Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **"Розфарбування графів. Хроматичне число"**

Виконала студентка
4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна математика», спеціальності 113 Прикладна математика
Бородюк Олександра Андріївна

Керівник: *Тимошкевич Л.М.*
кандидат ф.-м. н, с.в

Рецензент: ______________________
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищенна
з оцінкою: ______________________

Секретар ЕК ____________________
“____”____________________ 2022 р.

Київ – 2022

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,

проф., доктор фіз.-мат. наук

_______________ *Олійник Б.В.*

(підпис)

“____”________________ 2021

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи

студентці 4-го курсу, факультету інформатики

Бородюк Олександрі Андріївні

Тема: «Розфарбування графів. Хроматичне число»

Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація

1. Вступ та загальна інформація по графам.

2. Огляд основних означень та тверджень, що пов'язані

зі спектральною теорією графів

3. Розв'язання задач на знаходження хроматичого числа

Висновки

Список літератури

Дата видачі “____”__________ 2021 Керівник ________________________

(підпис)

Завдання отримав _______________

(підпис)

Номер	Назва етапу кваліфікаційної роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Підтвердження теми кваліфікаційної роботи.	20.10.2022	
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	14.01.2022	
3.	Узгодження плану роботи з керівником.	22.01.2022	
4.	Робота з літературою, опис основних означень, властивостей, теорем.	15.02.2022	
5.	Дослідження основних властивостей хроматичного числа, алгоритму розфарбування, їх застосування.	12.05.2022	
7.	Передзахист і допуск до захисту кваліфікаційної роботи.	15.06.2022	
8.	Попередній аналіз кваліфікаційної разом з керівником. Наголошення на помилках. Їх виправлення.	25.06.2022	
9.	Захист кваліфікаційної роботи	04.07.2022	

Зміст

Анотація

Мета кфаліфікаційної роботи полягає у дослідженні теми розфарбування графів та хроматичного числа. У роботі розглядаються загальні поняття теорії графів, доводяться твердження щодо оцінки хроматичного числа. Отримані результати і теоретичне підґрунтя дають змогу розв'язати задачі на знаходження оптимального розфарбування вершин певного графа.

Вступ

Перші результати щодо розфарбування графів почали зароджуватись вже у 1852 році, коли Френсіс Гутрі уперше намагався розфарбувати карту округів Англії. Він звернув увагу, що для такого розфарбування вистачає чотирьої кольорів. Більш точно цей результат був сформульований у 1878 р. Артуром Келі під назваою "Теорема про чотири кольори". Спрощена версія теореми, а саме теорема про п'ять кольорів, мала коротке нескладне доведення, яке вдалося отримати вже у 1890 році. Тим не менш, незважаючи на значну кількість спроб доведення, проблема чотирьох кольорів залишалась відкритою. Теорема була доведена аж в 1976 році Кеннетом Аппелем і Вольфгангом Хакеном. Вона стала першою серйозною математичною теоремою, доведеною за допомогою комп'ютера.

Розфарбування графів почало вивчатися як алгоритмічна проблема з 1970-х років та використовується у багатьох практичних проблемах. Наприклад, розфарбування вершин моделює багато проблем планування. У своїй найпростішій постановці заданий набір робіт має бути розподілений за часовими відрізками, кожна така робота займає один відрізок. Вони можуть бути виконані в будь-якому порядку, але дві роботи можуть конфліктувати в тому сенсі, що не можуть бути виконані одночасно, оскільки, наприклад, використовують спільні ресурси. Відповідний граф містить вершину для кожної з робіт та грань для кожної конфліктуючої пари. Хроматичне число побудованого графа – це мінімальний час виконання всіх робіт без конфліктів.

Розфарбування графів також використовується для вирішення таких проблем, як розподіл регістрів, або ж, наприклад, в технології цифрових водяних знаків. Але насправді проблема розфарбування графів оточує нас усюди і може виникнути в буденних речах. Навіть рішення головоломки Судоку може бути розглянуте, як розфарбування 9 кольорами заданого графа на 81 вершині.

1 Графи. Основні поняття

Означення 1.1. Неорієнтований граф G – пара множин (V, E), де V — множина вершин, $E \subseteq V^{(2)}$ – множина ребер; позначають $G = (V, E)$.

Нехай існують вершини $v_1, v_2 \in V$. Традиційно ребра, які з'єднують такі дві вершини, записують за допомогою круглих дужок $(v_1, v_2) \in E$.

Означення 1.2. Граф без кратних ребер та петель називається простим.

Означення 1.3. Вершини $v_1, v_2 \in V$ в неорієнтованому графі називають суміжними, якщо існує ребро $e \in E$, яке з'єднує ці вершини.

Означення 1.4. Ребро $e \in E$ є інцидентним вершині v_1 та вершині v_2, якщо воно їх з'єднує, тобто $e = (v_1, v_2)$.

Означення 1.5. Ребра e_1, e_2 в неорієнтованому графі називають суміжнимим, якщо ці ребра мають спільну вершину.

Означення 1.6. Граф $G = (V, E)$ зазвичай зображається за допомогою рисунка на площині, який називають діаграмою графа G. Вершинам графа G бієктивно відповідають точки площини. Точки, що відповідають вершинам v_1 і v_2, з'єднують відрізком тоді й тільки тоді, коли v_1 і v_2 – суміжні вершини.

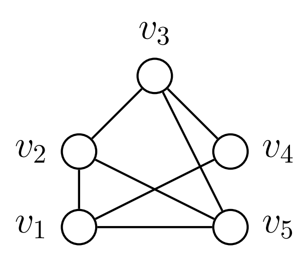


Рис. 1: Діаграма графа G

Графи також можна подати за допомогою матриці суміжності. Позначимо усі вершини графа G $v_1, ..., v_n$

Означення 1.7. Матрицею суміжності A графа G називають матрицю розміром $n \times n$, у якій елемент a_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j суміжні, і дорівнює 0 в іншому випадку.

Рисунок нижче відображає матрицю суміжності графа G, показаного на (Рис. 1).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2: Матриця суміжності A графа G

Означення 1.8. Степенем $deg(v)$ вершини $v \in V$ називають кількість інцидентних їй ребер.

Твердження 1.9. *У будь-якому графі $G = (V, E)$ виконується рівність:*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

Означення 1.10. Граф називається k-дольним $(k > 2)$, якщо всі його вершини можна розбити на k частин (долей) так, що суміжними вершини є лише з різних долей.

Означення 1.11. Доповненням простого графа $G = (V, E)$ називається граф $\overline{G} = (V, \overline{E})$, у якого дві довільні вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не є суміжними в графі G.

Означення 1.12. Маршрутом (або шляхом) у графі G = (V, E) називають послідовність $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1}$ таку, що кожні два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, отже, $e_i = (v_i, v_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, k$.

Означення 1.13. Маршрут називається замкненим (циклічним), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називається циклом, а замкнений простий ланцюг — простим циклом.

Означення 1.14. Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжиною n, позначається C_n.

Означення 1.15. Граф називається зв'язним, якщо будь-яку пару його вершин можна з'єднати деяким маршрутом.

Означення 1.16. Граф без циклів називається ациклічним.

Означення 1.17. Ациклічний зв'язний граф називається деревом. Дерево є дводольним графом.

Означення 1.18. Кліка графу – підмножина його вершин, в якій будь-які дві з них зв'язані ребром.

2 Хроматичне число

2.1 Основні поняття

Означення 2.1. Нехай k – натуральне число. Розфарбуванням графа $G = (V, E)$, в k кольорів, або просто k–розфарбуванням, називається відображення f з множини вершин V в множину $\{1, 2, ..., k\}$.
Якщо при цьому для вершини $v \in V$ виконано $f(v) = i$, то v розфарбована в i–й колір.

Означення 2.2. Розфарбування f графа G називається правильним, якщо $f(v) \neq f(w)$ для будь-яких двох суміжних вершин v та w цього графа G.

Означення 2.3. Число k називається хроматичним числом графа G і позначається через $\chi(G)$, якщо існує правильне k-розфарбування графа G, але не існує його правильного $(k-1)$-розфарбування.

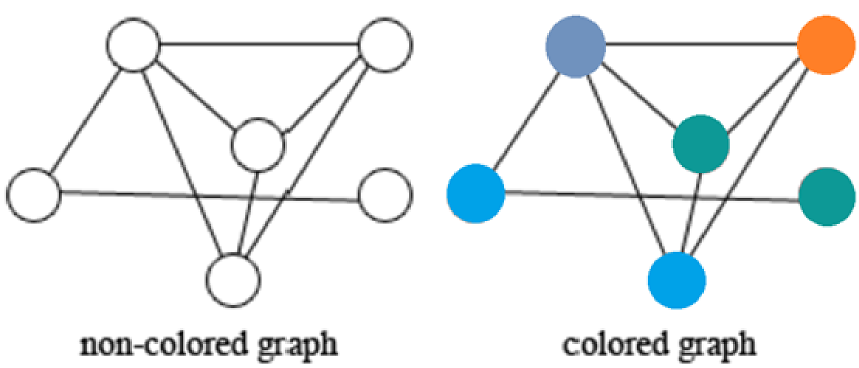


Рис. 3:

Твердження 2.4. *Нехай G — простий граф. Тоді:*

1. $\chi(G) = 1$ *тоді і тільки тоді, коли* G *— пустий граф.*

2. $\chi(G) = 2$ *тоді і тільки тоді, коли* G *— непустий дводольний граф.*

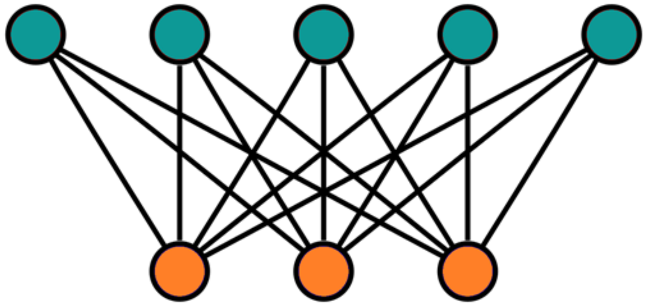


Рис. 4: Двододьний граф

Наслідок 2.5. *Якщо непустий граф G є деревом, то* $\chi(G) = 2$.

Рис. 5: Дерева

Твердження 2.6. *Хроматичне число будь-якого циклу, що містить n вершин, дорівнює 2, якщо n парне, і 3, якщо непарне.*

Наслідок 2.7. *Якщо граф G містить цикл непарної довжини, то* $\chi(G) > 2$.

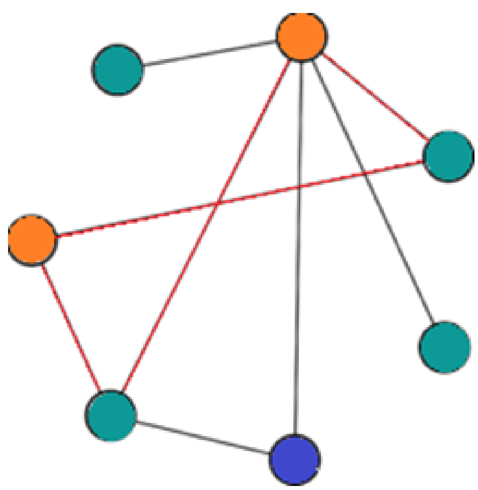


Рис. 6:

2.2 Верхня оцінка хроматичного числа графа

Загалом хроматичне число графа не можна обчислити, знаючи тільки такі його стандартні числові характеристики, як число вершин, ребер, компонент зв'язності, розподіл степенів вершин.

Приклад 2.8. Розглянемо графи G_1 та G_2. Кожен із них має десять вершин, тринадцять ребер, у тому числі чотири вершини степеня 2 та шість вершин степеня 3, одну компоненту зв'язності. Але, як легко зрозуміти, $\chi(G_1) = 3$, а $\chi(G_2) = 2$. Правильного розфарбування G_1 в меншу кількість кольорів не існує, оскільки G_1 містить підграф, який є циклом непарної довжини, а саме C_3. В той час як будь-який підграф графа G_2 – це парний цикл, тому максимальна оптимальна кількість фарб для графу G_2 – 2.

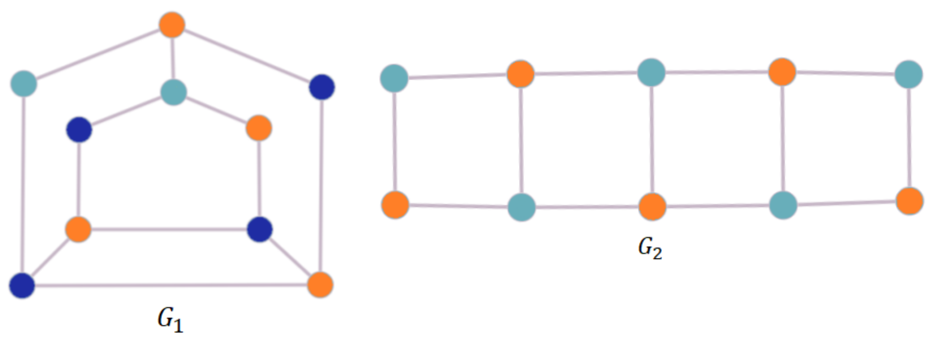


Рис. 7:

Для оцінки хроматичного числа у нас є кілька інших можливостей, які ми розглянемо нижче.

Позначимо $\Delta(G)$ як найбільший степінь вершини у графі G. При фарбуванні чергової вершини в алгоритмі послідовного розфарбування для суміжних із нею вершин використано не більше $\Delta(G)$ кольорів, отже, хоча б один із кольорів $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ вільний і може бути використаний. Звідси випливає нерівність для оцінки хроматичного числа графа.

Твердження 2.9.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Доведення.

За математичною індукцією по потужності множини вершин.

База індукції: $|V| = 1$. Маємо: $\Delta(G) = 0$ і $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1$.

Індукційний крок. Нехай твердження має місце для графів з кількістю вершин не більше ніж n, $|V| = n$. Вилучимо довільну вершину $v \in V$ разом з інцидентними їй ребрами.

Для отриманого графа $G \backslash v$, користуючись припущенням індукції, маємо:

$$\chi(G \backslash v) \leq \Delta(G \backslash v) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

Тобто для розфарбування графа $G \backslash v$ має вистачити $\Delta(G) + 1$ кольорів. Тепер треба пофарбувати вершину v. Але її степінь не більший ніж $\Delta(G)$, отже, для неї ми завжди знайдемо потрібний колір. □

Теорема 2.10 (Брукса)**.** *Якщо G зв'язний граф, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$, якщо G не є повним графом або непарним циклом.*

Доведення.

Для доведення теореми розглянемо декілька випаків.

Ми можемо вважати, що $\Delta = \Delta(G) \geq 3$, оскільки в іншому випадку результат простий. Наше доведення відбувається шляхом індукції за Δ, і для кожного Δ ми будемо використовувати індукцію за n. Індукція V починається з $n = \Delta + 1$, і в цьому випадку теорема вірна, оскільки якщо $|V| = n + 1$ і $G \neq K_{n+1}$ ми можемо розфарбувати G за допомогою Δ кольорів, використовуючи той самий колір для деяких двох несуміжних вершин. Тому припустимо, що $n \geq \Delta + 2$.

1. Існує вершина $v \in V$ така, що $G \backslash v$ незв'язний.

   Нехай компонентами $G \backslash v$ є $C_1, ..., C_t$. Розглянемо графи, індуковані G на множинах вершин $C_1 \cup \{v\}, ..., C_t \cup \{v\}$. Ми можемо Δ-розфарбувати кожен із цих графів за індукцією (якщо один із графів є повним графом або непарним циклом, його максимальний ступінь має бути строго меншим за Δ). Без втрати загальності, ми можемо припустити, що v отримає колір 1 у всіх t розфарбуваннях, які, таким чином, ми можемо комбінувати, щоб отримати Δ-розфарбування G.

2. $G \backslash v$ зв'язний для всіх $v \in V$, але є дві несуміжні вершини $v, w \in V$ такі, що $G \backslash \{v \cup w\}$ незв'язний.

   Нехай A — компонента $G \backslash \{v \cup w\}$ і $B = V(G) \backslash (V(A) \cup \{v, w\})$. Якщо немає ребер від v до A, то $G \backslash w$ незв'язний, що, як ми припускаємо, не правильно. Отже, існує принаймні одне ребро від v до A. Подібним чином існує принаймні одне ребро від w до A, принаймні одне ребро від v до B і принаймні одне ребро від w до B.

   Позначимо як G_1 граф, отриманий з G видаленням B, і як G_2 граф, отриманий з G видаленням A. На цьому етапі є спокуса Δ-розфарбувати G_1 і G_2 за допомогою індукції, а потім поєднати розфарбування, але це може бути неможливо зробити (щоб зрозуміти чому, можна розглянути випадок, коли G є непарним циклом). Замість цього ми зауважимо, що, з наведених вище спостережень, v і w мають ступінь не більше $\Delta - 1$ як в G_1, так і в G_2, так що ми можемо Δ - розфарбувати $G_3 = G_1 + \{v, w\}$ і $G_4 = G_2 + \{v, w\}$ за припущенням індукції, якщо жоден з них не є повним графом (якщо будь-який з них є непарним циклом, ми можемо розфарбувати його розфарбувати за Δ, оскільки $\Delta > 2$). Такі розфарбування, якщо вони існують, можна скомбінувати, тому що v і w будуть змушені мати різні кольори в обох з них. Ми можемо без втрати загальності змінити кольори, якщо необхідно, щоб переконатися, що v і w мають кольори 1 і 2 відповідно в обох розфарбуваннях.

Якщо ж G_3 є клікою на $\Delta + 1$ вершинах, то кожна з v та w повинна мати ступінь 1 у G_2 (оскільки обидва мають ступінь Δ у G_3 та $\Delta - 1$ у G_1). У G_2 ми можемо об'єднати v і w в одну вершину, отримуючи граф G_5, який можна Δ-розфарбувати за індукцією. Отже, існують Δ-розфарбування як G_1, так і G_2, у яких і v, і w отримують однаковий колір. Ці розфарбування можна об'єднати, щоб забезпечити Δ-розфарбування графа G.

3. $G \backslash \{v \cup w\}$ зв'язний для кожної пари несуміжних вершин V і w.

   Виберемо вершину u максимального степеня Δ. Оскільки $G \neq K_n$, деяка пара сусідів v і w вершини u не є суміжними. Покладемо $v_1 = v$, $v_2 = w$, $v_n = u$ і, працюючи у зворотному напрямку від v_{n-1} до v_3, ми гарантуємо, що кожен v_i має сусіда серед $\{v_{i+1}, ..., v_n\}$: це можливо, оскільки $G \backslash \{v \cup w\}$ зв'язний. Виконуючи жадібний алгоритм із таким упорядкуванням вершин, ми бачимо, що $v_1 = v$ і $v_2 = w$ обидва отримують колір 1, а також, що нам ніколи не потрібно використовувати колір $\Delta + 1$ для $v_3, ..., v_{n-1}$, оскільки кожен такий v_i має лише не більше $\Delta - 1$ сусідів серед уже розфарбованих вершин. Нарешті, коли ми переходимо до розфарбування v_n, два з його сусідів отримали однаковий колір, так що один із кольорів $1, ..., \Delta$ доступний для фарбування самого v_n. Це завершує індукційний крок.

□

Твердження 2.11. *Нехай $G = (V, E)$ - довільний зв'язний неорієнтовний граф з m ребрами. Тоді*

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Доведення.

Нехай, $V_1, V_2 ... V_x$ – множини вершин розфарбованих у відповідні кольори при правильному фарбуванні графа G. Бачимо, що між будь-якими двома різними множинами існує хоча б одне ребро (в протилежному випадку ці множини можливо було б пофарбувати в один колір). Тоді

$$\frac{1}{2}\chi(\chi - 1) \leqslant m \Longrightarrow (\chi - \frac{1}{2})^2 \leqslant 2m + \frac{1}{4} \Longrightarrow \chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

□

2.3 Нижня оцінка хроматичного числа графа

Означення 2.12. Підмножина S вершин графа G називається незалежною, якщо будь-які дві вершини з S не суміжні в G

Означення 2.13. Число незалежності $\alpha(G)$ графа $G = (V, E)$ – це потужність найбільшої незалежної множини вершин в ньому, тобто

$$\alpha(G) = \max\{|S| \,:\, S \subset V \text{ та } S \text{ незалежна в } G\}.$$

Лема 2.14 (Нижня оцінка)**.** *Нехай $G = (V, E)$ - довільний зв'язний неорієнтований граф з n вершинами. Тоді*

$$\frac{n}{\alpha} \leqslant \chi(G).$$

Доведення.

Нехай, $V_1, V_2 ... V_x$ – множини вершин, розфарбовані у відповідні кольори при правильному розфарбуванні графа G. Кожне з V_i – незалежна множина (оскільки вершини кожної з множин розфарбовані в один колір всередині неї, а граф G правильно пофарбований, отже, це попарно не суміжні всередині множини). Бачимо, що для довільного i $|V_i| \leqslant \alpha$ (бо V_i – незалежна множина). Тобто

$$\sum_{i=1}^{\chi} |V_i| = n \leqslant \chi\alpha \Longrightarrow \frac{n}{\alpha} \leqslant \chi.$$

□

Лема 2.15 (Нижня оцінка Геллера). *Нехай $G = (V, E)$ – довільний зв'язний неорієнтовний граф з n вершинами та m ребрами. Тоді*

$$\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leqslant \chi(G).$$

Доведення.

Нехай, $V_1, V_2 ... V_x$ – множини вершин, розфарбовані у відповідні кольори при правильному розфарбуванні графа G. Маємо:

$$m \leqslant \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{n^2-2m} \leqslant & \frac{n^2}{n^2 - n(n-1) + \sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)} = \\
&= \frac{n^2}{n + \sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)} = \\
&= \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i| + \sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)} = \\
&= \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|^2} = \\
&= \frac{(\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|)^2}{\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|^2} \leqslant \\
&\leqslant \chi
\end{aligned}$$

□

3 Задачі

3.1 Задача 1

Доведіть, що для довільного графа G на n вершинах, і його доповнення $\overline{G}$ справедлива нерівність

$$\chi(G) * \chi(\overline{G}) \geqslant n.$$

Розв'язання.

Нехай хроматичне число графа $\chi(G) = k$. Розглянемо правильне k-розфарбування графа G. Нехай, $V_1, V_2 ... V_k$ – множини вершин, розфарбовані у відповідні кольори при цьому розфарбуванні. Кожна така множина буде незалежною в графі G, отже, вона утворюватиме кліку в його доповленні. Окрім того, за принципом Діріхле, потужність хоча б однієї з цих множин має бути не меншою за $\frac{n}{k}$. Ми знаємо, що для правильного розфарбування кліки (повного графа), нам необхідно рівно стільки кольорів, якою є його потіжність. Тому, оскільки доповлення точно містить хоча б один повний підграф потужністю $\frac{n}{k}$, для його розфарбування необхідно щонайменше $\frac{n}{k}$ кольорів. Отже,

$$\chi(G) * \chi(\overline{G}) \geqslant k \cdot \frac{n}{k} = n.$$

3.2 Задача 2

Зв'зний граф G має 2022 вершини, причому степінь довільної вершини не більше 11. Доведіть, що можна вибрати 337 вершини так, щоб довільний непарний цикл графа G проходив не лише через вибрані вершини.

Розв'язання.

Оскільки дельта $\Delta(G) = 11$, то, за Твердженням 2.9, $\chi(G) \leq 11 + 1$. Це означає, що існує розварбування графа в 12 кольорів. Нехай, $V_1, V_2 ... V_{12}$ – множини вершин, розфарбовані у відповідні кольори при цьому розфарбуванні. Тоді

$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup ... \sqcup V_{12}.$$

Не втрачаючи загальності припустимо, що

$$|V_1| \geq |V_2| \geq ... \geq |V_{12}|.$$

Причому пам'ятаємо, що

$$|V_1| + |V_2| + ... + |V_{12}| = |V|.$$

Тепер покажемо, що $|V_1| + |V_2| \geqslant \frac{|V|}{6}$. Для цього покажемо, що $|V_1| \geqslant \frac{|V|}{12}$. Це дійсно має місце, оскільки інакше $|V_1| + ... + |V_{12}| \leqslant 12 \cdot |V_1| < 12 \cdot \frac{|V|}{12} = |V|$. В такому разі, якби $|V_1| + |V_2| < \frac{|V|}{6}$, то ми мали б

$$|V_1| + ... + |V_{12}| \leqslant |V_1| + 11 \cdot |V_2| < |V_1| + 11 \cdot (\frac{|V|}{6} - |V_1|) = \frac{11|V|}{6} - 10|V_1| \leqslant \frac{11|V|}{6} - \frac{10|V|}{12} = V.$$

Тому

$$|V_1| + |V_2| \geq \frac{|V|}{6} = \frac{2022}{6} = 337.$$

Окрім того, цикл непарної довжини не може містити вершини лише з V_1, V_2, оскільки для розфарбвання циклу непарної довжини необхідно мінімум 3 кольори.

3.3 Узагальнення задачі 2

Зв'зний граф G має n вершини, причому степінь довільної вершини не більше d. Доведіть, що можна вибрати $\frac{2n}{d+1}$ вершини так, щоб довільний непарний цикл графа G проходив не лише через вибрані вершини.

Розв'язання.

Оскільки дельта $\Delta(G) = d$, то, за Твердженням 2.9, $\chi(G) \leq d+1$. Це означає, що існує розварбування графа в d+1 колір. Нехай, $V_1, V_2 ... V_{d+1}$ – множини вершин, розфарбовані у відповідні кольори при цьому розфарбуванні. Тоді

$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup ... \sqcup V_{d+1}.$$

Не втрачаючи загальності припустимо, що

$$|V_1| \geq |V_2| \geq ... \geq |V_{d+1}|.$$

Причому пам'ятаємо, що

$$|V_1| + |V_2| + ... + |V_{d+1}| = |V| = n.$$

Тепер покажемо, що $|V_1| + |V_2| \geqslant \frac{2|V|}{d+1}$. Для цього покажемо, що $|V_1| \geqslant \frac{|V|}{d+1}$. Це дійсно має місце, оскільки інакше $|V_1| + ... + |V_{d+1}| \leqslant (d+1) \cdot |V_1| < (d+1) \cdot \frac{|V|}{d+1} = |V|$. В такому разі, якби $|V_1| + |V_2| < \frac{2|V|}{d+1}$, то ми мали б

$$|V_1| + ... + |V_{d+1}| \leqslant |V_1| + d \cdot |V_2| < |V_1| + d \cdot (\frac{2|V|}{d+1} - |V_1|) =$$
$$= \frac{2d|V|}{d+1} - (d-1)|V_1| \leqslant \frac{2d|V|}{d+1} - (d-1)\frac{|V|}{d+1} = V = n.$$

Окрім того, цикл непарної довжини не може містити вершини лише з V_1, V_2, оскільки для розфарбвання циклу непарної довжини необхідно мінімум 3 кольори.

3.4 Задача 4

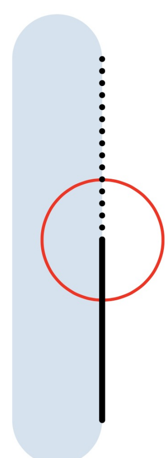
На площині намальовані декілька однакових попарно неперетинних кругів (круги можуть дотикатися один до одного). Доведіть, що всі круги можна *розфарбувати не більше ніж в 4 кольори так, що круги одного кольору не будуть дотикатися.*

Розв'язання.

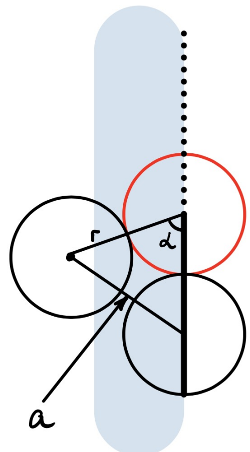
Індукція по кількості кругів.

База індукції. $(n = 1)$ Очевидно.

База індукції. $(n - 1 \to n)$ Зафіксуємо круг, центр якого має найбільшу абсцису. Якщо таких кругів декілька, зафіксуємо той з них, центр якого має найбільшу ординату. В такому разі центри інших кругів можуть лежати лише в півплощині, зображенній на рисунку:



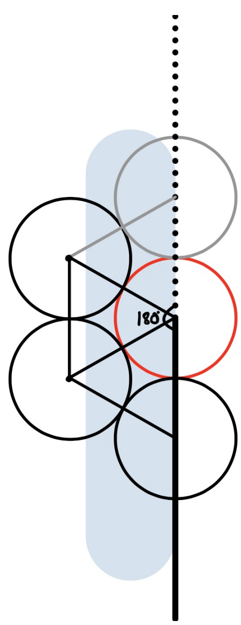
Окрім того, кут α між променями, що виходять з центру обраного круга і проходять через центри двох дотичних до нього кругів, не може бути менший за $60°$. Це має місце, оскільки, відстань між центрами двох таких кругів a має бути більше або рівна двом радіусам r, бо інакше вони б перетинались. Оскільки ці два круги дотикаються до обраного, відстань від його центра до їхніх центрів також дорівнює двом радіусам.



Тому

$$\cos\alpha = \frac{4r^2 + 4r^2 - a^2}{2 \cdot 2r \cdot 2r} = \frac{8r^2 - a^2}{8r^2} \leq \frac{8r^2 - 4r^2}{8r^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow 60^\circ \leq \alpha < 180^\circ.$$

Отже, кожен дотичний круг відтинає від фіксованої півплощини кут мірою щонайменше 60°. Оскільки промінь, що виходить з центру фіксованого круга паралельно осі ординат у напрямку зростання, не включається в півплощину, вона може вмістити максимум 2 таких кути. Тому фіксований круг може дотикатись щонайбільше до 3 кругів.



За припущенням індукції, всі інші круги можна розфарбувати 4 кольори. Оскільки фіксований круг дотикається максимум до 3, серед цих 4 кольорів також знайдеться колір для його розфарбування.

3.5 Задача 5

На шахівниці розтавлено декілька тур. Покажіть, що достатньо 3 кольори, щоб розфарбувати тури так, щоб тури одного кольору не били одна одну.

Розв'язання.
Індукція по кількості тур. *База індукції.* ($n = 1$) Очевидно.
Крок індукції. ($n - 1 \to n$) Зафіксуємо найправішу туру. Якщо таких тур декілька, зафіксуємо найвищу з них. В такому разі фіксована тура може бити щонайбільше дві інші тури. За припущенням індукції, достатньо три кольори, щоб розфарбувати всі тури, крім фіксованої. Оскільки фіксована тура б'є максимум дві тури, то серед трьох кольорів знайдеться ще один колір саме для неї.

3.6 Задача 6

Для довільного графа G на p вершинах, і його доповнення $\overline{G}$ справедлива нерівність

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \le p + 1$$

Розв'язання.
Для довільного графа G

$$\chi(G) \le 1 + \Delta(G) = 1 + \max_{H \subset G}\{\Delta(H)\}.$$

Нехай $q = \max_{H\subset G}\{\Delta(H)\}$. Тоді $\chi(G) \le 1+q$. Далі покажемо, що для $\overline{G}$ виконується $\max_{H\subset\overline{G}}\{\Delta(\overline{G})\} = n-q-1$. Припустимо протилежне. Тоді існує підграф H з G такий, що $\Delta(\overline{H}) \ge n-q$. Це означає, що кожна вершина H має степінь не більший ніж $q-1$.
Нехай K – такий підграф графа G, що $\Delta(K) = q$ (такий підграф існує, оскільки $q = \max_{H\subset G}\{\Delta(H)\}$. Зрозуміло, що жодна вершина з K не знаходиться в H. Далі, $|V(K)| \ge q+1$ оскільки $\Delta(K) = q$, що означає

$$|V(H)| \le n-(q+1) = n-q-1,$$

що суперечить факту $\Delta(\overline{H}) \ge n-q$. Отже, $max_{H\subset\overline{G}}\{\Delta(\overline{G})\} \le n-q-1$. Тому

$$\chi(\overline{G}) \le 1+(n-q-1) = n-q.$$

Зібравши це разом, маємо:

$$\chi(G)+\chi(\overline{G}) \le (1+q)+(n-q) = n+1.$$

3.7 Задача 7

Доведіть, що для довільного графа G з n вершинами, і його доповнення $\overline{G}$ справедлива нерівність

$$2\sqrt{n} \le \chi(G)+\chi(\overline{G}).$$

Розв'язання.

Маємо:

$$(\chi(G)-\chi(\overline{G}))^2 \ge 0;$$
$$\chi^2(G)-2\chi(G)\chi(\overline{G})+\chi(\overline{G}) \ge 0.$$

Додамо до обох частин $4\chi(G)\chi(\overline{G})$:

$$\chi^2(G)+2\chi(G)\chi(\overline{G})+\chi(\overline{G})^2 \ge 4\chi(G)\chi(\overline{G})$$

Оскільки, за Задачею 1, $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$, то

$$\chi^2(G) + 2\chi(G)\chi(\overline{G}) + \chi(\overline{G})^2 \geq 4\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq 4n;$$

$$(\chi(G) + \chi(\overline{G}))^2 \geq 4n;$$

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{n}.$$

Висновки

В цій роботі було розглянуто загальні поняття теорії графів і досліджена тема хроматичного числа та розфарбування графів.

У Розділі 1 ми ознайомлюємось з необхідними означеннями і основними твердженнями теорії графів, що формують теоретичне підґрунтя для подальшої роботи.

У Розділі 2 ми вводимо поняття розфарбування графа та хроматичного числа графа, тобто найменшого числа кольорів, який необхідний для такого розфарбування графа, щоб жодні дві суміжні вершини не мали однакового кольору. Ми розглядаємо важливі твердження з теорї графів, які стосуються оцінки хроматичного числа графа. Виявляється, що граф можна розфарбувати в 1 колір тоді і лише тоді, коли він пустий, в той час як двох кольорів достатньо лише для дводольних графів. Якщо ж граф містить цикл непарної довжини, то його громатичне число вже строго більше 2.

На жаль, основних характеристик заданого графа, як-от кількості його вершин та ребер або набору степенів вершин, загалом замало, щоб знайти його точне хроматичне число. Проте цього може бути достатньо, аби надати його оцінку.

Підрозділ 2.2 присвячено розгляду питання верхньої оцінки хроматичного числа графа. Одна з основних теорем в цій сфері стверджує, що для розфарбування довільного графа достатньо на один колір більше, ніж максимальний степінь вершини в цьому графі. Теорема Брукса дає ще більш чітку оцінку, а саме: якщо зв'язний граф не є непарним циклом або повним графом, то для його розфарбування достатньо рівно стільки кольорів, яким є максимальний степінь вершини в цьому графі. Окрім того, ми надаємо верхню оцінку і через кількість ребер в графі. У Підрозділі 2.3 розглянуто різноманітні нижні оцінки хроматичного числа графа, зокрема через кількість вершин та число незалежності або через кількість вершин і ребер.

Розділ 3 присвячено власному внеску, а саме розв'язанню задач на тему розфарбування графів та знаходження хроматичного числа. Цей розділ ілюструє практичне застосування теми і ще раз підтверджує, що проблема розфарбування графів може виникнути навіть в буденних речах.

Список літератури

1. Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. — К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2009. — 159 с.

2. R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network // Proc. Cambridge Philosophical Society, Math. Phys. Sci.. — 1941. — T. 37. — C. 194–197.

3. M. Aigner, G.M. Ziegler. Proofs from THE BOOK, Springer, 2003.

4. Noga Alon, Michael Krivelevich, Benny Sudakov. Coloring graphs with sparse neighborhoods // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1999. — T. 77, вип. 1. — C. 73–82.

5. Alexander Soifer. The Mathematical Coloring Book. — 2008. — C. 136–137.

6. Трохимчук Р.М., Нікітченко М.С. Дискретна математика у прикладах і задачах (навч. посібник).– Київ: ВПЦ "Київський університет 2017. — 281 с.

7. Історія і приклади

8. Верхні і нижні оцінки