

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь — бакалавр

на тему: **“Гомотопічні властивості топологічних просторів і
фундаментальні групи скінченних CW-комплексів”**

Виконала студентка
4-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Антошина Катерина Олегівна
(ПІБ)

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

“ _____ ” _____ 2021 р.

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено “_____” _____ 2021 р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін	Підпис	Дата	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	10.10.2020			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	15.10.2020			
3.	Розробка плану та структури роботи.	3.11.2020			
4.	Робота з науковою літературою.	30.11.2020			
5.	Опис основних гомотопічних властивостей топологічних просторів, приклади.	20.12.2020			
6.	Дослідження поняття фундаментальної групи, пошук алгоритму для CW-комплексів.	25.02.2021			
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	10.03.2021			
8.	Попередній аналіз. Виправлення помилок.	5.05.2021			
9.	Захист роботи.	8.06.2021			

Зміст

1	Вступ	4
2	Основні означення	6
3	Приклади просторів та їхні властивості	14
3.1	Гомотопія	14
3.2	Спеціальні простори	18
3.3	Фактор-топологія	21
3.4	Характеризації топологічних просторів	27
3.5	Простір неперервних відображень $C(X, Y)$	29
4	Фундаментальна група	31
4.1	Загальні твердження	31
4.2	Теорема Ван Кампена для обчислення фундаментальних груп	34
4.3	Фундаментальна група CW -комплекса	37
5	Фундаментальні групи скінченних CW-комплексів	40
5.1	Обчислення фундаментальної групи симпліціального комплекса	40
5.2	Підхід через дискретні векторні поля	44
6	Висновки	48
7	Література	49

1 Вступ

На сьогоднішній день у науковому суспільстві спостерігається неабиякий інтерес до алгебри, оскільки саме алгебраїчним структурам підпорядковуються природні явища та фізичні процеси. Абстрактна загальна топологія відходить на задній план, проте залишається незмінним залізобетонним фундаментом для подальшого застосування в задачах математичного та функціонального аналізу, диференціальної геометрії, рівнянь математичної фізики тощо. Поєднавши топологію з алгеброю, утворився потужний математичний апарат – алгебраїчна топологія, інструментами якої є поняття гомотопії, гомотопічної еквівалентності, гомотопічні групи та групи гомологій, що мають пряме прикладне значення: за допомогою перших дається формалізація неперервної деформації одного об’єкта в інший, за допомогою інших ідентифікується наявність і кількість так званих “ n -вимірних дірок” у просторі.

У загальній топології вивчаються простори з точністю до гомеоморфізму. В алгебраїчній топології простори розглядаються вже з точністю до гомотопічної еквівалентності. Незважаючи на те, що гомотопічна еквівалентність є більш грубою еквівалентністю, ніж гомеоморфізм (наприклад, $\mathbb{R}^n \simeq 0$), все ж вона дозволяє розрізняти деякі властивості просторів, наприклад, гомотопічна еквівалентність зберігає лінійну зв’язність, однозв’язність та фундаментальну групу (для лінійно зв’язних просторів).

Окрім всього, слід зауважити, що на перетині алгебри та топології також знаходиться такий розділ математики як топологічна алгебра. Вона вивчає стандартні алгебраїчні структури, такі як група, напівгрупа, кільце, поле, на яких задана топологія. При цьому, алгебраїчні операції пов’язані з топологічною структурою цілком природнім чином (наприклад, у топологічній групі операції множення та взяття оберненого мають бути неперервними). У даній роботі ми сконцентруємось саме на алгебраїчній топології.

Структура даної роботи є послідовною. Після вступу йде розділ із основними означеннями, куди винесена більшість термінології, що використовується в роботі та топології загалом, а також наведені базові твердження для подальшої роботи з просторами та відображеннями між ними. У третьому розділі наведені приклади топологічних просторів та їхніх гомотопічних властивостей таких, як однозв’язність, стягуваність тощо. Також

розглянуто характеристики просторів через відображення ретракції та гомотопію в просторі неперервних відображень між топологічними просторами $C(X, Y)$. У четвертому розділі детальніше розглянуто поняття фундаментальної групи, доведено критерій абелевості фундаментальної групи, обчислено фундаментальну групу кола та сформульовано теорему Ван Кампена для обрахунку фундаментальних груп CW-комплексів та наведено приклад її застосування.

П'ятий розділ присвячений найбільш прикладній частині роботи – алгоритмові обчислення фундаментальної групи триангульовного многовида. У 1969 році Кірбі і Зібенманн [16] показали, що в будь-якій розмірності, більшій за 4, існують многовиди без кусково-лінійної структури, що означає, що не кожен топологічний многовид допускає *комбінаторну* триангуляцію. А 1982 року Фрідман [12] надав приклад чотиривимірного многовида (E_8) , що не має комбінаторної триангуляції. У роботі [5] був введений новий гомологічний інваріант для 3-сфер, за допомогою чого можна показати, що многовид Фрідмана (E_8) не триангульовний. І Кіпріан Манолеску [17] у 2013 році довів, що у всіх розмірностях ≥ 5 існують нетриангульовні многовиди.

Математичне моделювання топологічними многовидами є складною математичною справою, яка знаходить своє застосування в аналізі супутникових знімків [7] чи розпізнаванні людського почерку [15]. Окрім цього, диференціальна геометрія, об'єктами дослідження якої є в більшості випадків саме многовиди, загалом часто використовується для теоретичного аналізу електромагнетизму, і практичному застосуванню зазвичай приділяється менше уваги. Однак многовиди та диференціальна геометрія дуже підходять для практичних вимог чисельного моделювання, і вони дають розуміння, яке суттєво допомагає при побудові математичних моделей [19]. У біомедичних областях топологія застосовується для класифікації та ідентифікації молекул ДНК, і топологічні зміни розглядаються як ідентифікатори деяких важливих хімічних змін [9]. У комп'ютерній графіці, розробці ігор, комп'ютерній геометрії та для автоматизації завдань інженерного аналізу надійним методом залишається топологічний аналіз суцільних структур [3].

Темою і задачею даної роботи є висвітлити та структурувати факти про гомотопічні властивості топологічних просторів, а також знайти спосіб точно обраховувати фундаментальні групи деяких CW-комплексів.

2 Основні означення

Означення 2.1. Нехай X – непорожня множина, а τ – такий набір її підмножин, що:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $\forall U, V \in \tau : U \cap V \in \tau$;
3. $\forall U_i \in \tau, i \in I : \bigcup_i U_i \in \tau$.

Пара (X, τ) називається *топологічним простором*, сімейство τ – *топологією* на X , сама множина X називається *носієм* топології.

Елементи τ називаються *відкритими* множинами. Множина A є *замкненою*, якщо $X \setminus A$ відкрита.

Одночасно відкрита й замкнена множина називається *відкрито-замкненою*.

Означення 2.2. Множина $A \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо $x \in A \in \tau$.

- Приклад 2.3.**
1. *Дискретна топологія* на X – це $\tau = 2^X$.
 2. *Антидискретна (тривіальна)* топологія на X – це $\tau = \{\emptyset, X\}$.
 3. Евклідова метрика $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ природнім чином індукує *Евклідову топологію* на $\mathbb{R}^n$. Відкриті кулі $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$ складають *базу* цієї топології, тобто, кожна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ може бути представлена у вигляді об'єднання таких куль.

Означення 2.4. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Підмножина $\beta \subset 2^X$ називається *базою* топологічного простору (чи *базою топології*), якщо будь-яка відкрита множина може бути представлена у вигляді об'єднання елементів із β .

Твердження 2.5 (Внутрішній критерій бази). [1] *Набір відкритих множин $\beta \subset \tau$ топологічного простору (X, τ) є його базою тоді й лише тоді, коли для будь-якого $x \in X$ для будь-якого його околу U існує деякий елемент $B \in \beta$ такий, що $x \in B \subset U$.*

Зауваження 2.6. Якщо зрозуміло, про яку топологію йдеться, простір позначаємо просто X .

Означення 2.7. Відображення між двома топологічними просторами $f : X \rightarrow Y$ називається

- *відкритим*, якщо образ відкритої в X множини є відкритим в Y .
- *замкненим*, якщо образ замкненої в X множини є замкненим в Y .
- *неперервним*, якщо прообраз відкритої в Y множини є відкритим в X .
- *гомеоморфізмом*, якщо воно є неперервною відкритою бієкцією.

Означення 2.8. Кажуть, що топологічний простір є *незв'язним*, якщо

$$\exists A, B \in \tau \setminus \{\emptyset\} : A \sqcup B = X.$$

Інакше, X є *зв'язним*.

Означення 2.9. Неперервне відображення $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ називається *шляхом*.

Простір X є *лінійно зв'язним*, якщо $\forall x_1, x_2 \in X \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X :$

$$\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2.$$

Якщо $x_1 = x_2 = x$, такий шлях називається *петлею* в точці x .

Означення 2.10. Сімейство відображень

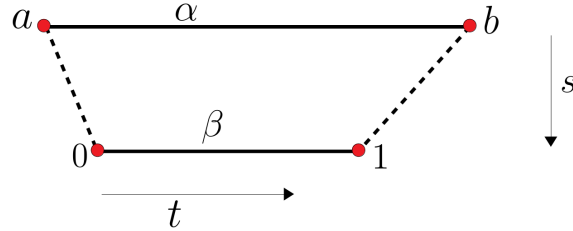
$$f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$$

між двома топологічними просторами X та Y називається *гомотопією*, якщо відповідне відображення $H : X \times I \rightarrow Y$, що задається так: $H(x, t) = f_t(x)$ є неперервним. Кажуть, що два відображення f_0, f_1 є *гомотопними*, якщо між ними існує гомотопія. Позначаємо це так: $f_0 \simeq f_1$.

Слово *гомотопія* часто вживається як загальне позначення для деякого неперервного відображення $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$. У цій роботі ми вживатимемо обидва означення.

Зауваження 2.11. Легко показати, що будь-яке неперервне відображення $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, де $[a, b]$ – зв’язний замкнений інтервал із $\mathbb{R}$, гомотопне деякому шляху $\beta : [0, 1] \rightarrow X$. Шукана гомотопія така:

$$H(t, s) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t).$$



Твердження 2.12. Гомотопність шляхів є відношенням еквівалентності.

Доведення. Покажемо рефлексивність, симетричність і транзитивність відношення $\simeq$.

Нехай X – топологічний простір, $a, b \in X$ – дві різні точки цього простору. Нехай f, g, h – три різні шляхи з a в b . Очевидно, що $f \simeq f$ за постійною гомотопією. Якщо $f \simeq g$ за гомотопією f_t , то $g \simeq f$ за гомотопією f_{1-t} .

Для транзитивності припустимо, що $f \simeq g$ за гомотопією f_t , і $g \simeq h$ за гомотопією g_t . Тоді бачимо, що $f \simeq h$ за гомотопією h_t , що визначається так:

$$h_t = \begin{cases} f_{2t}, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_{2t-1}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

І зрозуміло, що відповідне відображення $H(x, t) = h_t(x)$ є неперервним в силу того, що його звуження на проміжки $[0, \frac{1}{2}]$ і $[\frac{1}{2}, 1]$ неперервні, і для $t = \frac{1}{2}$ відображення збігаються. $\square$

Означення 2.13. Нехай X – простір, $A \subset X$. Деформацією X на A називається гомотопія $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ з такими властивостями:

1. $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$;
2. $H(a, t) \in A \ \forall (a, t) \in A \times [0, 1]$;
3. $H(x, 1) \in A \ \forall x \in X$.

Означення 2.14. Ретракцією простору X на підпростір A називається неперервне відображення $r : X \rightarrow A$ таке, що $r(X) = A$ і $r|_A = id_A$.

Означення 2.15. Деформаційна ретракція простору X на підпростір A – це гомотопія $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$:

1. $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$;
2. $H(a, t) = a \ \forall (a, t) \in A \times [0, 1]$;
3. $H(x, 1) \in A \ \forall x \in X$.

У такому випадку A називається *деформаційним ретрактом* простору X .

Таким чином, деформаційна ретракція є певною гомотопією між тотожним відображенням id_X і деякою ретракцією $r : X \rightarrow A$.

Означення 2.16. Відображення між двома топологічними просторами $f : X \rightarrow Y$ називається *гомотопічною еквівалентністю*, якщо існує таке відображення $g : Y \rightarrow X$, що $g \circ f \simeq id_X$ і $f \circ g \simeq id_Y$. Якщо між X та Y існує гомотопічна еквівалентність, то кажуть, що X та Y гомотопічно еквівалентні, або мають однаковий гомотопічний тип. Це позначається так: $X \simeq Y$.

Твердження 2.17. Якщо простір X гомеоморфний простору Y , то $X \simeq Y$.

Доведення. Гомеоморфізм між X та Y і є шуканою гомотопічною еквівалентністю. □

Означення 2.18. Нехай X – топологічний простір, зафіксуємо точку x_0 та розглянемо всі петлі в x_0 . Позначимо через $[\gamma]$ клас еквівалентності петлі γ за відношенням гомотопності та назовемо його *гомотопічним класом*. Множина всіх гомотопічних класів $[\gamma]$ петель γ в x_0 називається *фундаментальною групою* і позначається так: $\pi_1(X, x_0)$.

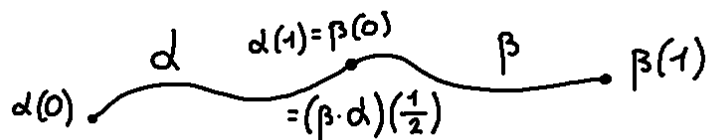
Означення 2.19. Нехай X – топологічний простір, $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ такі шляхи, що $\alpha(1) = \beta(0)$.

Для кожного $t \in [0, 1]$ покладемо

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

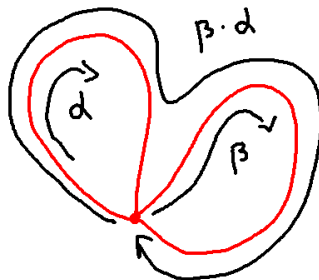
Відображення $\beta \cdot \alpha$ називається *конкатенацією* шляхів α і β .

Ілюстрація цієї операції виглядає так:



Результат конкатенації шляхів також є шляхом.

Твердження 2.20. *Фундаментальна група з операцією конкатенації*



утворює групу.

Доведення. Перевіримо аксіоми групи для множини $\pi_1(X, x_0)$ деякого топологічного простору X та бінарної операції конкатенації.

Спершу, нейтральний елемент цієї структури – це клас еквівалентності постійного відображення $\varepsilon(t) = x_0 \forall t \in [0, 1]$. Оскільки конкатенація є коректно визначеною, то $[\varepsilon] \cdot [\alpha] = [\varepsilon \cdot \alpha]$. Отже, ми бачимо, що $\varepsilon \cdot \alpha \simeq \alpha$ за гомотопією

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha((2 - t)s), & s \in [0, \frac{1+t}{2}] \\ \varepsilon(s), & s \in [\frac{1+t}{2}, 1] \end{cases}$$

Так само, $\alpha \cdot \varepsilon \simeq \alpha$, отже $[\varepsilon]$ є нейтральним елементом у $\pi_1(X, x_0)$.

Далі, як відомо, обернена петля до довільної петлі $\alpha \in [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ – це $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$. Нам необхідно показати, що $\alpha^{-1} \cdot \alpha \simeq \varepsilon$ для деякого

$\varepsilon \in [\varepsilon]$. Для цього побудуємо гомотопію:

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(s), & s \in [0, \frac{1-t}{2}] \\ \alpha(\frac{1-t}{2}), & s \in [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}] \\ \alpha^{-1}(s), & s \in [\frac{1+t}{2}, 1] \end{cases}$$

Так само, $\alpha \cdot \alpha^{-1} \simeq \varepsilon$, отже, ми покладемо $[\alpha]^{-1} := [\alpha^{-1}]$.

Тепер перевіримо асоціативність операції конкатенації. Щоб довести, що $([\gamma] \cdot [\beta]) \cdot [\alpha] = [\gamma] \cdot ([\beta] \cdot [\alpha])$, зафіксуємо представників γ, β, α відповідних класів та покажемо, що петлі $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha$ і $\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$ є гомотопними.

$$((\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha)(s) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (\gamma \cdot \beta)(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t - 2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t - 3), & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

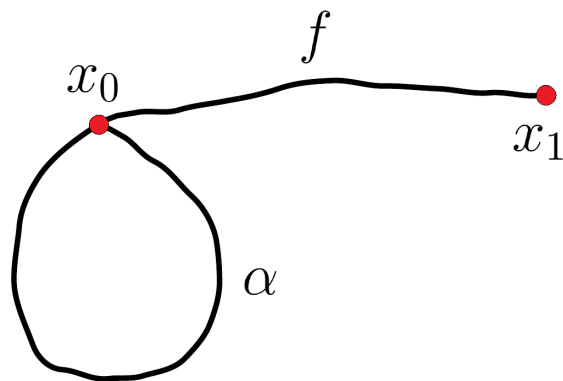
$$(\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha))(s) = \begin{cases} (\beta \cdot \alpha)(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t - 1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Гомотопія між $\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$ і $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha$ є наступною:

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(t(2s) + (1-t)(4s)), & s \in [0, \frac{t}{2} + \frac{1-t}{4}] \\ \beta(4s - 2), & s \in [\frac{t}{2} + \frac{1-t}{4}, \frac{3t}{4} + \frac{1-t}{2}] \\ \alpha(t(4s - 3) + (1-t)(2s - 1)), & s \in [\frac{3t}{4} + \frac{1-t}{2}, 1] \end{cases}$$

Оскільки $\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$ гомотопне $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha$, ми маємо асоціативність. □

Зауваження 2.21. У лінійно зв'язних просторах усі фундаментальні групи ізоморфні. Ізоморфізм між $\pi_1(X, x_0)$ і $\pi_1(X, x_1)$ у таких випадках такий: $\varphi : [\alpha] \mapsto [f^{-1} \cdot \alpha \cdot f]$, де α – це петля в x_0 , f – шлях із x_1 в x_0 . Доведення цього факту буде надано в Теоремі 4.1.



У таких випадках ми позначаємо фундаментальну групу просто як $\pi_1(X)$.

Означення 2.22. Лінійно зв'язний простір X називається *однозв'язним*, якщо його фундаментальна група *тривіальна*: $\pi_1(X) = \{1\}$.

Простір X є *локально однозв'язним*, якщо він має базу, що складається з однозв'язних множин.

Простір X є *напівлокально однозв'язним*, якщо кожна точка $x \in X$ має окіл U такий, що індукований гомоморфізм $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ є тривіальним. Іншими словами, кожен $x \in X$ має окіл U такий, що кожна петля в U є стягуваною по X . (нуль-гомотопна)

Наприклад, кожен CW-комплекс є локально однозв'язним топологічним простором (означення CW-комплекса дивіться в розділі 4.3).

Означення 2.23. Простір X є *локально (лінійно) зв'язним*, якщо він має базу, що складається з (лінійно) зв'язних множин.

Локально однозв'язний простір є також локально лінійно зв'язним (а отже, і локально зв'язним).

Означення 2.24. Простір, гомотопічно еквівалентний до точки, називається *стягуваним*. Відображення, гомотопне постійному, називається *нуль-гомотопним*.

Детальніше про співвідношення між стягуваністю, однозв'язністю та їхніми локальними відповідниками написано далі в розділі 3.2.

Означення 2.25. Нехай X – топологічний простір і $\sim$ – відношення еквівалентності на X . *Фактор-топологією* називається найсильніша топологія на $X/\sim$, для якої відображення $q : X \rightarrow X/\sim$ є неперервним. Відповідне q називається *факторним відображенням*, а $X/\sim$ – *фактор-простором*.

Означення 2.26. Нехай X та Y – два топологічні простори, $f : X \rightarrow Y$ – відображення. Візьмемо диз'юнктне об'єднання декартового добутку $X \times [0, 1]$ із Y : $Z = (X \times [0, 1]) \sqcup Y$. Розглянемо таке відношення еквівалентності на Z : $a \sim b$, якщо $a = b$ або $a = (x, 1), b = f(x)$ для $x \in X$. Фактор-простір $M_f = Z/\sim$ називається *циліндр відображення*.

Означення 2.27. Топологічний простір називається *компактним*, якщо з довільного його відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття.

3 Приклади просторів та їхні властивості

3.1 Гомотопія

Приклад 3.1. Якщо $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – два відображення, то

$$h_t(x) = (1 - t)f_1(x) + tf_2(x)$$

є гомотопією між f_1 і f_2 .

Твердження 3.2. Якщо $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ і $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ – дві пари гомотопних відображень, то для композицій $g_1f_1, g_2f_2 : X \rightarrow Z$ справедливо

$$g_1f_1 \simeq g_2f_2.$$

Доведення. Якщо $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ – гомотопія між f_1, f_2 , $G : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ – гомотопія між g_1, g_2 , то відображення

$$H(x, t) = G(F(x, t), t)$$

є гомотопією $g_1f_1 \simeq g_2f_2$. □

Твердження 3.3. Якщо простір X може бути продеформований на підпростір A , тоді X є гомотопічно еквівалентним до A .

Доведення. Нехай F – ця деформаційна ретракція: $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$. Нехай $f(x) = F(x, 1) \forall x \in X$ тому $f : X \rightarrow A$ і $g : A \hookrightarrow X$ відображення вкладення. Більше того, $f \circ g = id_A$, тому що $\forall x \in A \ f(g(x)) = f(x) = F(x, 1) = x$. Тепер розглянемо композицію $g \circ f$. Для всіх $x \in X$ маємо $g(f(x)) = g(F(x, 1)) = F(x, 1)$, отже, $F(\cdot, 0) = id_X$, $F(\cdot, 1) = g \circ f$, тому F є гомотопією між id_X та $g \circ f$, що означає, що X є гомотопічно еквівалентним до A . □

Теорема 3.4. [14] Два простори X і Y є гомотопічно еквівалентними тоді й лише тоді, коли існує третій простір Z , що містить X та Y у якості деформаційних ретрактів.

Доведення. $\Rightarrow$: Нехай $f : X \rightarrow Y$ – гомотопічна еквівалентність і M_f – відповідний циліндр відображення. Розглянемо таке відображення

$H : M_f \times [0, 1] \rightarrow M_f$, що

$H((x, t), t') = (x, t)$ для будь-якого $x \in X, t > t'$;

$H((x, t), t') = (x, t')$ для будь-якого $x \in X, t \leq t'$;

$H(y, t') = y$ для будь-якого $y \in Y \setminus f(X), t' \in [0, 1]$ і $t' \in [0, 1]$.

Тоді H є деформаційною ретракцією простору M_f на Y . Дійсно,

1. $H((x, t), 0) = (x, t)$;
2. $H(y, t') = y$;
3. $H((x, t), 1) = (x, 1) \sim f(x) \in Y$.

$\Leftarrow$: Нехай деякий простір Z може бути деформаційно ретрактнним на кожен із просторів X, Y . За Твердженням 3.3 $Z \simeq X, Z \simeq Y$. За транзитивністю відношення гомотопічної еквівалентності, $X \simeq Y$. $\square$

Лема 3.5. Якщо $X = A \times Z$, де Z – простір, стягуваний по собі в точку $p \in Z$. Тоді $A \times p$ є деформаційним ретрактом X .

Твердження 3.6. Нехай X – стягуваний простір, $A \subset X$ – його деформаційний ретракт. Тоді кожен шлях із X із кінцями в A гомотопний деякому шляху, який лежить повністю в A .

Доведення. Нехай $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ – деформаційна ретракція:

1. Для будь-якого $x \in X$ $F(x, 0) = x$;
2. $F(\cdot, 1)(X) = A$;
3. Для довільної пари $(a, t) \in A \times [0, 1]$ $F(a, t) = a$

Нехай $f : [0, 1] \rightarrow X$ – деякий шлях, для якого $f(0), f(1) \in A$. Розглянемо функцію $g(t) = F(f(t), 1)$ для кожного $t \in [0, 1]$. Зрозуміло, що g є шляхом в A , більше того, $g(0) = f(0), g(1) = f(1)$. Припустимо $G(t, s) = F(f(t), s)$ для будь-якої пари $(t, s) \in [0, 1]^2$. Тоді G є неперервним відображенням і $G(t, 0) = F(f(t), 0) = f(t)$ та $G(t, 1) = F(f(t), 1) = g(t)$, що означає, що G є гомотопією між f і g . $\square$

Твердження 3.7. Нехай X – стягуваний простір, $A \subset X$ – його ретракт. Тоді A стягуваний.

Доведення. Оскільки X стягуваний, то існує $x_0 \in X$ такий, що id_X гомотопне постійному відображенню в x_0 , тобто, існує неперервне відображення $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ таке, що

$$F(x, 0) = x, F(x, 1) = x_0.$$

Оскільки A є ретрактом, то існує неперервне відображення $r : X \rightarrow A$ таке, що $r|_A = id_A$. Припустимо, $G(x, t) = r(F(x, t))$ для будь-якої пари $(x, t) \in A \times [0, 1]$. Це відображення є неперервним, більше того, $G(x, 0) = r(F(x, 0)) = r(x) = r|_A(x) = x$ і $G(x, 1) = r(F(x, 1)) = r(x_0)$ для всіх $x \in A$. Це означає, що тотожне відображення id_A гомотопне постійному в $r(x_0)$, із чого слідує, що A стягуваний. $\square$

Твердження 3.8. *Нехай A – лінійно зв'язний деформаційний ретракт простору X . Тоді X є лінійно зв'язним.*

Доведення. Нехай F і є цією деформаційною ретракцією: $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$. Для довільних фіксованих $x_1, x_2 \in X$ розглянемо $a_1 = F(x_1, 1)$ і $a_2 = F(x_2, 1)$. Далі, припустимо $f_1(t) = F(x_1, t)$ – шлях між x_1 та a_1 , і $f_2(t) = F(x_2, 1 - t)$ – шлях між x_2 і a_2 . Оскільки підпростір A є лінійно зв'язним, то існує шлях $g : [0, 1] \rightarrow A$, $g(0) = a_1$, $g(1) = a_2$.

Визначимо неперервне відображення

$$f(t) = \begin{cases} f_1(3t), & \text{якщо } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ f_2(3t - 2), & \text{якщо } t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

f є шляхом між x_1 і x_2 , що означає, що X – лінійно зв'язний. $\square$

Твердження 3.9. *Зв'язний скінченний граф є гомотопічно еквівалентним букету кіл $\bigvee S^1$.*

Доведення. Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний скінченний топологічний граф. Побудуємо в G деяке кістякове дерево T . Тоді T є стягуваним. Вершини кожного ребра G , що не лежить у T , самі належать T . це означає, що після стягування T ми отримаємо букет кіл $\bigvee_k S^1$, де $k = |E| - |V| + 1$. $\square$

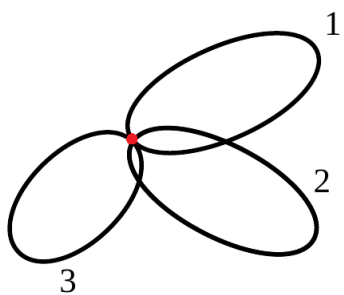
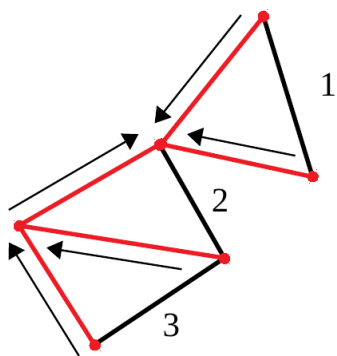
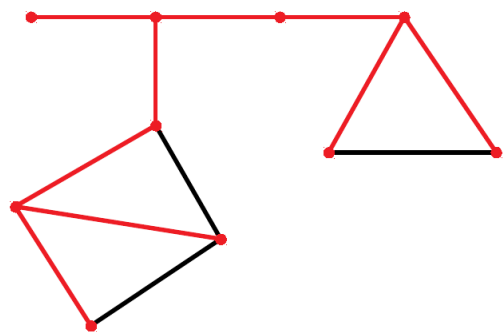
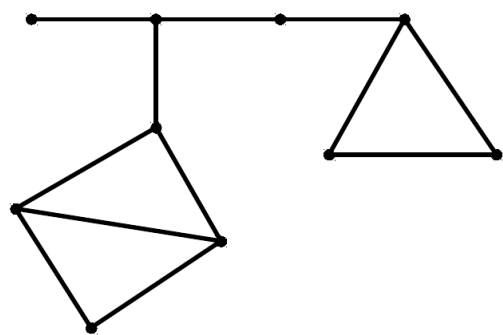


Рис. 1: Стягування графа

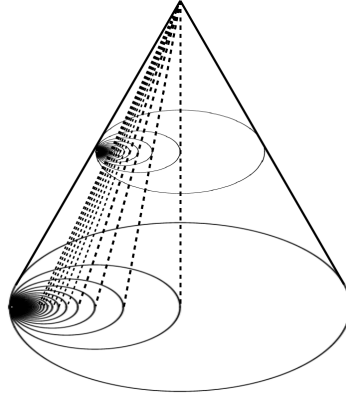
3.2 Спеціальні простори

Лема 3.10. Для топологічного простору має місце наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{локально однозв'язний} & \xleftrightarrow{(2)} & \text{однозв'язний} & \xleftarrow{(4)} & \text{стягуваний} \\
 & \searrow (1) & \downarrow (3) & & \\
 & \text{напівлокально однозв'язний} & & &
 \end{array}$$

Доведення. Доведемо по черзі кожен пункт.

- (1) Якщо простір X є локально однозв'язним, то для кожної точки x простору X для кожного елементу U його бази, що містить x , усі петлі в U є нуль-гомотопними. Оскільки ці петлі стягуються в U , то вони стягуються в X .
- (2) $\nRightarrow$: Топологічний простір $X = S^1$ є локально однозв'язним (із топологією, індукованою з $\mathbb{R}^2$), але не однозв'язним;
 $\nLeftarrow$: Розглянемо такий простір: для кожного додатного цілого числа n нехай $C_n \subset \mathbb{C}$ означає коло $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}\}$. Об'єднання $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ є топологічним простором $H \subset \mathbb{C}$, що називається *Гавайська серезка*. Для цього простору побудуємо конус $CH = (H \times [0, 1]) / (H \times 0)$:



Цей фактор-простір є однозв'язним, але не локально однозв'язним (у точці 0 на комплексній площині будь-який окіл міститиме в собі нестягнуті кола).

- (3) Очевидно, кожна точка x однозв'язного простору X має тривіальний окіл (весь простір X), у якому кожна петля стягується.

- (4) Нехай X – стягуваний простір. Це означає, що існує така точка $x_0 \in X$, що id_X є гомотопним до постійного відображення в x_0 , тобто, існує таке неперервне відображення $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$, що

$$H(x, 0) = x, H(x, 1) = x_0.$$

Тепер нехай $f : [0, 1] \rightarrow X$ є петлею в x_0 . Покладемо $G(t, s) = H(f(t), s)$ для кожної пари $(t, s) \in [0, 1]^2$. Зрозуміло, що G – неперервне. Більше того, $G(t, 1) = H(f(t), 0) = f(t)$ і $G(t, 1) = H(f(t), 1) = x_0$ для всіх $t \in [0, 1]$.

Тому кожна петля в точці x_0 є нуль-гомотопною, із чого слідує, що $\pi(X, x_0)$ є тривіальною, тобто, X є однозв'язним.

Зауважимо, що протилежне не виконується: розглянемо довільну сферу $S^n, n > 1$ – цей простір є однозв'язним, але не стягуваним.

□

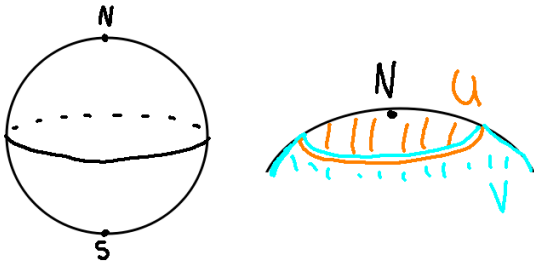
Лема 3.11. *В однозв'язному просторі для довільної пари точок x, y існує єдиний гомотопічний клас шляхів між x та y .*

Доведення. Оскільки фундаментальна група простору тривіальна, то $\beta^{-1} \cdot \alpha \in \pi_1(X, x) = \{1\} \Rightarrow \beta^{-1} \cdot \alpha \simeq \varepsilon_x \Rightarrow \beta\beta^{-1}\alpha \simeq \beta \cdot \varepsilon_x \simeq \beta \Rightarrow \alpha \simeq \beta$. □

Твердження 3.12. *Двовимірна сфера є однозв'язною.*

Доведення. Візьмемо сферу S^2 і позначимо протилежні полюси як s (південь) і n (північ), і візьмемо s за базову точку. Оскільки $S^2 \setminus \{n\}$ є гомеоморфною $\mathbb{R}^2$ за стереографічною проекцією, то якщо петля γ не проходить через n , вона є нуль-гомотопною.

Тепер нехай U є околом n , а V – відкритим околом $S^2 \setminus U$.



Оскільки прообрази $\gamma^{-1}(U)$ і $\gamma^{-1}(V)$ є колекцією відкритих інтервалів із

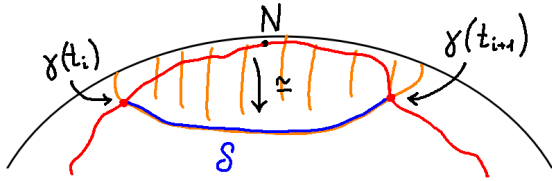
$[0, 1]$ та оскільки $[0, 1]$ є компактом, ми можемо знайти скінченне підпокриття, що тягне за собою існування таких $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < 1$, що

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U$$

або

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V$$

Тепер якщо γ проходить через n , нам необхідно знайти гомотопний шлях, який обходить n . Для кожного такого i , що $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \cap U \neq \emptyset$, ми можемо знайти такий шлях δ_i від $\gamma(t_i)$ до $\gamma(t_{i+1})$, що δ не проходить через n (бо U лінійно зв'язний).



Покладемо $\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Оскільки $\gamma_i \simeq \delta_i$, то для кожного такого i ми заміняємо γ_i на δ_i та одержуємо гомотопний до γ шлях, який не проходить через n . Із цього слідує, що γ є гомотопним постійній петлі, і отже сфера S^2 є однозв'язною. $\square$

3.3 Фактор-топологія

Означення 3.13 (Розширене означення). Неперервне сюр'єктивне відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *факторним*, якщо для нього виконується одна з двох еквівалентних умов:

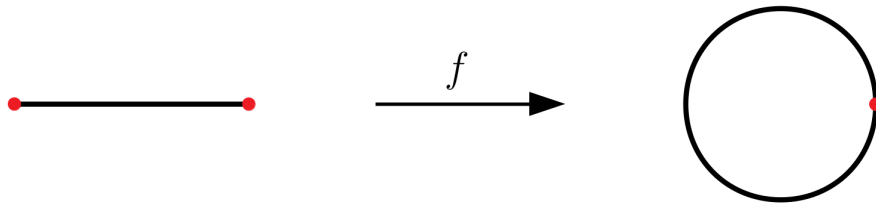
- Множина $A \subset Y$ відкрита (замкнена) в $Y \Leftrightarrow$ прообраз $f^{-1}(A)$ відкритий (замкнений) в X .
- Для будь-якого топологічного простору Z і (комутативної) діаграми

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \quad (1)$$

відображення g неперервне $\Leftrightarrow$ композиція $g \circ f$ неперервна.

- топологія на Y – найсильніша, для якої f є неперервним.

Приклад 3.14. Нехай X – одиничний відрізок, Y – одиничне коло $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $f(t) = e^{2\pi it}$ для $t \in X$.



Очевидно, f – неперервна сюр'єкція. Оскільки $[0, 1]$ – компакт, а S^1 – хаусдорфовий простір, то відображення f є замкненим, а отже, факторним.

Якщо неперервне відображення $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ таке, що $g(0) = g(1)$, то має місце наступна комутативна діаграма:

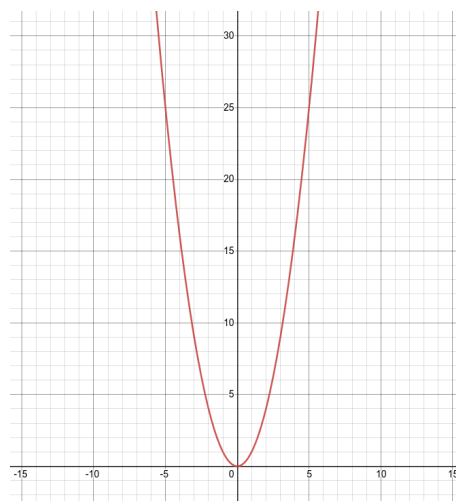
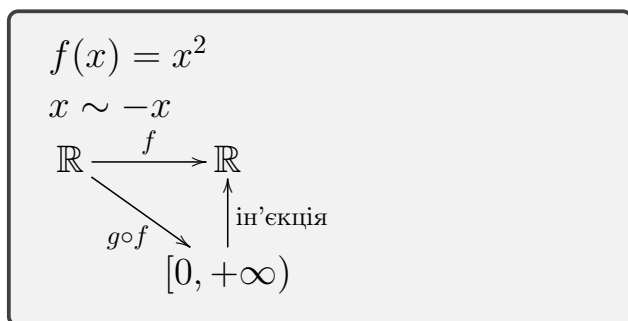
$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f} & S^1 \\ & \searrow g & \downarrow \text{неперервне} \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Тобто, вкладення відрізка в $\mathbb{R}^2$ зі склеюванням його кінців є тим самим, що вкладення кола в $\mathbb{R}^2$.

Приклад 3.15. Оскільки будь-яке абстрактне відображення з X в Y , по суті, задає відношення еквівалентності $\sim$ на X (класами еквівалентності є прообрази $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$), то завжди існує сюр'єкція з X на фактор-простір $X/\sim$ та ін'єкція з $X/\sim$ в Y .

Якщо ж $f : X \rightarrow Y$ – неперервне відображення, то на $X/\sim$ природнім чином індукується топологія: відкриті множини в $X/\sim$ ті, у яких прообраз є відкритою множиною. Тоді відображення з X на $X/\sim$ є факторним.

Нехай $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Тоді класи еквівалентності утворюватимуть пари точок вигляду a та $-a$, якщо $a \neq 0$, і окремий клас для нуля. Тобто, фактор-простором у нашому випадку буде не що інше, як $[0, +\infty)$.



Теорема 3.16. Нехай для просторів X, Y , відношення еквівалентності $\sim$ на X , неперервного відображення f та факторного відображення p має місце така комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \uparrow g \\ & & X/\sim \end{array} \quad (2)$$

Тоді якщо f факторне, то g – гомеоморфізм на образ $f(X)$.

Доведення. Як було згадано в Прикладі 3.15, g буде ін'єкцією. Окрім цього, g є неперервним, оскільки p факторне, а f неперервне (див. другу умову

Означення 3.13). Для того, щоб довести, g – потрібний нам гомеоморфізм, достатньо показати, що обернене до нього є неперервним відображенням. Для цього доведемо, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & f(X) \\ & \searrow p & \downarrow g^{-1} \\ & & X/\sim \end{array}$$

є комутативною. Оскільки g – ін'єкція, то відображення $g^{-1} : f(X) \rightarrow X/\sim$ існує. Для $x \in X$ справедлива рівність $g(g^{-1}(f(x))) = g(p(x))$, тому що $g^{-1}(g(f(x))) = f(x)$ з очевидних міркувань, і $g(p(x)) = f(x)$, оскільки діаграма 2 комутативна. Із цього слідує, що $g^{-1}(f(x)) = p(x)$ в силу ін'єктивності g . $\square$

Наслідок 3.17. Для діаграми 1 справедливо наступне: відображення $g \circ f$ факторне $\Leftrightarrow g$ факторне.

Нехай (X, τ) – топологічний простір, $\{U_i\}$ – покриття X (тобто, $\bigcup_i U_i = X$). Нехай для кожного i задано неперервне відображення $f_i : U_i \rightarrow Y$ таке, що $f_i = f_j$ на $U_i \cap U_j$. Тоді маємо коректно визначене відображення $f : X \rightarrow Y$:

$$f(x) = f_i(x) \text{ , якщо } x \in U_i.$$

Лема 3.18. Для відкритих покриттів $\{U_i\}$ відображення f буде неперервним.

Доведення. Нехай $V \in Y$ – відкрита множина. Покажемо, що $f^{-1}(V)$ – відкрита в X . Зауважимо, що $f^{-1}(V) = \bigcup_i f_i^{-1}(V)$. А кожна з $f_i^{-1}(V)$ є відкритою в U_i в силу неперервності f_i . Оскільки кожна з U_i є відкритою в X , то і кожна з $f_i^{-1}(V)$ є відкритою в X . Отже, $f^{-1}(V)$ – відкрита як об'єднання відкритих множин. $\square$

Теорема 3.19. Нехай X – простір Александрова (див. 3.29). Тоді існує таке фактор-відображення $q_X : X \rightarrow X'$, що

1. q_X є гомотопічною еквівалентністю;
2. X' є простором Александрова і T_0 ;

3. Для кожного неперервного відображення $f : X \rightarrow Y$ між двома просторами Александрова існує єдине неперервне відображення $f' : X' \rightarrow Y'$ між їхніми факторами таке, що $q_Y f = f' q_X$.

Доведення. Введемо відношення еквівалентності на X так: скажемо, що $x \sim y, x, y \in X$, якщо їхні мінімальні околи збігаються. Нехай $X' = X/\sim$, і $q := q_X : X \rightarrow X'$ – факторне відображення. Легко бачити, що довільний фактор-простір простору Александрова також є простором Александрова. Така структура на X' задає таке ж, як і на X , відношення еквівалентності: якщо $x, y \in X$, то $q(x) \leq q(y) \leftrightarrow x \leq y$ (найменший окіл довільного x під дією відображення q переходить у найменший окіл $q(x)$; якщо $q(x) \leq q(y)$, то $q(x) \in q(U_y)$ і для $z \in U_y : x \leq z \leq y$, $q(x) = q(z)$, а навпаки виконується внаслідок неперервності q).

Доведемо, що q є гомотопічною еквівалентністю. Нехай $p : X' \rightarrow X$ – деяке обернене до q відображення ($qp = id_{X'}$). Оскільки p також зберігає частковий порядок, то воно є неперервним. Покажемо, що відображення $r := pq : X \rightarrow X$ гомотопне id_X . Оскільки $qr(x) = qpq(x) = q(x)$, то для кожного $x \in X$ має місце $U_{r(x)} = U_x$. Визначимо родину відображень $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ так:

$$F(x, t) = \begin{cases} x, & t < 1, \\ r(x), & t = 1. \end{cases}$$

Щоб показати, що F неперервне, візьмемо $(x, s) \in X \times [0, 1]$. Тоді $U_x \times [0, 1]$ є околом (x, s) , який відображається у $U_{F(x,s)}$. За щойно доведеним, $U_{F(x,s)} = U_x$. Тепер візьмемо довільну пару $(y, t) \in U_x \times [0, 1]$. Якщо $t < 1$, то $F(y, t) = y \in U_x$. Якщо $t = 1$, то $F(y, t) = r(y) \in U_{r(y)} = U_y \subset U_x$.

Щоб довести пункт 3, зафіксуємо довільне неперервне відображення $f : X \rightarrow Y$ між двома просторами Александрова. Оскільки воно зберігає порядок, то воно відображає еквівалентні точки за q_X в еквівалентні за q_Y . Отже, існує єдине відображення $f' : X' \rightarrow Y'$ таке, що $f' q_X = q_Y f$. Оскільки q_X – факторне, то f' – неперервне. $\square$

Означення 3.20. Для $F : X \rightarrow Y$ ми говоримо, що F породжує фактор, якщо $\exists \bar{F} : X/\sim \rightarrow Y$ таке, що $F = \bar{F} \circ q$.

Це відбувається тоді й лише тоді, коли звуження F на клас еквівалентності є постійним відображенням.

Лема 3.21. Нехай $F : X \rightarrow Y$ – неперервне відображення, що породжує фактор. Тоді відображення $\bar{F} : X/\sim \rightarrow Y$ є неперервним за відношенням до фактор-топології.

Навпаки, маючи неперервне відображення $G : X/\sim \rightarrow Y$, композиція $F = G \circ q$ є неперервним відображенням з X в Y , що породжує відображення $\bar{F} = G$ на факторі.

Доведення. Навпаки є правдою, бо F є композицією неперервних відображень.

Якщо F є неперервним відображенням, що породжує фактор, то маючи відкриту множину $V \subset Y$, її прообраз $\bar{F}^{-1}(V)$ є відкритим у факторній топології на $X/\sim$ тоді й лише тоді, коли $q^{-1}(\bar{F}(V))$ є відкритим у X (за означенням фактор-топології). Але $q^{-1} \circ \bar{F}^{-1} = (\bar{F} \circ q)^{-1} = F^{-1}$, оскільки $F = \bar{F} \circ q$. Але $F^{-1}(V)$ є відкритим, бо F неперервне. $\square$

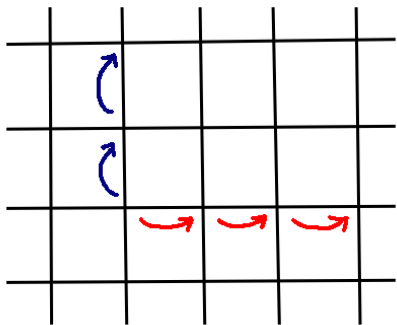
Означення 3.22. Дія групи G на множині X – це гомоморфізм ρ з групи G в симетричну групу $Sym(X)$.

Приклад 3.23. Симетрична група трикутника D_3 діє на вершинах $\{1, 2, 3\}$. $\rho(\text{reflection}) = (23)$, $\rho(120^\circ \text{rotation}) = (123)$.

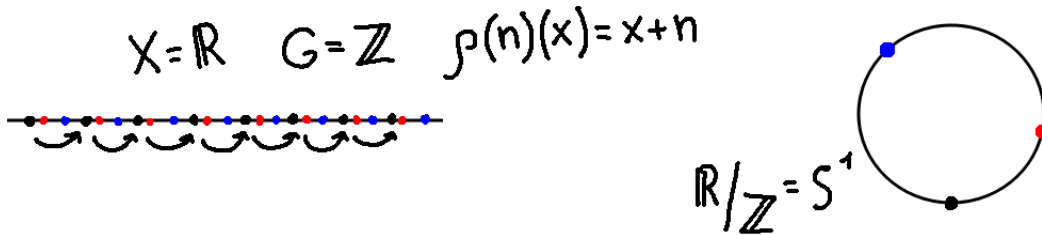
Означення 3.24. Неперервна дія групи G – це гомоморфізм $\rho : G \rightarrow Sym(X)$, де X – топологічний простір і кожен $\rho(g)$ є гомеоморфізмом X .

Приклад 3.25. $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, $\rho(0) = \text{id}$, $\rho(n)(x) = x + n$.

Приклад 3.26. $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}^2$, і ми бачимо, що $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ діє шляхом перенесення 1 в напрямку x , і $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ діє шляхом перенесення 1 в напрямку y і кожна комбінація цих рухів залишається в групі.



Зауваження 3.27. Маючи дію групи G на X , ми маємо відношення еквівалентності $\sim$ таке, що $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$. Як ілюстрація, у Прикладі 3.25 класи еквівалентності утворюють точки, що знаходяться одна відносно одної на відстані 1. Отже, фактор-простір X/G цього прикладу – коло.



Також, не є несподіванкою, що для Прикладу 3.26 фактор-простір – це $S^1 \times S^1 = T^2$ тор.

Лема 3.28. Нехай X – топологічний простір, G – група, що діє неперервно на X . Тоді $q : X \rightarrow X/G$ є відкритим.

Доведення. Нехай $U \subset X$ – відкрита множина. Її образ $q(U)$ є відкритим тоді й лише тоді, коли його прообраз $q^{-1}(q(U))$ є відкритим в X . Але $q^{-1}(q(U))$ складається з усіх таких точок $x \in X$, що $\exists g \in G : gx \in U$, тобто, $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$ і оскільки g діє як гомеоморфізм, $g(U)$ є відкритими $\forall g$, і отже $q^{-1}(q(U))$ є відкритим як об'єднання відкритих множин. $\square$

3.4 Характеризації топологічних просторів

Означення 3.29. Топологічний простір називається

- *екстремально незв’язним*, якщо замикання кожної його відкритої множини також є відкритим;
- *сильно нерозкладним*, якщо кожен його відкритий підпростір нерозкладний (не може бути представлений як диз’юнктне об’єднання двох всюди щільних множин);
- *nodcs-* (або *nd-*) *простором*, якщо кожна його ніде не щільна множина є замкненою;
- *ретрактним*, якщо кожна його замкнена множина є його ретрактом;
- *лінделььфовим*, якщо кожне його відкрите покриття містить зліченне підпокриття;
- *простором Александрова*, якщо перетин довільної кількості його відкритих множин є відкритою множиною.

Означення 3.30. *Компактифікацією* простору X називається пара (Y, f) , де Y – компактний простір, а $f : X \rightarrow Y$ – неперервна ін’єкція (вкладення) така, що $f(X)$ всюди щільна в Y .

Означення 3.31. Нехай X –простір. Розглянемо відображення “обчислення в точці” $F : X \rightarrow [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$, де $F(x)(f) = f(x) \forall f \in C(X, [0, 1])$. Тоді F є гомеоморфізмом X на образ $F(X)$. Оскільки $[0, 1]$ – компакт, то $[0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ теж компакт (за теоремою Тихонова). Відповідно, замикання $\text{Cl}(F(x))$ є компактом. Очевидно, що $F(x)$ – всюди щільна в $\text{Cl}(F(x))$, отже, пара $(F(X), F)$ є компактифікацією простору X , яка називається *компактифікацією Стоуна-Чеха*.

У випадку дискретних просторів є зручний опис ретрактів їхньої Стоун-Чехівської компактифікації.

Теорема 3.32. [20] *Топологічний простір є ретрактом Стоун-Чехівської компактифікації дискретного простору тоді й лише тоді, коли він є компактним, хаусдорфовим (T_2) та екстремально незв’язним.*

Нами було отримано [6] іншу характеристизацію екстремально незв'язних просторів (а також сильно нерозкладних) у загальному випадку через множини комутування топологічних операторів Cl , Int :

Твердження 3.33. *Топологічний простір X є екстремально незв'язним тоді й лише тоді, коли оператори Cl , Int комутують на кожній його відкритій множині.*

Доведення. Якщо X – екстремально незв'язний, то для кожної відкритої множини $A \subset X$ виконано $\text{Int}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A = \text{Cl}(\text{Int } A)$. Навпаки, якщо для відкритої множини A має місце рівність $\text{Int}(\text{Cl } A) = \text{Cl}(\text{Int } A)$, то $\text{Cl } A = \text{Int}(\text{Cl } A)$. Тобто, $\text{Cl } A$ є відкритою множиною, і X є екстремально незв'язним. $\square$

Твердження 3.34. *Топологічний простір X є сильно нерозкладним тоді й лише тоді, коли оператори Cl , Int комутують на кожній його ніде не щільній множині.*

Доведення. Для кожної множини $A \subset X$ з порожньою внутрішністю рівність $\text{Int}(\text{Cl } A) = \emptyset = \text{Int } A = \text{Cl}(\text{Int } A)$ має місце тоді й лише тоді, коли A є ніде не щільною. $\square$

Таким чином, топологічний простір X є екстремально незв'язним та сильно нерозкладним тоді й лише тоді, коли оператори Cl , Int комутують на кожній множині X .

Наступна лема показує зв'язок між загальною та алгебраїчною топологією.

Лема 3.35. [18] *Ліндельфовий nd -простір є ретрактним.*

У наших тезах було також отримано характеристизацію nd -просторів. Щоб її представити, сформулюємо важливу теорему.

Теорема 3.36. [6] *Оператори Cl , $*$ комутують на симетричній різниці $B \Delta C$ відкрито-замкненої B та ніде не щільної множини C тоді й лише тоді, коли перетин $B \cap C$ замкнений.*

Твердження 3.37. *Топологічний простір є nd -простором тоді й лише тоді, коли кожна множина комутування операторів Cl , Int є множиною комутування операторів Cl , $*$.*

3.5 Простір неперервних відображень $C(X, Y)$

Означення 3.38. Нехай X та Y – топологічні простори. Сукупність усіх неперервних відображень із X в Y утворюють простір, який позначається так: $C(X, Y)$.

Теорема 3.39. Відношення гомотопності відображень є відношенням еквівалентності на $C(X, Y)$.

Доведення. Покажемо, що це відношення є рефлексивним, симетричним та транзитивним. Очевидно, що відображення $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$, $H(x, t) = f(x)$ є гомотопією між f та f . Далі, нехай $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ – гомотопія $f \simeq g$. Тоді відображення $G : X \times [0, 1] \rightarrow X$ таке, що $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ є гомотопією $g \simeq f$.

Для доведення транзитивності нехай $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ – гомотопія $f \simeq g$, $G : X \times [0, 1] \rightarrow X$ – гомотопія $g \simeq h$. Тоді відображення $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$, таке, що

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , \text{ якщо } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(x, 2t - 1) & , \text{ якщо } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

є гомотопією $f \simeq h$. □

Лема 3.40. Якщо X, T – топологічні простори, що задовольняють першу аксіому зліченності (кожна точка простору має не більш ніж зліченну базу околів), а Y – довільний простір, тоді відображення $h : X \times T \rightarrow Y$ неперервне тоді й лише тоді, коли відображення $h^* : T \rightarrow C(X, Y)$, де $h^*(t)(x) = h(x, t)$, є неперервним.

Наслідок 3.41. Якщо простір X задовольняє першу аксіому зліченності, а Y – довільний простір, то класи гомотопності відображень з $C(X, Y)$ є класами лінійної зв'язності відносно компактно-відкритої топології.

На довільному топологічному просторі X можна ввести передпорядок $(X, \leq)$, такий, що $x \leq y \Leftrightarrow y \in \text{Cl}(\{x\})$.

На просторі $C(X, Y)$, де X – довільний простір, а Y – простір Алєксандрова, введемо порядок $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \forall x \in X$.

Твердження 3.42. *Нехай X – довільний простір, Y – простір Алєксандрова. Тоді перетин усіх відкритих множин в $C(X, Y)$, що містять відображення f , дорівнює нижньому конусу*

$$f \downarrow = \{g \in C(X, Y) : g \leq f\}.$$

Доведення. Нехай V_f – перетин усіх відкритих в $C(X, Y)$ множин, що містять відображення f . Нехай $K \subset X$ – компакт, $U \subset Y$ – відкрита множина, покладемо $(K, U) = \{g \in C(X, Y) \mid g(K) \subset U\}$. Якщо $g \in V_f, x \in X$, а $U_{f(x)}$ – перетин усіх відкритих в Y множин, що містять $f(x)$, то

$$\begin{cases} f \in (\{x\}, U_{f(x)}) \\ g \in (\{x\}, U_{f(x)}) \end{cases} \quad \text{тобто } g(x) \in U_{f(x)}$$

Тому $g(x) \leq f(x) \forall x \in X$, тобто, $g \in f \downarrow$.

Множини (K, U) утворюють передбазу компактно-відкритої топології на $C(X, Y)$. Якщо $g \in f \downarrow$ і $f \in (K, U)$, тоді $\forall x \in K \ f(x) \in U$. Тоді $g(x) \in U_{f(x)}$. Оскільки U відкрита та містить $f(x)$, то вона містить і $U_{f(x)}$. Тому $g(x) \in U \forall x \in K$, тобто $g \in (K, U)$. Отже, g належить усім відкритим множинам, які містять f , тобто $g \in V_f$. $\square$

4 Фундаментальна група

4.1 Загальні твердження

Теорема 4.1. *Нехай $p : [0, 1] \rightarrow X$ – шлях, $p(0) = x_0, p(1) = x_1$. Тоді відображення $f_p : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ таке, що $f_p([\alpha]) = [p^{-1} \cdot \alpha \cdot p]$, є ізоморфізмом.*

Доведення. Це відображення є коректно визначеним: якщо α_s – гомотопія петель $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1$, то $p^{-1} \cdot \alpha \cdot p$ є гомотопією між $f_p([\alpha_0])$ та $f_p([\alpha_1])$. Отже, $f_p([\alpha])$ не залежить від вибору конкретного α всередині його гомотопічного класу.

Далі покажемо, що f_p є гомоморфізмом. Для цього візьмемо дві петлі α, β в точці x і розпишемо:

$$f_p([\alpha]) \cdot f_p([\beta]) = [p^{-1}\alpha p][p^{-1}\beta p] = [p^{-1}\alpha\beta p] = f_p([\alpha \cdot \beta]).$$

Отже, відображення зберігає операцію конкатенації, а також нейтральний елемент – постійне відображення:

$$f_p([\varepsilon]) = [p^{-1}\varepsilon p] = [p^{-1}p] = [\varepsilon].$$

І насамкінець доведемо, що f_p є оборотним, а отже, ізоморфізмом. Розглянемо відображення $f_{p^{-1}}$:

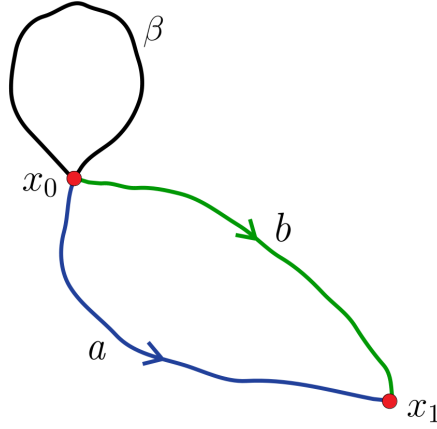
$$f_{p^{-1}}(f_p([\alpha])) = f_{p^{-1}}([p^{-1}\alpha p]) = [p(p^{-1}\alpha p)p^{-1}] = [\alpha].$$

Отже, оберненим відображенням до f_p є $f_{p^{-1}}$.

Відображення f_p називається *гомоморфізмом зміни базової точки* $\square$

Теорема 4.2. *Нехай X – лінійно зв'язний топологічний простір. Тоді $\pi_1(X)$ є абелевою тоді й лише тоді, коли для всіх шляхів p_1, p_2 з $p_1(0) = p_2(0)$ і $p_1(1) = p_2(1)$ існує гомоморфізм зміни базової точки f_p (іншими словами, кожен гомоморфізм зміни базової точки f_p залежить лише від кінців шляху p).*

Доведення. $\Rightarrow$: Припустимо $\pi_1(X)$ є абелевою. Розглянемо петлю β в точці x_0 , і нехай $a, b : [0, 1] \rightarrow X$ – два різні шляхи, що мають спільні початки й кінці: $a(0) = b(0) = x_0, a(1) = b(1) = x_1 \neq x_0$. Тоді $f_a[\beta] = [a \cdot \beta \cdot a^{-1}]$ і $f_b[\beta] = [b \cdot \beta \cdot b^{-1}]$.



Отже,

$$[a^{-1}] \cdot f_a[\beta] \cdot [a] = [a^{-1}] \cdot [a \cdot \beta \cdot a^{-1}] \cdot [a] = [a^{-1} \cdot a \cdot \beta \cdot a^{-1} \cdot a] = [\beta]$$

$$[b^{-1}] \cdot f_b[\beta] \cdot [b] = [b^{-1}] \cdot [b \cdot \beta \cdot b^{-1}] \cdot [b] = [b^{-1} \cdot b \cdot \beta \cdot b^{-1} \cdot b] = [\beta]$$

із чого слідує

$$[a] \cdot f_a[\beta] \cdot [a^{-1}] = [b] \cdot f_b[\beta] \cdot [b^{-1}]$$

$$f_a[\beta] = [a^{-1} \cdot b] \cdot f_b[\beta] \cdot [b^{-1} \cdot a]$$

Але $a^{-1} \cdot b$ і $b^{-1} \cdot a$ – це петлі, тому

$$f_a[\beta] = [a^{-1} \cdot b] \cdot f_b[\beta] \cdot [b^{-1} \cdot a] = f_b[\beta] \cdot [a^{-1} \cdot b] \cdot [b^{-1} \cdot a] = f_b[\beta]$$

що означає, що якщо деякі гомоморфізми зміни базової точки мають спільні кінці, то вони збігаються. Отже, якщо $\pi_1(X)$ є абелевою, то f_p залежить лише від кінців p .

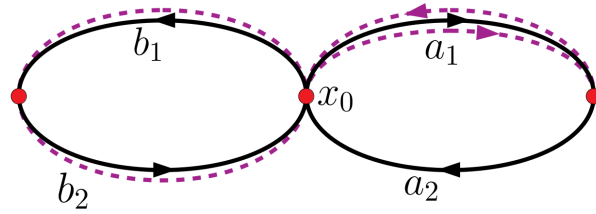
$\Leftarrow$: Тепер припустимо, що гомоморфізм зміни базової точки f_p залежить лише від кінців p . Нехай a і b – дві непостійні петлі в x_0 . Зрозуміло, що ці петлі можуть бути представлені як конкатенації своїх половинок:

$$a = a_2 \cdot a_1, \quad a_1(t) = a\left(\frac{t}{2}\right), \quad a_2(t) = a\left(\frac{1+t}{2}\right)$$

$$b = b_2 \cdot b_1, \quad b_1(t) = b\left(\frac{t}{2}\right), \quad b_2(t) = b\left(\frac{1+t}{2}\right)$$

За припущенням, що $f_{a_1}[b] = f_{a_2^{-1}}[b]$ маємо:

$$[a_1 \cdot b \cdot a_1^{-1}] = [a_2^{-1} \cdot b \cdot a_2]$$



Помноживши на $[a_2]$ зліва та $[a_1]$ справа, маємо:

$$[a_2] \cdot [a_1 \cdot b \cdot a_1^{-1}] \cdot [a_1] = [a_2] \cdot [a_2^{-1} \cdot b \cdot a_2] \cdot [a_1]$$

$$[a_2 \cdot a_1 \cdot b] = [b \cdot a_2 \cdot a_1]$$

$$[a \cdot b] = [b \cdot a]$$

тобто, $\pi_1(X)$ абелева.

□

Твердження 4.3. [14] *Фундаментальна група кола в $\mathbb{C}$ ізоморфна $\mathbb{Z}$.*

4.2 Теорема Ван Кампена для обчислення фундаментальних груп

Означення 4.4. Вільним добутком двох груп G і H називається група $G * H$, класи еквівалентності якої – це слова, складені з літер, що вибрані з диз'юнктного об'єднання $G \sqcup H$, де відношення еквівалентності є **скінченно породженим** $a * b \sim ab$ для a, b , що водночас із G або з H . Нейтральний елемент є порожнім словом. Груповою операцією є склейка, зіставлення. Кожне слово має бути *редукованим* за допомогою таких операцій:

1. прибирання нейтрального елемента: $a1b = ab$;
2. заміна ab на їхній добуток, якщо ці обидва елементи належать одній групі (G чи H).

Означення 4.5. Нехай G і H – групи, $G * H$ – їхній вільний добуток. Нехай F – деяка група, і $\varphi : F \rightarrow G$, $\psi : F \rightarrow H$ – гомоморфізми з неї в G і H відповідно. Вільний добуток з амальгамацією – це група $G * H$, яка будується як вільний добуток G і H плюс ще одна операція редукування:

$$\varphi(f)\psi(f)^{-1} = 1$$

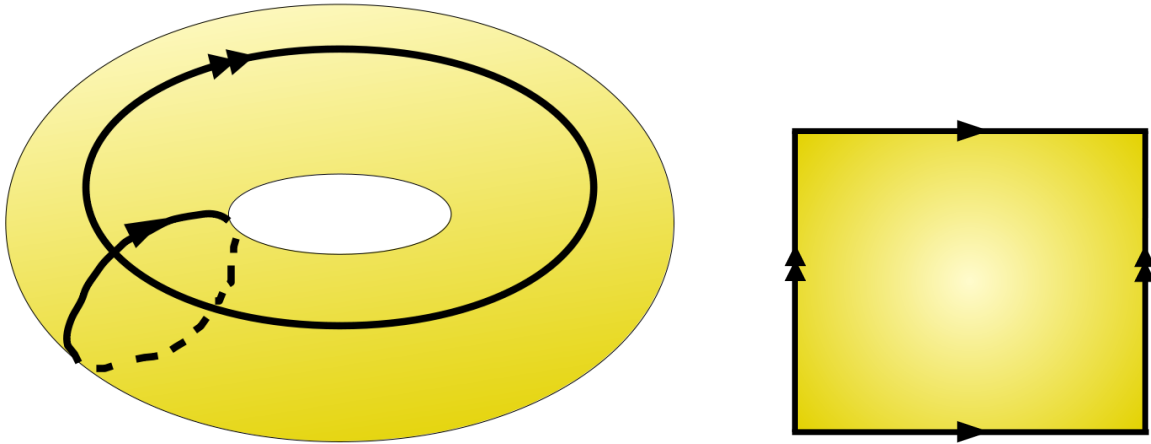
для всіх f із F .

Наступна теорема використовується для визначення фундаментальної групи простору X , який може бути представленим у вигляді об'єднання $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ відкритих множин, знаючи фундаментальні групи кожної U_{α} і $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$. Формулювання та доведення теореми Ван Кампена було дано в [13].

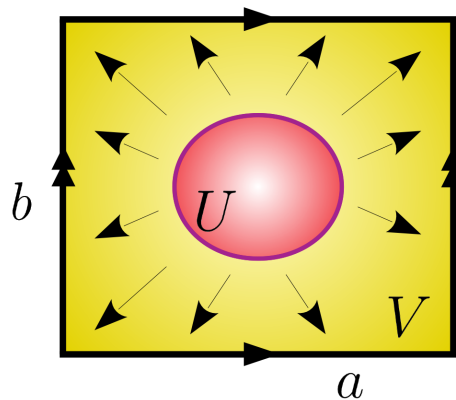
Теорема 4.6 (Ван Кампен [13]). *Якщо $X = U_1 \cup U_2$, де U_i – відкрита та лінійно зв'язна, і $U_1 \cap U_2$ – лінійно зв'язна, тоді $\pi_1(X)$ ізоморфна $\pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2)} \pi_1(U_2)$.*

Приклад 4.7. Обчислимо фундаментальну групу тора T^2 , використовуючи теорему Ван Кампена.

Для цього згадаємо, що тор є фактор-простором квадрата, із ототожненими сторонами.



Щоб застосувати теорему Ван Кампена, необхідно знайти відкриті множини, фундаментальні групи яких ми знаємо, на які ми розіб'ємо наш топологічний простір. Виріжемо з квадрата диск, це буде множина U . Нехай усе інше, із невеликим зазором на U , назовемо V . Бачимо, що U стягуваний, $\pi_1(U) = \{1\}$, а $\pi_1(V) = \langle a, b \rangle$, оскільки V деформується на сторони квадрата, які в свою чергу формують букет із двох кіл.



Тобто, V є ні чим іншим, як букетом двох кіл.

А перетин $U \cap V$ еквівалентний до кола, тому його фундаментальна група також буде ізоморфна $\mathbb{Z}$, позначимо її як $\pi_1(U \cap V) = \langle c \rangle$. Маємо комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V) = \langle c \rangle & \xrightarrow{f} & \pi_1(U) = \{1\} \\ g \downarrow & & \\ \pi_1(V) = \langle a, b \rangle & & \end{array}$$

Із якої отримуємо:

$$f(c) = 1.$$

На даний момент ми маємо лише твірні елементи для π_1 – це a і b . Щоб дізнатися відношення, необхідно обрахувати $g(c)$. Із зображення бачимо, що межа (рожевого кольору), яка представляє наш перетин $U \cap V$, також розтягується на сторони квадрата, отже, обхід по сторонах і дасть нам шукане відношення:

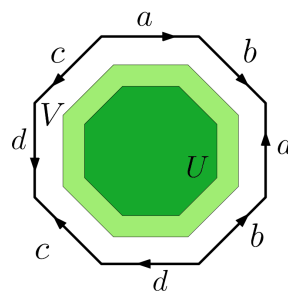
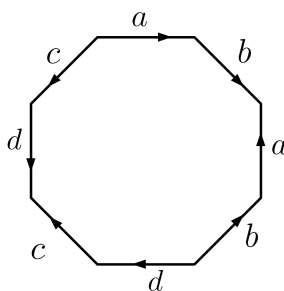
$$f(c) = aba^{-1}b^{-1}.$$

Отже, фундаментальна група тора така:

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle.$$

Цей приклад узагальнюється на тори з більшою кількістю “дірок”. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 4.8. Нехай X – поверхня роду g (грубо кажучи, тор із g дірками, g -складений тор), де $g = 2$. Аналогічно до попереднього прикладу, він є восьмикутником із попарно ототожненими орієнтованими ребрами, як показано на другому рисунку.



Щоб отримати фундаментальну групу цього тора із многокутника, застосуємо теорему Ван Кампена, представивши X у вигляді об'єднання двох відкритих множин U і V (третій рисунок: зелена область – U , біла область – V , а салатова – їхній перетин). Аналогічно до попереднього, U є стягуваним, тому $\pi_1(U) = \{1\}$, а $\pi_1(V) = \langle a, b, c, d \rangle$, оскільки V може бути продеформована в сторони восьмикутника, які в свою чергу формують букет із чотирьох кіл. Оскільки цикл, що породжує $\pi_1(U \cap V)$ є $aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1}$, то $\pi_1(X)$ є вільною групою, породженою чотирма елементами a, b, c, d профакторизованою за нормальною підгрупою, породженою $aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1}$.

Отже, узагальнення для поверхні роду g звучить так: твірні елементи для π_1 – це $a_1, b_1, a_2, \dots, a_g, b_g$, а відношення таке: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1$

4.3 Фундаментальна група CW-комплекса

Означення 4.9. Довільний n -вимірний диск називається n -клітиною.

Означення 4.10. Неперервне відображення називається *склейкою* (приєднанням), якщо воно формує фактор-простір $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim$.

Означення 4.11. CW-комплексом називається топологічний простір, утворений із менших просторів шляхом індуктивного процесу приєднання клітин за їхніми сферичними границями.

Топологія CW-комплекса є фактор-топологією, породженою відображенням склейки.

Говорячи про гомотопічні властивості топологічних просторів, не можна обійти увагою теорему Уайтхеда:

Теорема 4.12 (Уайтхед, 1949). *Відображення між CW-комплексами є гомотопічною еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли воно індукує ізоморфізм між усіма фундаментальними групами.*

Як наслідок із Теорема 4.6 наступна теорема, за допомогою якої ми зможемо одержувати фундаментальні групи CW-комплексів будь-якої розмірності.

Теорема 4.13. *Якщо X – CW-комплекс, то $\pi_1(X) = \langle g_k \mid \partial e_t = 1 \rangle$, де g_k – твірний елемент k -ї 1-клітини, а ∂e_t – границя t -ї 2-клітини, що визначається як петля в 1-кістяку, яку ми можемо написати як слово із 1-клітин.*

Доведення. Нехай X^1 – 1-кістяк: $X^1 \simeq \bigvee_{1\text{-cells}} S^1$. Застосувавши Теорему 4.6, ми бачимо, що букет із двох кіл дає вільну групу із двома твірними елементами $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$. За індукцією, $\pi_1(X^1) = \bigast_{1\text{-cells}} \mathbb{Z}$, отже, ми маємо n твірних для n 1-клітин відповідно.

Якщо Y – деякий простір, і Z отриманий із Y шляхом приєднання 2-клітини e , то як виглядатиме $\pi_1(Z)$?

Нехай $Z = U \cup V$, де $U = \text{Int}(e)$, $V = Y \cup (e \setminus \{0\})$ і 0 є центром e . Легко бачити, що $U \cap V = \text{Int}(e) \setminus \{0\} \simeq S^1$. U є сама по собі стягуваною, а $V \simeq Y$,

тому що всі точки $e \setminus \{0\}$ можуть бути ретрактнуті на Y . Отже, застосувавши Теорему 4.6, ми отримуємо $\pi_1(Z) = \pi_1(V) * \pi_1(U) = \pi_1(Y) * \{1\}$, бо $\pi_1(V \cap U) = \mathbb{Z}$, із чого слідує, що границя цієї 2-клітини e є стягнутою в Z , отже, нове відношення об'єднання саме таке: $\partial(e) = 1$.

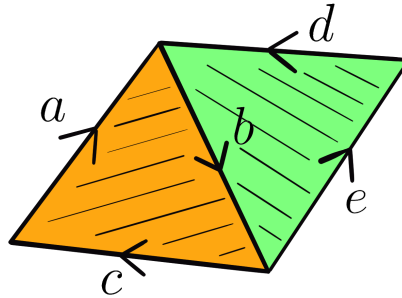
Якщо Z одержаний з Y шляхом приєднання n -клітини ($n > 2$), то Теорема 4.6 говорить, що $\pi_1(Z) = \pi_1(Y) * \{1\}$, і оскільки сфера S^{n-1} є однозв'язною, нам не потрібно більше відношень. $\square$

На наступному прикладі бачимо, що фундаментальна група тора обчислюється швидше, якщо розглядати його як CW-комплекс.

Приклад 4.14. Тор є CW-комплексом $(S^1 \vee S^1) \cup D^1$, тому можемо обчислити його фундаментальну групу іншим способом. Маємо для кожної 1-клітини по елементу – твірні a і b , тепер залишились відношення. Їх ми одержуємо, написавши границю єдиної 2-клітини як слово з 1-клітин так, як диск був “приклеєний” до кістяка: $aba^{-1}b^{-1}$.

Тому $\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$.

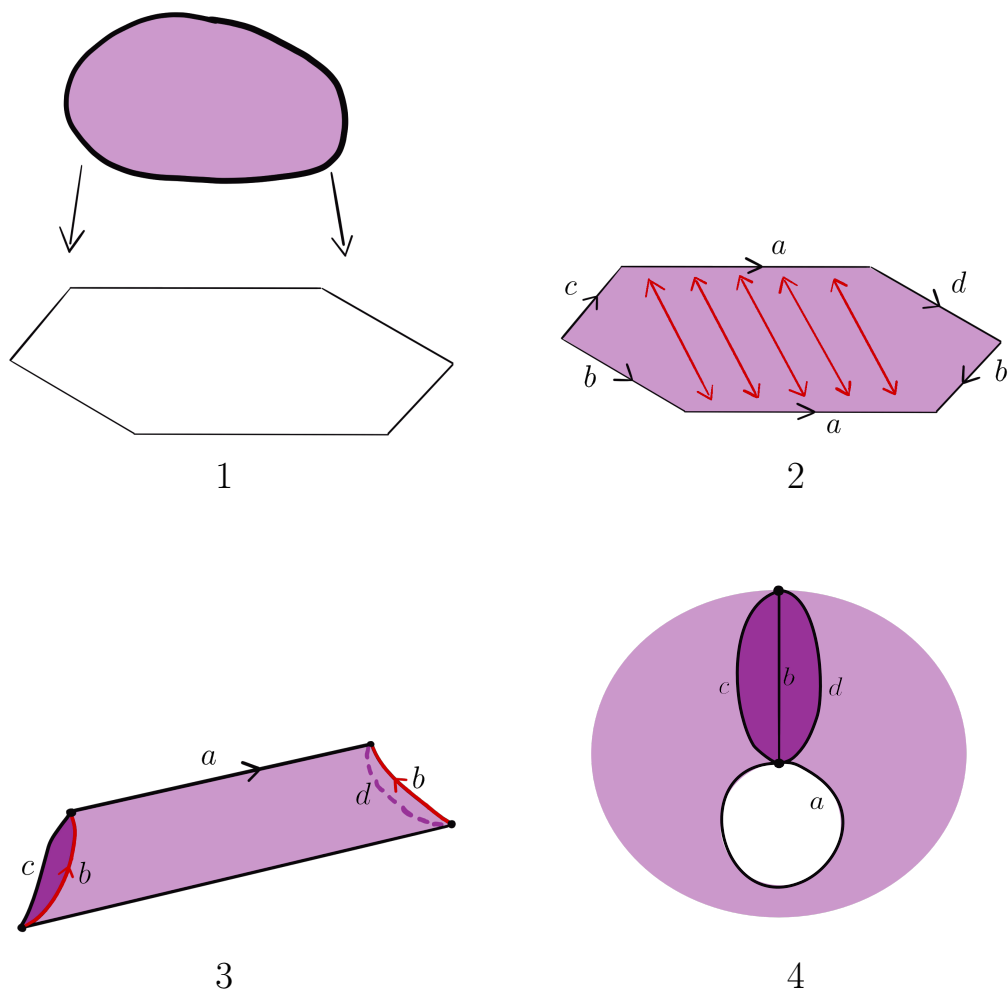
Приклад 4.15. Розглянемо простенький комплекс, утворений шляхом приклеювання двох D^2 -дисків до 1-кістяка – двох трикутників зі спільною стороною:



За теоремою Ван Кампена, фундаментальна група такого простору буде такою:

$$\pi_1(X) = \langle a, b, c, d, e \mid abc = 1, bed = 1 \rangle.$$

Приклад 4.16. Тепер розглянемо складніший простір. Продемонструємо приклеювання диска до 1-кістяка:



За теоремою Ван Кампена, фундаментальна група такого простору буде такою:

$$\pi_1(X) = \langle a, b, c, d \mid adba^{-1}b^{-1}c = 1 \rangle .$$

5 Фундаментальні групи скінченних CW-комплексів

5.1 Обчислення фундаментальної групи симпліціального комплексу

Розглянемо такий клас просторів як *симпліціальні комплекси*.

Означення 5.1. Нехай $k, n \in \mathbb{N}$, $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ – лінійно незалежні. Симплексом $\Delta(v_0, \dots, v_k)$, натягнутим на $v_0, \dots, v_k$, називається опукла оболонка точок $v_0, \dots, v_k$: $\Delta(v_0, \dots, v_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^k a_i v_i, \sum_{i=0}^k a_i = 1, a_i \geq 0\}$. Число k називається *розмірністю* симплексу, $v_0, \dots, v_k$ – *вершинами*. Симплекси, натягнуті на підмножину $\{v_0, \dots, v_k\}$ називаються *гранями* симплексу $\Delta(v_0, \dots, v_k)$.

Означення 5.2. Симпліціальний комплекс – це скінченний набір симплексів, у якому будь-які два симплекси перетинаються по спільній грані або не перетинаються взагалі.

Симпліціальний комплекс завжди гомеоморфний деякому CW-комплексу, тому ми вирішили розглянути, як саме можна узагальнити й фізично обчислювати фундаментальні групи таких просторів. Нами було створено алгоритм, що дозволяє робити це для симпліціальних комплексів довільної скінченної розмірності. Наведемо приклад застосування його для обчислення фундаментальної групи тривимірного симпліціального комплексу.

Нехай у нас є тривимірний симпліціальний комплекс X , який водночас є і CW-комплексом розмірності 3. У Теоремі 4.13 було показано, що фундаментальна група залежатиме лише від 1-кістяка X^1 , що дасть нам твірні елементи, і від 2-кістяка X^2 , що дасть нам відношення. Очевидно, що $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subset X^3$, де X^k отриманий шляхом приєднання k -клітин до кістяка X^{k-1} . Алгоритм починається з X , що по суті є X^3 .

Algorithm 1: Алгоритм отримання кістяків

Result: Знайдено 1-клітини

1. Кладемо X^0, X^1, X^2 порожніми множинами, будемо їх заповнювати далі;
2. Зауважимо, що $X^3 = X^2 \cup \{\sigma_1^3, \sigma_2^3, \dots, \sigma_{n_3}^3\}$, де σ_i^3 – це 3-клітина. Нехай Δ^3 – тетраедр в X , тоді Δ^3 має належати деякій 3-клітині σ_i^3 . Ми з'єднуємо всі тетраедри, що мають спільну грань, в одну велику 3-клітину, і робимо це, поки не вичерпаються всі тетраедри чи ця 3-клітина не зможе більше розширитися. Тоді те, що ми отримали, буде σ_i^3 ;
3. Обираємо тетраедр із $X \setminus \sigma_i^3$ і процедурою, описаною в попередньому кроці, одержуємо наступну 3-клітину, і так далі, поки не вичерпаються всі тетраедри. Те, що залишилося: $X \setminus \{\sigma_1^3, \sigma_2^3, \dots, \sigma_{n_3}^3\}$ буде 2-кістяком X^2 ;
4. Знаходження 2-клітин і 1-кістяка є дуже схожим. Для цього ми обираємо трикутник $\Delta^2 \in X^2$. Об'єднуючи трикутники за спільними сторонами, ми розширюємо Δ^2 і знаходимо 2-клітину. Пройшовшись по всіх трикутниках, аналогічно до тетраедрів у попередньому пункті, маємо множину 2-клітин $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{n_2}^2\}$, після видалення якої з X^2 одержуємо 1-кістяк X^1 ;
5. Усі вершини графа X^1 , які мають степінь, відмінний від 2, формують 0-кістяк X^0 ;
6. Компоненти зв'язності $X^1 \setminus X^0$ є 1-клітинами.

Вищенаведені кроки дозволяють отримувати з $(k + 1)$ -кістяка k -кістяк. Тепер знайдемо твірні елементи нашої фундаментальної групи.

Для того, щоб одержати твірні $\pi_1(X)$, достатньо одержати твірні групи $\pi_1(X^1)$. Для цього розглядатимемо 1-кістяк X^1 як граф G , де 0-клітини – це вершини, а 1-клітини – ребра. Тоді генерувати $\pi_1(X^1)$ будуть ті петлі,

композиції яких можуть утворити всі можливі петлі в G .

Algorithm 2: Алгоритм отримання твірних елементів

Result: Знайдено твірні 1-клітини

1. Обчислюємо мінімальне кістякове дерево T графа G ;
2. Тепер ми маємо поділ множини ребер графа G на ті, що належать T , і ті, що не належать T ; Позначимо елементи другої множини як e^{-T} . Коли ми об'єднуємо ребро e_i^{-T} з T , у графі G утворюється унікальна петля γ_i ;
3. Множина $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, де n – кількість ребер, що не належать T , є множиною твірних елементів $\pi_1(X^1)$, а отже, і $\pi_1(X)$.

Оскільки границя кожної 2-клітини є петлею в 1-кістякові, то відношення мають отримуватися шляхом конкатенації твірних елементів $\pi_1(C)$ у деякі слова w_i . Оскільки межа довільної 2-клітини може бути стягнута в точку в X , то відповідне слово w має дорівнювати нейтральному елементу e . Тому відношення задаються рівностями $w_i = e$.

Algorithm 3: Алгоритм отримання відношень

Result: Знайдено відношення

1. Задаємо довільну орієнтацію всіх ребер e_i в G . Символом e_i^{-1} позначатимемо зворотній напрям орієнтації відповідного ребра;
 2. Задаємо довільний напрям обходу межі кожної 2-клітини і записуємо цей обхід у вигляді послідовності символів, що означають ребра з їхньою орієнтацією;
 3. Потім ми виключаємо символ e_i (чи e_i^{-1}) із послідовності, якщо e_i є ребром у кістяковому дереві T ;
 4. Ті символи, що залишилися після попереднього пункту, однозначно задають обходи в термінах орієнтованих ребер e_j^{-T} . Тепер, підставивши замість кожного e_j^{-T} відповідний твірний елемент γ_j , отримуємо всі відношення.
-

Означення 5.3. *Многовидом* розмірності n називається топологічний простір, кожна точка якого має окіл, гомотопічно еквівалентний до $\mathbb{R}^n$. Многовид називається *триангульовним*, якщо він є гомеоморфним до деякого симпліціального комплексу.

Приклад 5.4. Будь-яка сфера S^n є многовидом розмірності n .

Надалі приймемо без доведення факт, що компоненти зв'язності топологічного многовида є компонентами лінійної зв'язності.

Означення 5.5. Триангуляцією многовида називають розбиття його на симплекси. Для розмірностей $n \geq 3$ назвемо це *просторовою триангуляцією*.

Оскільки в роботі [17] було доведено, що всі многовиди розмірності $n \leq 4$ можуть бути триангульовані, то цей алгоритм працюватиме для будь-якого такого многовида, оскільки триангульовність і означає гомеоморфність простору деякому симпліціальному комплексу.

5.2 Підхід через дискретні векторні поля

Опишемо підхід до обчислення в інший спосіб фундаментальних груп скінченних регулярних CW-комплексів. Для того, щоб його презентувати, введемо наступні означення.

Означення 5.6. CW-комплекс називається *регулярним*, якщо всі клітини були приєднані фактор-відображенням, що є гомеоморфізмом межі клітини.

Означення 5.7. *Дискретним векторним полем* регулярного CW-комплекса X називається набір формальних стрілок $s \rightarrow t$, де

1. $s, t \in X$, де $\dim(t) = \dim(s) + 1$ і s повністю міститься в межі t . Кажуть, що s і t *задіяні* в стрілці, де s є *джерелом* стрілки, а t – *ціллю* стрілки.
2. Кожна клітина задіяна не більш ніж в одній стрілці.

Означення 5.8. *Ланцюгом* у дискретному векторному полі називається послідовність $\dots, s_1 \rightarrow t_1, s_2 \rightarrow t_2, s_3 \rightarrow t_3, \dots$, де s_{i+1} міститься в межі t_i для кожного i . Ланцюг називається *циклом*, якщо він має скінченну довжину і його джерелом є s_1 (початкова стрілка $s_1 \rightarrow t_1$), що міститься в межі цілі t_n кінцевої стрілки $s_n \rightarrow t_n$.

Означення 5.9. Дискретне векторне поле називається *допустимим*, якщо воно не містить циклів чи ланцюгів, які нескінченно тягнуться вправо. Ми зосередимось на скінченних CW-комплексах, тому допустимим вважатимемо поле, яке не містить циклів. Ми говоримо, що допустиме дискретне векторне поле є *максимальним*, якщо неможливо додати стрілку, зберігаючи допустимість. Кажуть, що клітина в X є *критичною*, якщо вона не задіяна в жодній стрілці.

Теорема 5.10 ([10], [11], [22]). *Якщо X – це регулярний CW-комплекс з допустимим дискретним векторним полем, то існує гомотопічна еквівалентність*

$$X \simeq Y,$$

де Y – це CW-комплекс, чийі клітини знаходяться у взаємно-однозначній відповідності з критичними клітинами X .

Приклад 5.11. Розглянемо допустиме дискретне векторне поле зведеного до регулярного CW-комплексу тора X . Воно має одну критичну 0-

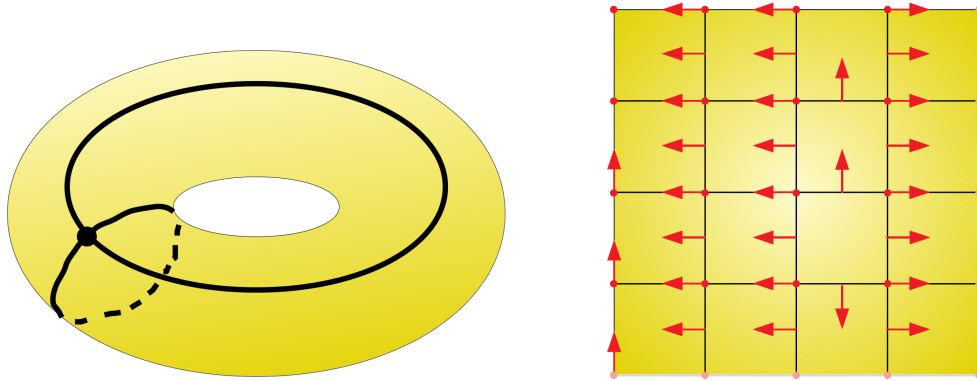


Рис. 2

клітину, дві критичні 1-клітини та одну критичну 2-клітину. Ми можемо отримати гомотопічну еквівалентність $h : X \rightarrow Y$, де Y – CW-комплекс із однією 0-клітиною, двома 1-клітинами та однією 2-клітиною, як показано на рисунку 2 ліворуч. Для цього нехай X^n позначає n -кістяк X ; T^n позначає об'єднання X^n із усіма $(n + 1)$ -клітинами, що є цілями стрілок X ; V^n позначає об'єднання T^n із усіма критичними $(n + 1)$ -клітинами X . Покладемо V^0 множиною всіх критичних 0-клітин. Тоді маємо включення:

$$V^n \subset X^n \subset T^n \subset V^{n+1}.$$

Простори T^0, V^1 та T^1 проілюстровані на рис. 3:

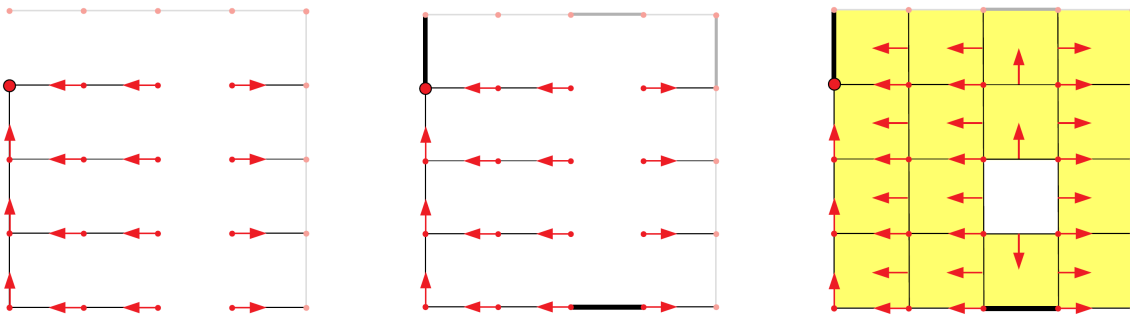


Рис. 3

CW-простір Y будується рекурсивно: Y^0 складається з критичних 0-клітин, тобто, $Y^0 = V^0$, а далі припустимо, що ми сконструювали гомото-

пiчну еквiвалентнiсть $f : V^n \rightarrow Y^n$, де клiтини Y^n знаходяться у взаємно-однозначнiй вiдповiдностi з критичними k -клiтинами X для всiх $k \leq n$.

З того, як ми означили V^n та T^n , ми стверджуємо, що V^n є деформаційним ретрактом T^n . Щоб це зрозуміти, згадаємо, що оскільки дискретне векторне поле є допустимим, то має існувати n -клітина e^n в T^n , що є джерелом початкової стрілки $e^n \rightarrow e^{n+1}$ деякого ланцюга векторного поля на T^n . Нехай $T_1^n \subsetneq T^n$ позначає CW-комплекс, отриманий з T^n шляхом вилучення з нього e^n і e^{n+1} . Це породжує не що інше, як елементарний колапс $T^n \searrow T_1^n$ і елементарне розтягнення $T_1^n \nearrow T^n$, зокрема, T_1^n є деформаційним ретрактом T^n . Застосувавши таку ж процедуру для T_1^n , отримуємо ретракт $T_2^n \hookrightarrow T_1^n$, де $V^n \subset T_2^n$. Повторюючи процедуру, отримуємо послідовність деформаційних ретрактів:

$$V^n \nearrow T_k^n \nearrow T_{k-1}^n \nearrow \dots \nearrow T_1^n \nearrow T^n,$$

що означає, що існує відображення $g : T^n \rightarrow V^n$, яке є гомотопічною еквівалентністю.

Для кожної критичної $(n+1)$ -клітини e^{n+1} простору X існує характеристичне відображення $D^{n+1} \rightarrow X$, яка звужується до $\varphi : S^n \rightarrow X^n$. Композиція відображень

$$\varphi' : S^n \xrightarrow{\varphi} X^n \subset T^n \xrightarrow{g} V^n \xrightarrow{f} Y^n$$

може бути використана для того, щоб сформулювати об'єднання $Y^n \cup e^{n+1}$ з клітковою структурою, де φ' продовжується до характеристичного відображення для e^{n+1} . Таким чином ми приклеюємо критичні $(n+1)$ -клітини простору X до кістяка Y^n , отримуючи Y^{n+1} . Конструкція Y^{n+1} виходить така, що гомотопічна еквівалентність $f : V^n \rightarrow Y^n$ продовжується до гомотопічної еквівалентності $f : V^{n+1} \rightarrow Y^{n+1}$.

Нехай V та Y – CW-комплекси з кістяками V^n та Y^n відповідно. Для $n = \dim(X)$ отримуємо шукану гомотопічну еквівалентність

$$h : X = V^n \rightarrow Y.$$

Ми пропонуємо алгоритм побудови максимального допустимого дискретного векторного поля на скінченному CW-комплексі. Для початку вводимо частковий порядок на множині всіх клітин комплексу так, що кожна клітина є більшою за клітину меншої розмірності, і меншою за клітини більшої розмірності. Такий порядок мотивований тим, що ми прагнемо мати одну єдину критичну 0-клітину в структурі дискретного векторного поля.

Algorithm 4: Побудова дискретного векторного поля на регулярному CW-комплексі

Result: Максимальне допустиме дискретне векторне поле на X .

Вводимо частковий порядок на клітинах X довільним чином;

Оголошуємо всі клітини *несуттєво* критичними;

while ϵ *несуттєво критичні клітини* **do**

while ϵ *пара несуттєво критичних клітин s, t така, що $\dim(t) = \dim(s) + 1$ і s належить границі t , і жодна інша клітина розмірності $\dim(s) + 1$ не містить s у своїй границі*

do

 Вибираємо таку пару (s, t) , де s – мінімальний елемент відносно введеного часткового порядку;

 Додаємо стрілку $s \rightarrow t$ і оголошуємо клітини s, t некритичними;

end

if *залишилися несуттєво критичні клітини* **then**

 Вибираємо мінімальну несуттєво критичну клітину та оголошуємо її суттєво критичною;

else

end

6 Висновки

У даній кваліфікаційній роботі було зібрано та описано основні гомотопічні властивості топологічних просторів, доведено базові твердження 2.12, 2.17, 2.20, 2.21, 3.12, теореми 3.4, 3.16 (опис умов гомеоморфізму між факторпросторами), 3.19, та леми 3.10, 3.11 та інші результати параграфу 3.1, дано характеристикацію деяких типів просторів через відображення ретракції, розглянуто простір неперервних відображень між двома просторами та гомотопію на ньому, доведено критерій абелевості фундаментальної групи лінійно зв'язного простору, узагальнено результат обрахунку фундаментальної групи g -складеного тора, наведено приклади обчислення фундаментальних груп скінченних CW-комплексів, розглянуто підклас скінчених CW-комплексів – скінченні симпліціальні комплекси, створено алгоритми обчислення фундаментальної групи таких просторів, а також регулярних CW-комплексів через допоміжну структуру – дискретне векторне поле і проілюстровано на прикладах.

Новизною роботи є доведення взаємозв'язків між різними типами просторів (3.10), отримання характеристик просторів (3.33, 3.34, 3.36, 3.37) із поданням цих результатів на одеську конференцію 2021 року ([6]), опис перетину всіх околів точки в $C(X, Y)$ (3.42), знайдено алгоритми обчислення фундаментальних груп скінченних симпліціальних комплексів (параграф 5.1) та запропоновано застосування структури дискретного векторного поля для обрахунку фундаментальних груп скінченних CW-комплексів (параграф 5.2).

7 Література

- [1] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. Элементарная топология. - М. Изд. МЦНМО, (2008). – 358 с.
- [2] С. Ленг, Алгебра, М.: Наука, 1965. – 431 с.
- [3] K. Abe, J. Bisceglia, T. Peters, A. Russell, D. Ferguson, T. Sakkalis, Computational topology for reconstruction of surfaces with boundary: integrating experiments and theory, *Shape Modeling and Applications, 2005 International Conference* (2005), 288–297.
- [4] M. Actipes, On the fundamental groups of surfaces.
<http://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Actipes.pdf>
- [5] S. Akbulut, J. D. McCarthy, Casson’s invariant for oriented homology 3-spheres, *Mathematical Notes* **36**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990, An exposition.
- [6] K. Antoshyna, S. Kozerenko, Commuting sets for topological set operators // International Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, May 25-28, 2021, Odesa, Ukraine.
- [7] J.D. Banfield, A.E. Raftery, Ice floe identification in satellite images using mathematical morphology and clustering about principal curves, *Journal of the American Statistical Association* **87** (417) (1992), 7–16.
- [8] J. S. Calcut, R. E. Gompf, J. D. McCarthy, On fundamental groups of quotient spaces, *Topology and its Applications* **159** (2012), 322-330.
- [9] H. Edelsbrunner, Biological applications of computational topology, *Goodman, J.E., O’Rourke, J. (eds.) Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton (2004), 1395–1412.
- [10] R. Forman, Morse theory for cell complexes, *Adv. Math.*, **134**(1) (1998), 90–145.
- [11] R. Forman, A user’s guide to discrete Morse theory, *Sém. Lothar. Combin.* (2002) **48**:Art. B48c, 35.

- [12] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 3, 357–453.
- [13] M. Gualtieri, 1300Y Geometry and Topology (lecture notes, term 2).
<http://www.math.toronto.edu/mgualt/MAT1300/1300%20Lecture%20notes%20term%202.pdf>
- [14] A. Hatcher, Algebraic Topology, *Cambridge of Chicago Press*, 2002.
- [15] B. Kégl, A. Krzyzak: Piecewise linear skeletonization using principal curves, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **24(1)** (2002), 59–74.
- [16] R. C. Kirby, L. C. Siebenmann, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 742–749.
- [17] C. Manolescu, Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture, e-print, arXiv:1303.2354v2, 2013.
- [18] J. van Mill, The reduced measure algebra and a K_1 -space which is not K_0 , *Topology and its Applications*, **13(2)** (1982), 123-132.
- [19] P. Raumonon, S. Suuriniemi, T. Tarhasaari, L. Kettunen, Manifold and metric in numerical solution of the quasi-static electromagnetic boundary value problem
- [20] Z. Semadeni, Banach spaces of continuous functions. *Vol. I, PWN—Polish Scientific Publishers*, Warsaw (1971), MR 0296671
- [21] B. de Smit, The fundamental group of the Hawaiian earring is not free, *International Journal of Algebra and Computation* **2(1)** (1992), 33-37.
- [22] J. H. C. Whitehead, Simple homotopy types, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 1–57.