірності та вироджень параметрів, значно покращуючи їх відносно підходу матриці Фішера.

Функція логарифмічної правдоподібності з нульовою реалізацією шуму, яку використано, є сумою за трьома незалежними каналами A, E, T, перемасштабованими відповідно до необхідних умов [1]:

$$\ln \mathcal{L} = \frac{1}{3} [(\tilde{a} - \tilde{a}_{\text{post}} | \tilde{a} - \tilde{a}_{\text{post}}) + (\tilde{e} - \tilde{e}_{\text{post}} | \tilde{e} - \tilde{e}_{\text{post}}) + (\tilde{t} - \tilde{t}_{\text{post}} | \tilde{t} - \tilde{t}_{\text{post}})],$$

з нижнім індексом « $i_n j$ », що вказує на змодельовані сигнали, і де скалярні добутки ($\cdot$) задані зі спектральною густиною потужності шуму.

Модель зменшеного порядку для сигналів EOBNRv2HM

Оскільки вищі гармоніки відіграють вирішальну роль у аналізі, використовуємо ефективну одночастинну модель сигналу EOBNRv2HM [4,6]. Ці хвильові форми базуються на формалізмі ефективного одного тіла та відкалібровані відповідно до хвильових форм з числових симуляцій ЗТВ. Модель обмежена системами без обертання на квазікругових орбітах, але включає набір вищих гармонік у сигналі, які є одними з найважливіших кількісно:

$$(\ell, m) = (2,2), (2,1), (3,3), (4,4), (5,5).$$

Хвильові форми генеруються в часовій області шляхом інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь, операція, що вимагає до секунд обчислювального часу для довгих сигналів. З цієї причини використовується EOBNRv2HMRM, що дозволяє дотримуючись методу набагато швидше генерувати амплітуди і фази Фур'є-мод у рівнянні. Оскільки загальна маса M виходить за межі проблеми, простір параметрів зменшується лише до співвідношення мас $q = m_1/m_2$. Тому інтерполяція простору параметрів значно простіша, ніж у моделях, які включають вирівняні спіни. Однак включення вищих гармонік вимагає моделювання відносного дефазування різних мод. Код видає амплітуду та фазу в області Фур'є для кожної моди, рідко дискретизованої на ~ 300 частотах. Недостовірність вихідних форм сигналу, припускаючи вдосконалені шумові криві LIGO, становить $\lesssim 10^{-4}$. Обчислювальний час становить долю мілісекунди та менший, ніж інші етапи обчислення ймовірності.

Припущення про наявність чорних дір, що не обертаються, є важливим обмеженням для реалістичної оцінки невизначеності внутрішніх параметрів.

Оскільки типовий байєсівський аналіз потребує оцінки мільйонів значень правдоподібності, обчислювальний час для функції правдоподібності має вирішальне

значення. Загалом, шаблон задається як ряди частот, відібрані за критерієм Найквіста $\Delta f = 1/(2T)$, де T — тривалість сигналу, потім обчислюються дискретні суми за цими частотами. Хоча перетворення у дискретну суму є простою операцією, довжина ряду частот може призвести до значних витрат. У контексті спостережень LIGO/Virgo це спонукало до розробки квадратур зменшеного порядку для прискорення обчислення правдоподібності. У випадку LISA обчислювальна вартість реалізації стандартної правдоподібності залежить насамперед від маси системи та тривалості сигналу. Ця вартість може коливатися від десятків мілісекунд для сигналів від злиття чорних дір і від короткочасних сигналів (кілька днів) до нездійсненних значень для сигналів систем надмасивних чорних дір, які тривають роками та дискретизуються на високій частоті. Однак, встановивши рівень реалізації шуму на нуль, можна представити амплітуду та фазу сигналів у розрідженій сітці частот і отримати велике прискорення.

Застосовуючи відповідь мода за модою на рідко дискретизованій амплітуді та фазі, отримуємо повне представлення як хвильової форми, так і перехідної функції приладу у кількох сотнях точок в області Фур'є, при цьому повний сигнал неявно реконструюється за допомогою стандартної інтерполяції кубічним сплайном по частотах. Одне з рівнянь розкладається як [1,7]

$$\ln \mathcal{L} = (h(\square)|h(\square_0)) - \frac{1}{2}(h(\square)|h(\square)) - \frac{1}{2}(h(\square_0)|h(\square_0)),$$

окремі доданки можуть бути великими, проте обчислення $\ln \mathcal{L}$ покладається на точне скасування доданків.

Складність обчислення залежить від різниці фаз. Велика різниця фаз призводить до того, що інтегральна функція дуже коливається, що вимагає більшої роздільної здатності за частотою, ніж підінтегральна функція без коливань. З іншого боку, коливальні інтегральні вирази призводять до малого інтеграла через ефекти скасування, тоді як неосциляційні інтегральні вирази вносять найбільший внесок.

Байєсівська вибірка

Для побудови апостеріорної функції розподілу методом байєсівської правдоподібності використовується метод марківських ланцюжків Монте-Карло (MCMC). Код MCMC

ptemsee було розроблено в рамках кількох астрофізичних проектів, перевірено на кількох проблемах із вибіркою та розроблено модульно з метою мінімізації можливостей для помилок у нових програмах. Код виконує паралельний загартований МСМС з температурами, які повільно регулюються для досягнення майже рівних обмінних показників між усіма парами суміжних температур. Було застосовано розподіл пропозицій загального призначення, що складається зі зваженого набору підпропозицій, включаючи кроки диференційної еволюції (хоча пропозиція в цьому випадку базується на кожному окремому ланцюжку, а не на ансамблі), і набір кількох кроків Гауса різних розмірів зменшено порівняно з попереднім доменом приблизно на 0,01–1% від його масштабу та зважено, щоб надати перевагу пропозиціям меншого масштабу. Ефективні розміри вибірки оцінюються на основі кількості вибірок після вигорання та зменшені на довжину автокореляції, причому розмір вигорання був обраний для максимізації ефективних розмірів вибірки. Цикли продовжуються до досягнення ефективних розмірів вибірки > 20000 [3,7].

Оцінка параметрів матриці Фішера

Для визначення стартової точки і стартової коваріаційної матриці для методу МСМС використовується інформаційна матриця Фішера, яка, незважаючи на свої обмеження, на сьогоднішній день все ще є найпоширенішою робочою конячкою наукових досліджень LISA. Для вимірювань з адитивним гаусовим шумом інформаційна матриця Фішера може бути обчислена за допомогою [7]

$$F_{ij} = (\partial_i h | \partial_j h),$$

де ∂_i – похідна по компоненті i вектора параметрів θ . У підході матриці Фішера ймовірність апроксимується як

$$\mathcal{L} \simeq -\frac{1}{2} \Delta \theta^i \Sigma_{ij} \Delta \theta^j,$$

де $\Delta \theta^i$ – відхилення параметра від істинного сигналу. Обернена матриця Фішера, $\Sigma = F^{-1}$, є коваріаційною матрицею Гауса, яку можна використовувати як оцінку справжніх невизначеностей параметрів.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ДЖЕРЕЛА НА ОСНОВІ СИНТЕТИЧНИХ НАБОРІВ ДАНИХ LISA

За допомогою програмного пакету *lisabeta* (розроблений командою LISA Consortium під керівництвом S. Marsat) [1] було теоретично розраховано гравітаційно-хвильовий сигнал, який очікується від масивної подвійної чорної діри, на його основі симульовано набір даних, що відповідає очікуваним даним спостережень LISA. Використовуючи цей симульований набір даних, було проведено визначення параметрів джерела методом Марківських ланцюжків Монте-Карло (MCMC). Спрощена схема алгоритму, використаного в *lisabeta*, показана на рис. 1.

Спочатку було проведено моделювання 3 наборів даних від одного джерела гравітаційних хвиль з різною кількістю генерацій в методі MCMC. Джерелом була система двох масивних чорних дір з масами 2 000 000 та 1 000 000 мас Сонця. Використано 40 000, 100 000 та 250 000 генерацій (рис. 2-4). Можна побачити, що чим більша кількість генерацій, тим гладшими будуть довірчі контури, зображені на графіках, і тим меншими будуть похибки визначення параметрів джерела.



Рис. 1

Спрощена схема використаного алгоритму

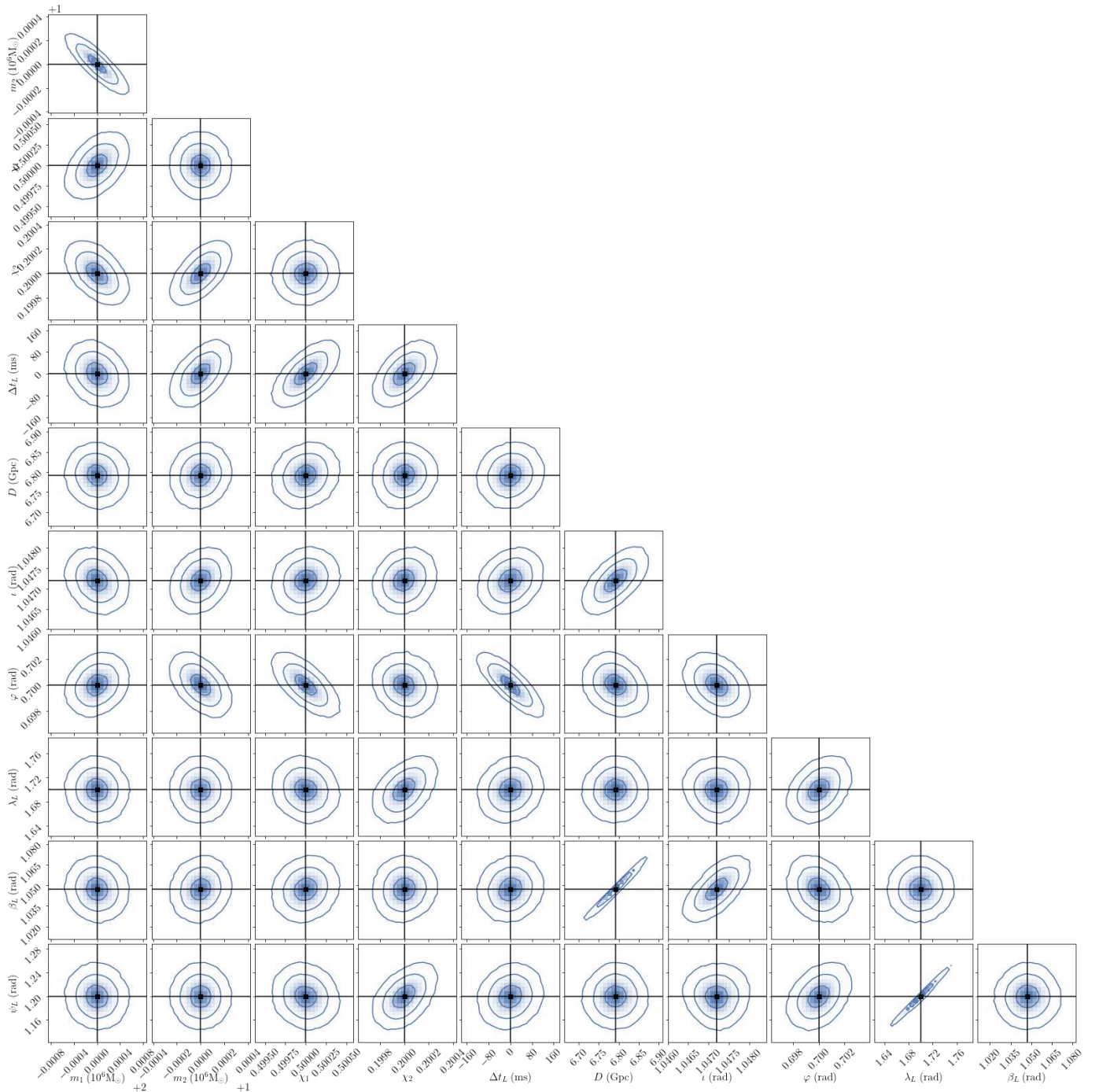


Рис. 2

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №1 ($z=1$).

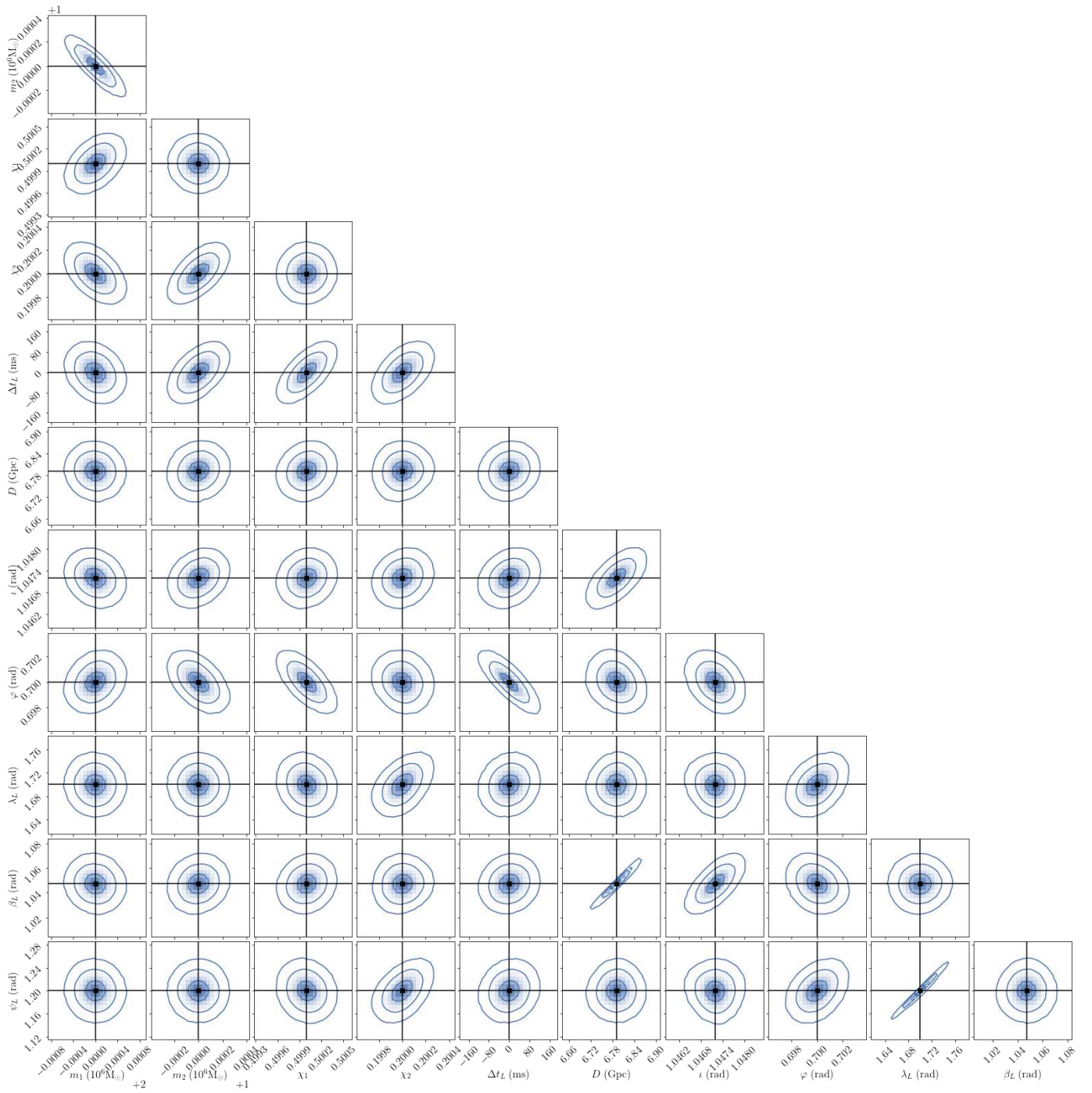


Рис. 3

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №2 ($z=1$).

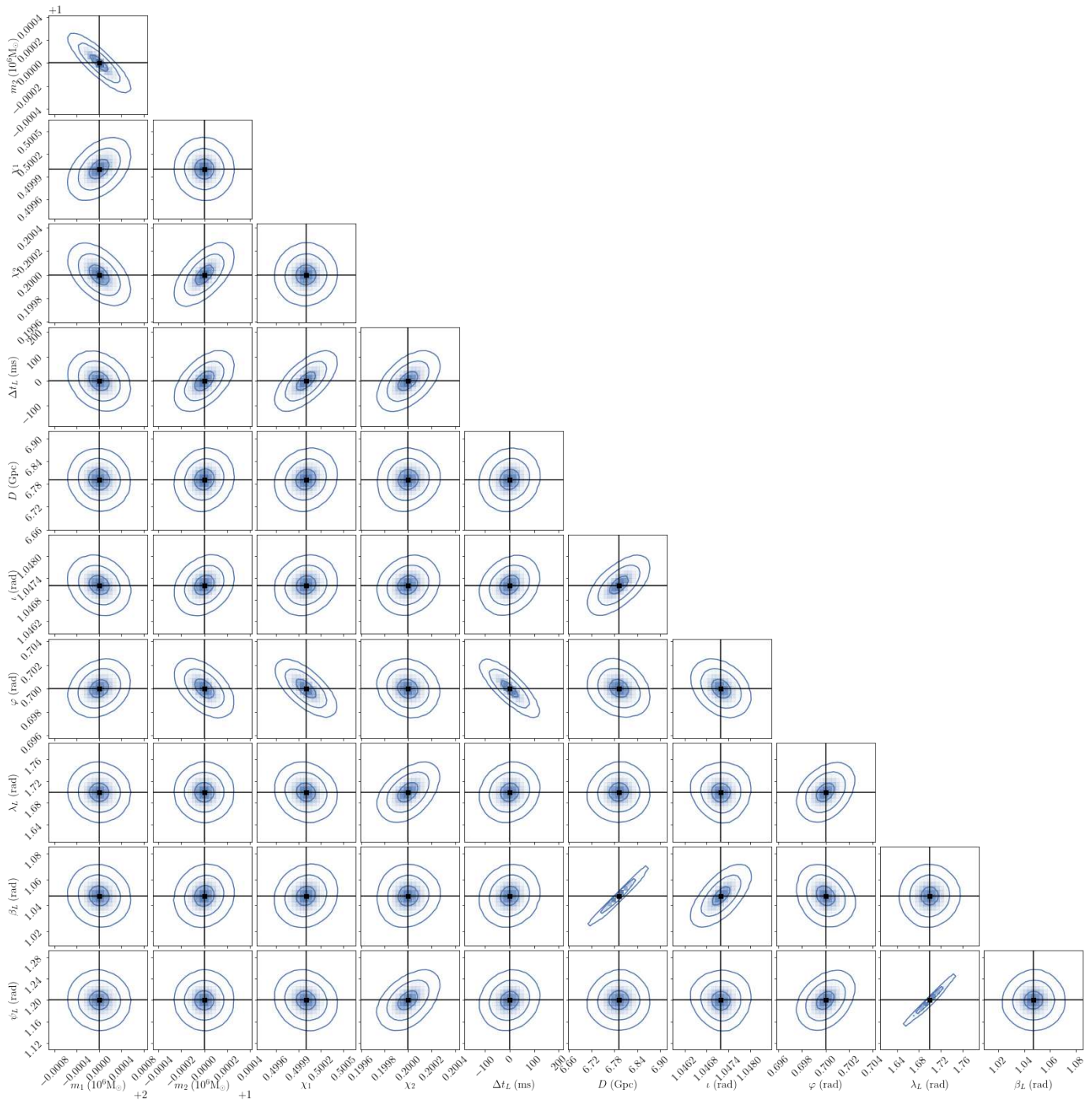


Рис. 4

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №3 ($z=1$).

На рис. 5 можна побачити довірчі контури для джерела з масами 2 500 000 та 500 000 мас Сонця і 100 000 генерацій.

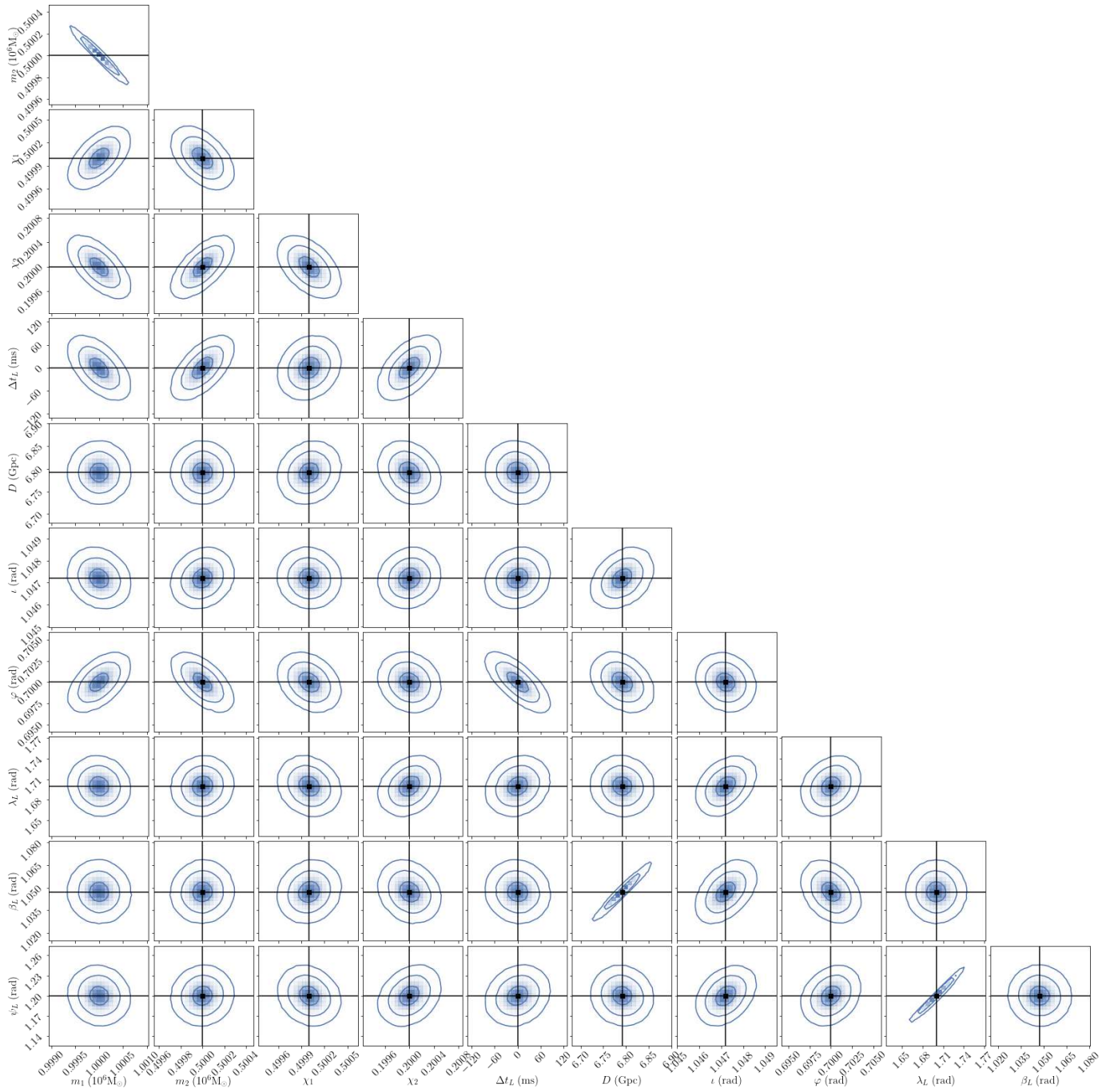


Рис. 5

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №4 ($z=1$).

Ми провели моделювання для різних значень червоного зміщення від 0.5 до 3 (рис. 6-10) для масивної подвійної чорної діри з масами компонент 200 000 та 100 000 мас Сонця. При зростанні червоного зміщення рівень сигналу зменшується, отже ширина довірчих контурів, що визначає похибку визначення параметрів, зростає. Однак, як ми бачимо на графіках, для гравітаційних хвиль в частотному діапазоні LISA врахування

поляризаційних мод призводить до того, що падіння точності на високих червоних зміщеннях є незначним (ширина довірчих контурів зростає незначно).

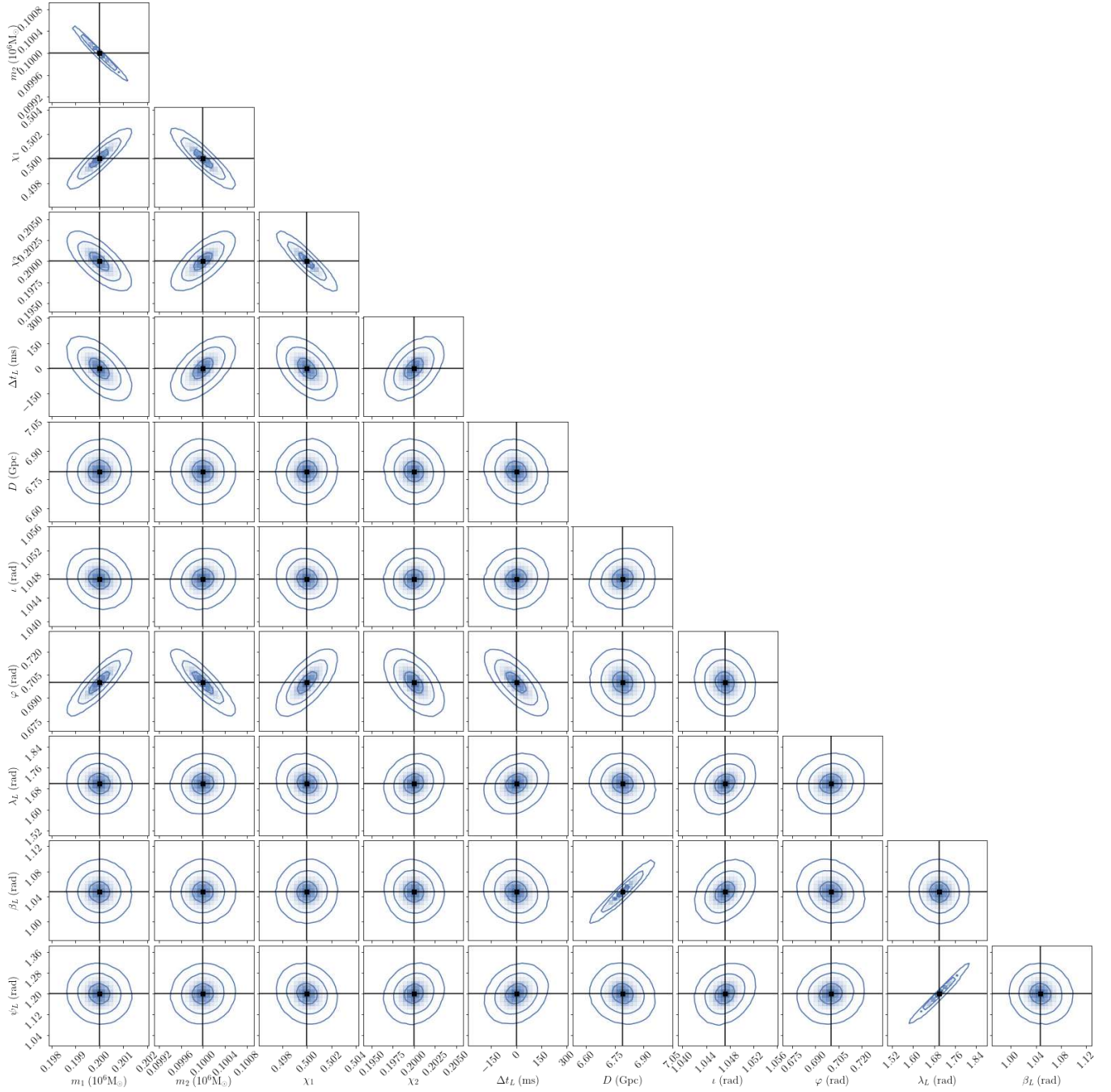


Рис. 6

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №5 ($z=0.5$).

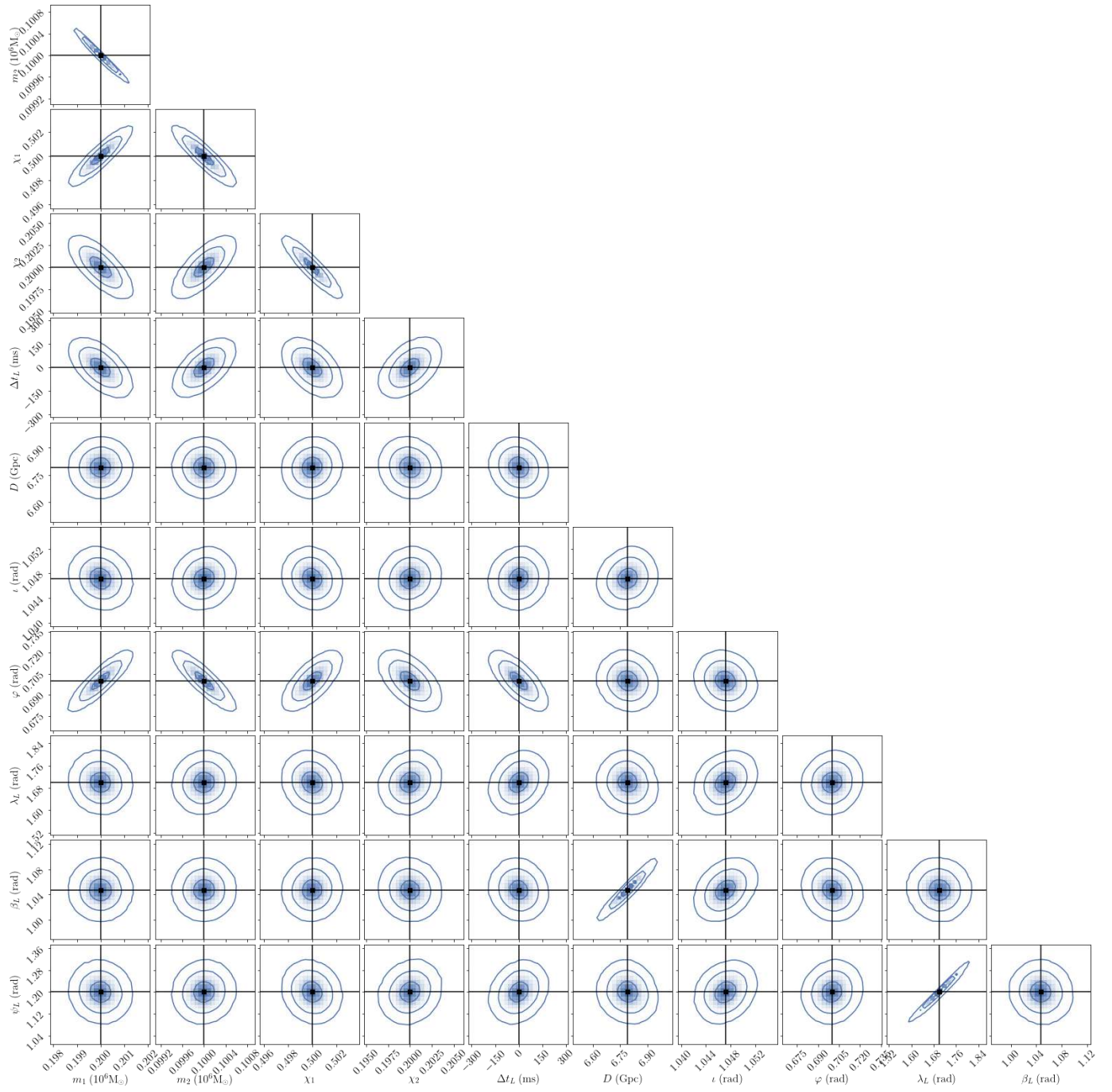


Рис. 7

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №6 ($z=1$).

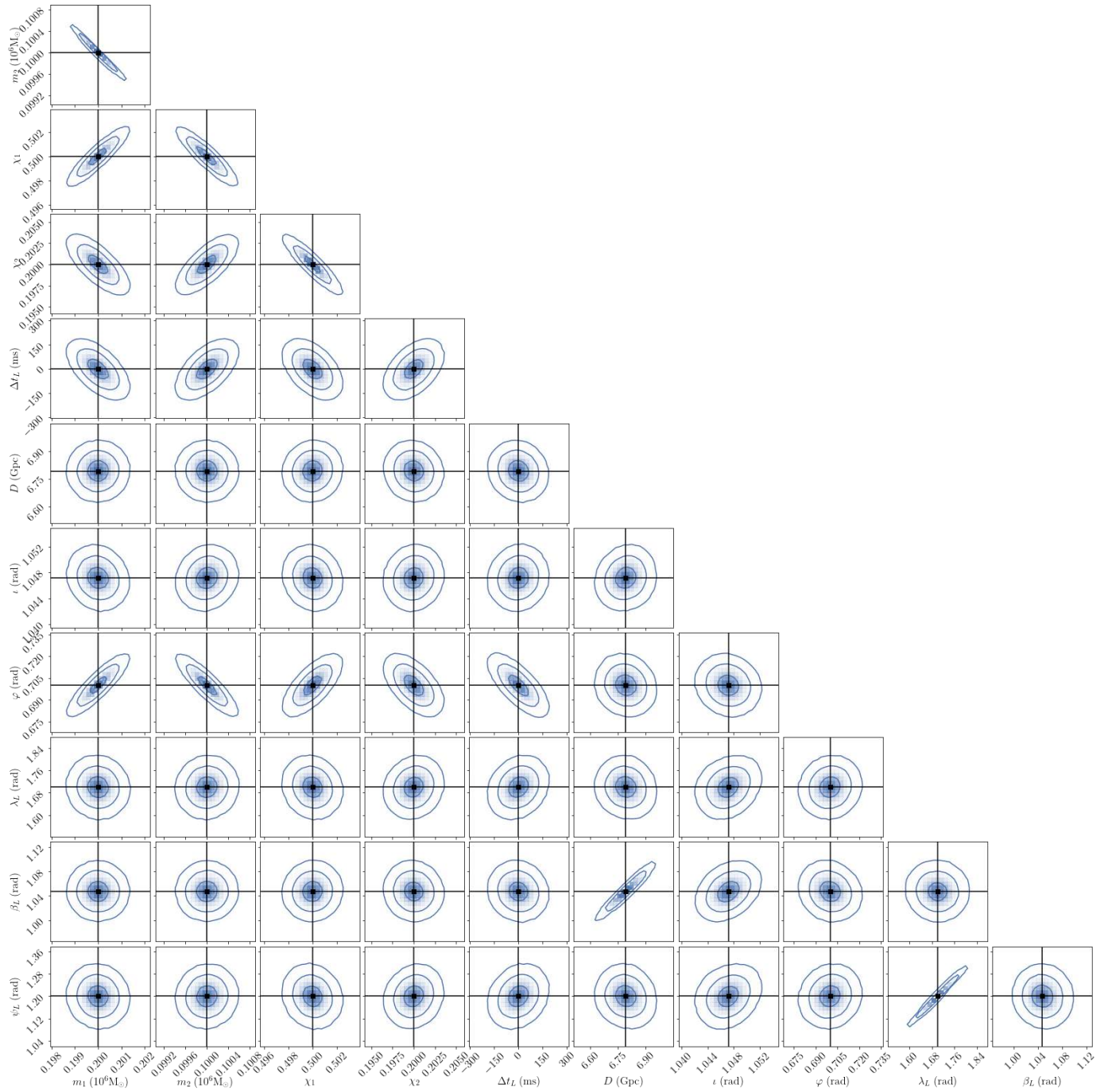


Рис. 8

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №7 ($z=1.5$).

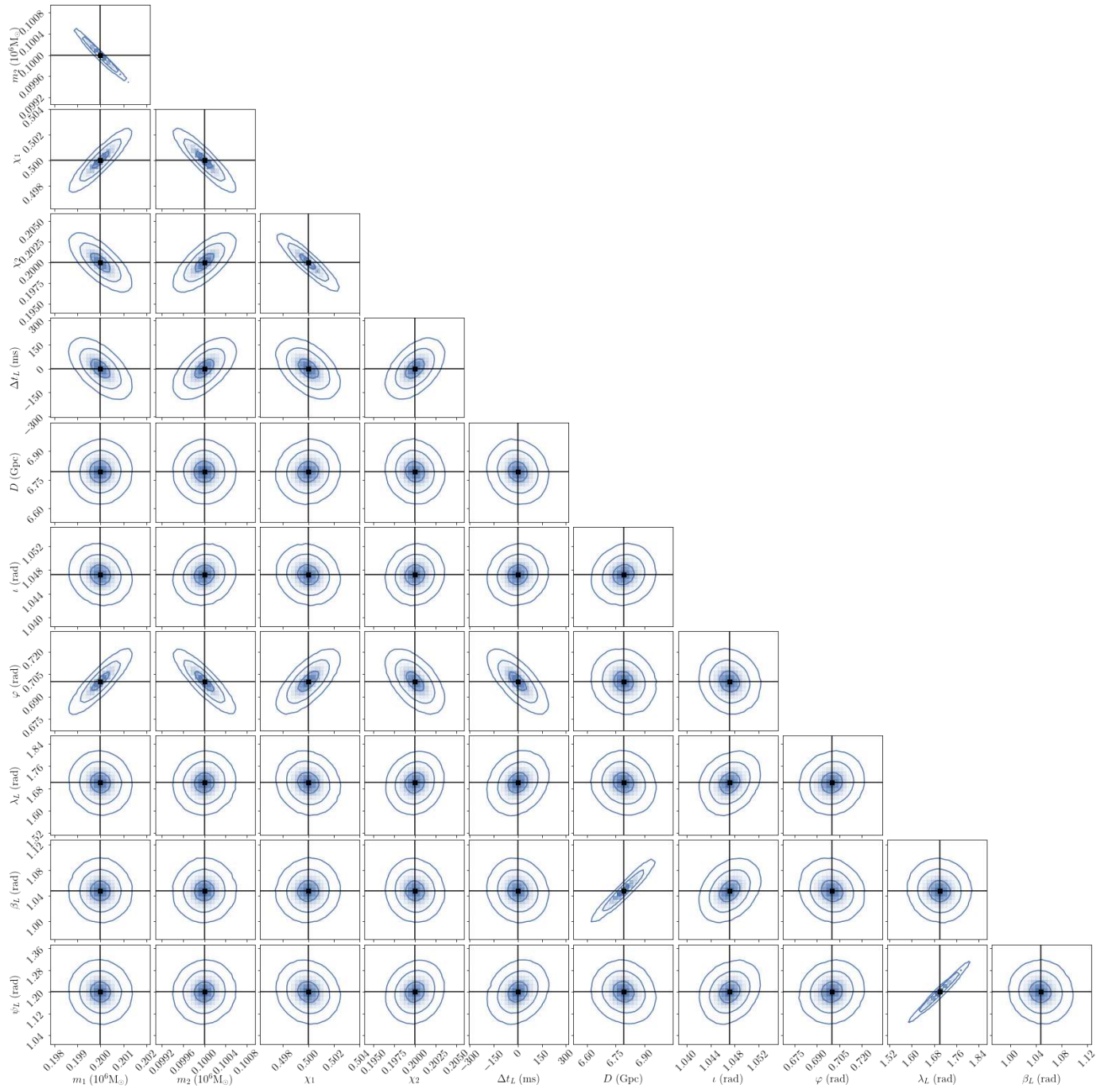


Рис. 9

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №8 ($z=2$).

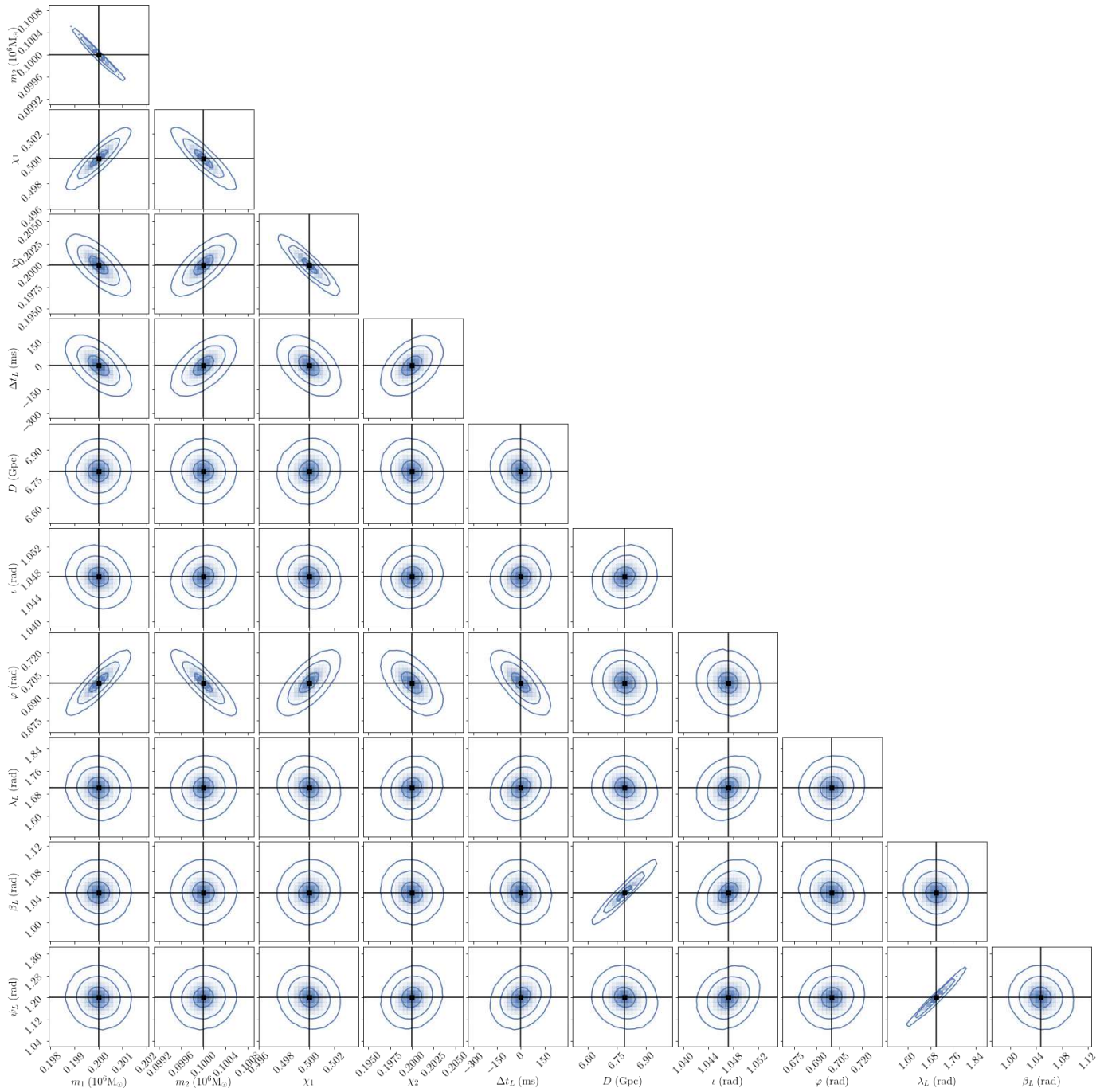


Рис. 10

1σ та 2σ довірчі контури для параметрів джерела, визначених на основі синтетичного набору даних №9 ($z=3$).

Таким чином, використання майбутніх спостережень поляризації гравітаційних хвиль за допомогою LISA може допомогти визначити космологічну модель, яка найкраще описує Всесвіт.

ВИСНОВКИ

Було проведено моделювання спостережень майбутньою космічною обсерваторією LISA гравітаційно-хвильових сигналів від масивних подвійних чорних дір з врахуванням поляризації гравітаційних хвиль. Симульовані набори даних дозволили встановити точність, з якою поляризаційні моди, що спостерігатимуться LISA, можуть визначати параметри джерела. Були проаналізовані різні аспекти точності визначення параметрів, зокрема залежність від кількості генерацій у методі Марковських ланцюжків Монте-Карло (MCMC).

Результати показали, що врахування поляризації гравітаційних хвиль значно покращує точність визначення параметрів джерела навіть при високих червоних зміщеннях. Це означає, що LISA зможе надійно визначати параметри масивних подвійних чорних дір, розташованих на значних космологічних відстанях, без суттєвого падіння точності на високих червоних зміщеннях. Таким чином, дослідження продемонструвало важливість поляризаційних мод для покращення точності спостережень і розуміння характеристик далеких гравітаційно-хвильових джерел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Marsat S., Baker J. G., Canton T. D. Exploring the Bayesian parameter estimation of binary black holes with LISA. *Physical Review D*. 2021. Vol. 103, no. 8, 083011.
2. Eric Poisson and Clifford M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014
3. Littenberg T. B., Cornish N. J. Prototype global analysis of LISA data with multiple source types. *Physical review D*. 2023. Vol. 107, no. 6, 063004. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevd.107.063004>
4. Model of gravitational waves from precessing black-hole binaries through merger and ringdown / E. Hamilton et al. *Physical review D*. 2021. Vol. 104, no. 12, 124027. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevd.104.124027>
5. Danzmann K. *Laser Interferometer Space Antenna*. Hannover, 2017. 41 p.
6. Simple model of complete precessing black-hole-binary gravitational waveforms / M. Hannam et al. *Physical review letters*. 2014. Vol. 113, no. 15, 151101. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.151101>
7. Marsat S., Baker J. G. Fourier-domain modulations and delays of gravitational-wave signals. arXiv:1806.10734 [gr-qc]