

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ВИПАДКОВІ ГРАФИ ТА ЙМОВІРНІСНИЙ МЕТОД»**

Виконав: студент 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Гурський Богдан Русланович

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент: _____

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

«_____» _____ 20__р.

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук

_____ Чорней Р.К.
(підпис)

“ _____ ” _____ 2023

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи
студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Гурському Богдану Руслановичу

Тема: «Випадкові графи та ймовірнісний метод»

Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація

1. Вступ

2. Огляд основних теоретичних означень та тверджень

3. Випадкові графи

4. Числа Рамсея

Висновки

Список літератури

Дата видачі “ _____ ” _____ 2023 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «_____» _____ 2023р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	17.10.2023			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	25.10.2023			
3.	Розробка плану та структури роботи.	19.12.2023			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	04.02.2024			
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	29.02.2024			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	10.04.2024			
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	08.05.2024			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	15.05.2024			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	04.06.2024			

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

Зміст

Анотація	3
1 Вступ	4
1.1 Актуальність	4
1.2 Мета, завдання дослідження	5
2 Огляд основних теоретичних означень та тверджень	7
2.1 Теорія ймовірностей	7
2.2 Теорія графів, означення моделі випадкового графа	11
2.3 Означення теорії чисел Рамсея	13
3 Випадкові графи	14
3.1 Теоретичні дослідження	14
3.2 Емпіричні дослідження	24
4 Числа Рамсея	36
Висновки	42
Список літератури	43

Анотація

Метою цієї кваліфікаційної роботи є дослідження властивостей випадкових графів та застосування ймовірнісного методу у теорії графів.

Дослідження починається з обговорення актуальності випадкових графів та ймовірнісного методу. Наведено основні визначення з теорії ймовірностей та теорії графів. Емпіричні дослідження проводяться шляхом реалізації алгоритмів на мові Python для обчислення різних властивостей випадкових графів, таких як очікувана кількість ребер, степенів вершин, трикутників, клік, гамільтонових шляхів/циклів. Наведено математичні вирази для очікуваних значень цих властивостей графів. З використанням ймовірнісного методу введено та розглянуто поняття чисел Рамсея, які характеризують найменші розміри графів з певними властивостями в термінах розфарбовування підграфів.

Робота поєднує строгий математичний аналіз з обчислювальними методами для виявлення закономірностей і тонкощів, які характеризують взаємодію між випадковістю і структурою в теорії графів. Емпіричні дослідження підтверджують теоретичні формули, виведені для властивостей випадкових графів.

1 Вступ

1.1 Актуальність

У теорії графів на перетині випадковості та структури виникає захоплююча галузь - дослідження властивостей теорії графів, зокрема на прикладі випадкових графів. Кваліфікаційна робота заглиблюється в широку тему випадкових графів, досліджуючи їхні властивості та поведінку, за допомогою ймовірного методу. Це має посприяти розумінню їхньої складної природи.

Поняття випадкового графа зараз відіграє одну з центральних ролей у дискретній математиці. Однак до середини 1950-х років не існувало систематичної теорії випадкових графів. Випадкові графи так чи інакше виникали як допоміжні засоби, проте вперше були описані в статті Ердеша та Реньї наприкінці 1950-х та на початку 60-х років, що заклали фундамент сучасної теорії випадкових графів. За півстоліття, що минуло з тих пір теорія випадкових графів перетворилася на актуальну дисципліну, багату як на фундаментальні результати, так і на додатки до різних галузей математики, інформатики, біології тощо. На сьогодні ретельно досліджено велику кількість моделей випадкових графів, починаючи від класичної моделі Ердеша-Реньї та її природних узагальнень і закінчуючи моделями веб графів, соціальних мереж, біологічних мереж, тощо. У цій роботі увагу зосереджено на моделі Ердеша-Реньї.

На відміну від детермінованих графів, де ребра точно визначені, випадкові графи вносять елемент випадковості в процес формування графа. Ця притаманна їм випадковість відкриває широке поле для дослідження, що допомагає вивчати появу різних структурних властивостей і поведінки.

Ймовірнісний метод, започаткований Ердешем є відмінним інструментом для доведення існування комбінаторних об'єктів з певними властивостями. Не зважаючи на те, що він базується на теорії ймовірностей - цей метод можна застосовувати для підтвердження теорем, які не мають жодного зв'язку з теорією ймовірностей, такі як вищезгадані випадкові графи. Загальний підхід може бути визначений наступним чином: замість безпосереднього виявлення "хорошого" об'єкта, метою є доведення існування такого об'єкта. Хоча явне виявлення такого об'єкта може виявитися неможливим або зайвим, ймовір-

нісний метод має на меті лише показати, що "хороший" об'єкт існує. Для цього розглядається випадковий об'єкт з відповідного ймовірнісного простору і обчислюється ймовірність того, що він відповідає заданим умовам. Якщо можливо довести, що ця ймовірність строго позитивна, то можна зробити висновок, що "хороший" об'єкт існує, оскільки в іншому випадку ймовірність була б рівна нулю, якщо всі об'єкти були б "поганими".

Для більшої глибини розуміння ширини застосування ймовірнісного методу у роботі розглянуто інший розділ теорії графів - числа Рамсея. Доведення оцінок чисел Рамсея демонструє, як поєднання теорії ймовірностей та теорії графів може призводити до нових результатів і відкриттів у цих галузях.

Ця робота має на меті зробити внесок в існуючий масив знань про теорію графів та ймовірнісний метод, розглядаючи: ключові питання, застосування, фундаментальні принципи. Поєднуючи строгий математичний аналіз з емпіричними дослідженнями, прагну розкрити основні закономірності та тонкощі, які характеризують взаємодію між випадковістю та структурою в теорії графів.

1.2 Мета, завдання дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження застосування ймовірнісного методу у доведенні та визначенні характеристик та теорем теорії випадкових графів та чисел Рамсея.

Це продемонстровано такими задачами:

- Знаходження математичного сподівання та дисперсії кількості ребер випадкового графа.
- Знаходження математичного сподівання та дисперсії степеня вершини випадкового графа.
- Знаходження математичного сподівання кількості трикутників та k -клік у випадковому графі.
- Знаходження математичного сподівання кількості k -дерев у випадковому графі.

- Знаходження математичного сподівання кількості ізольованих дерев-компонент заданої та довільної розмірності у випадковому графі.
- Знаходження математичного сподівання кількості ізольованих циклів-компонент довільної розмірності у випадковому графі.
- Доведення твердження про діаметр випадкових графів, що майже завжди рівний 2.
- Доведення твердження, що майже жоден випадковий граф не містить r незалежних вершин, при $r \geq (1 + \epsilon)(2 \ln n)/p$, $\epsilon > 0$ і $p = p(n) > 0$.
- Емпіричні дослідження теоретично знайдених математичних сподівань та дисперсій характеристик випадкового графа.
- Доведення теореми Рамсея. Оцінка зверху. Для натуральних m, n виконується нерівність $R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$.
- Доведення твердження, що для натуральних m, n виконується нерівність $R(m, n) \leq \binom{n+m-2}{m-1}$.
- Доведення оцінки знизу, що для натурального числа $k \geq 2$ виконується нерівність $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$.

2 Огляд основних теоретичних означень та тверджень

2.1 Теорія ймовірностей

Означення 2.1.1.

Ймовірнісний простір — це трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де

— Ω — довільна множина, елементи якої називаються елементарними подіями, сама множина називається простором елементарних подій.

— $\mathcal{F}$ — сигма-алгебра підмножин Ω , званих (випадковими) подіями;

— $\mathbb{P}$ — ймовірнісна міра або ймовірність, тобто сигма-адитивна скінченна міра, така що $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Лема 2.1.1.

Для будь-якого набору подій $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Означення 2.1.2.

Події A та B називаються **незалежними** якщо:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Означення 2.1.3.

Умовна ймовірність. Коли $A, B \in \mathcal{F}$ і $P(B) > 0$, умовна ймовірність події A при умові виконання події B позначається:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Означення 2.1.4.

Випадкова величина — це функція $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ визначена на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, що є $\mathbb{P}$ -вимірною. Іншими словами: змінна, значення якої визначається в результаті випробування або спостереження, при цьому ці значення є непередбачуваними або випадковими. Випадкова величина може набувати різних числових значень з певною ймовірністю.

Випадкові величини бувають двох основних типів:

Дискретні випадкові величини - набувають окремих, ізольованих числових значень.

Неперервні випадкові величини - можуть набувати будь-яких числових значень на певному інтервалі.

Означення 2.1.5.

Математичне сподівання (середнє значення) випадкової величини є однією з основних числових характеристик в теорії ймовірностей. Воно визначається як сума добутків кожного з можливих значень випадкової величини на його ймовірність. Для дискретної випадкової величини X , яка може приймати значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ відповідно, математичне сподівання визначається як:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

де $E(X)$ позначає математичне сподівання випадкової величини X .

Для неперервної випадкової величини X з щільністю ймовірності $f(x)$, математичне сподівання визначається як інтеграл по всій області визначення X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Властивості математичного сподівання:

Математичне сподівання константи дорівнює цій константі:

$$E(c) = c, \quad \text{де } c - \text{константа}$$

Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$E(X) = E(X), \quad \text{де } - \text{ константа}$$

Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Означення 2.1.6.

Незалежність випадкових величин. Дискретні випадкові величини X, Y є незалежними, коли для довільних двох множин $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in A \text{ and } Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

Лема 2.1.2.

Для незалежних випадкових величин X, Y виконується:

$$E(XY) = E(X) * E(Y)$$

Означення 2.1.7.

Дисперсія випадкової величини є мірою розсіювання її значень відносно її математичного сподівання. Для випадкової величини X з математичним сподіванням $E(X)$, дисперсія визначається як:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Властивості дисперсії:

Дисперсія константи дорівнює нулю:

$$D(c) = E[(c - E(c))^2] = E[(c - c)^2] = E[0] = 0, \quad \text{де } c - \text{ константа}$$

Сталий множник можна виносити за знак дисперсії:

$$D(cX) = E[(cX - E(cX))^2] = c^2 E[(X - E(X))^2] = c^2 D(X), \quad \text{де } c - \text{константа}$$

Дисперсію також можна виразити так:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Лема 2.1.3.

Для випадкових величин X, Y виконується:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)$$

У випадку більшої кількості випадкових величин:

$$D\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N D(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$

Cov або **коваріація** - це міра лінійної залежності між двома випадковими величинами. Вона показує, як значення однієї величини змінюються відносно значень іншої. Коваріація незалежних випадкових величин рівна нулю.

Для випадкових величин X, Y :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2.2 Теорія графів, означення моделі випадкового графа

Введемо деякі означення з теорії графів, які є необхідними для розуміння теми.

Означення 2.2.1.

Графом $G = (V, E)$ називається така пара впорядкованих множин V і E , де V — множина вершин, що є непорожньою і скінченною, а E — множина ребер, що складається з неупорядкованих пар елементів множини вершин.

Введемо такі позначення, які надалі будемо використовувати у роботі:

- $E(G)$ — множина ребер E графа G .
- $V(G)$ — множина вершин V графа G .
- (u, v) — ребро, що з'єднує вершини u і v .

Такі уточнення допомагають розуміти про ребра та вершини, якого графа йшлося.

Нехай n є натуральним числом, також існує ймовірність $0 \leq p \leq 1$. Розглянемо множину графів з множиною вершин $(1, \dots, n)$.

Означення 2.2.2.

Ймовірнісний простір $G(n, p)$, визначений відповідно до розподілу $P[(u, v) \in E(G)] = p$, де всі події попарно незалежні, називається *стандартною моделлю випадкового графа*, або просто *випадковим графом*. Цю модель часто застосовують у ймовірнісному методі для доведення існування деяких графів.

Теорема 2.2.1.

Якщо $p \in [0, 1]$ ймовірність графа з n вершинами і k ребрами $G(n, p)$ введемо поняття оберненої ймовірності $q = 1 - p$, що позначає ймовірність того, що ребро між вершинами проведено не буде. Тоді:

$$P(G) = p^k q^{\binom{n}{2} - k}$$

Тоді якщо Ω — множина усіх графів на n вершинах, то $P(\Omega) = 1$

Доведення.

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} p^k q^{\binom{n}{2}-k} = (p+q)^{\binom{n}{2}} = (p+1-p)^{\binom{n}{2}} = 1$$

2.3 Означення теорії чисел Рамсея

У теорії графів числа Рамсея грають важливу роль і вивчають характеристики, які вказують на найменші розміри графів, що мають задані властивості. Числа Рамсея названі на честь математика та філософа Френка П. Рамсея, який першим вивчав комбінаторні властивості цих чисел.

Ймовірнісний метод буде корисним для огляду теми чисел Рамсея. Розглянемо досить просте формулювання: нехай для заданої множини об'єктів імовірність того, що об'єкт не має деякої властивості, менша за 1. Тоді має існувати об'єкт, що має цю властивість. Це, насправді, і є формулювання *теорему про існування*.

Розглянемо сімейство F підмножин A_i скінченної основної множини X , які мають однакову розмірність $d \geq 2$. Сімейство F назовемо 2-розфарбовуваним, якщо існує таке розфарбування X у два кольори, що в кожній підмножині A_i є елементи обох кольорів. Зрозуміло, що не для кожного сімейства існує таке розфарбування. До прикладу, розглянемо всі d -елементні підмножини множини X , що складається з $2d - 1$ елементів.

Тоді за будь-якого розфарбування у два кольори знайдуться d елементів однакового розфарбування. З іншого боку, настільки ж зрозуміло, що кожне підсімейство 2-розфарбованого сімейства d -елементних множин саме є 2-розфарбовуваним. Тому нас цікавить найменше число $m = m(d)$, таке що існує сімейство з m множин, що не є 2-розфарбовуваним. Інакше кажучи, $m(d)$ - найбільше число, таке що кожне сімейство, яке містить менше за m множин, є 2-розфарбовуваним.

3 Випадкові графи

3.1 Теоретичні дослідження

Задача 3.1.1.

Знайдемо математичне сподівання кількості ребер графа $G(n, p)$.

Розв’язання.

Для зручності і кращого розуміння будемо користуватися індикаторними випадковими величинами. Нехай випадкова величина a — кількість ребер. Оскільки максимальна кількість ребер графа рівна $\binom{n}{2}$ можна виразити a через a_i — індикаторні випадкові величини наявності i -го ребра:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_{\binom{n}{2}}$$

Очевидно, що $E(a_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, відповідно:

$$E(a) = E\left(\sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} a_i\right) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} E(a_i) = \binom{n}{2} \cdot p$$

Задача 3.1.2.

Знайдемо математичне сподівання степеня вершини графа $G(n, p)$.

Розв’язання.

Оскільки визначення $G(n, p)$ є симетричним, вибір вершини не має значення. Схоже до задачі 3.1.1 вводимо аналогічні індикаторні випадкові величини, але випадкова величина a — степінь вершини. А оскільки максимально можливий степінь вершини рівний $n - 1$:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

Відповідно:

$$E(a) = (n - 1) \cdot p$$

Задача 3.1.3.

Знайдемо математичне сподівання кількості трикутників в $G(n, p)$.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина a — кількість трикутників. Оскільки максимальна кількість трикутників графа рівна $\binom{n}{3}$ можна виразити a через a_i — індикаторні випадкові величини наявності i -го трикутника:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_{\binom{n}{3}}$$

У цьому випадку:

$$E(a_i) = 1 \cdot p^3 + 0 \cdot p^2q + 0 \cdot pq^2 + 0 \cdot q^3 = p^3$$

Відповідно:

$$E(a) = E\left(\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} a_i\right) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} E(a_i) = \binom{n}{3} \cdot p^3$$

Задача 3.1.4.

Знайдемо математичне сподівання кількості клік розмірності k в $G(n, p)$.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина a — кількість клік розмірності k . Оскільки максимальна кількість таких клік в графі рівна $\binom{n}{k}$ можна виразити a через a_i — індикаторні випадкові величини наявності i -ї кліки розмірності k :

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_{\binom{n}{k}}$$

Оскільки кількість ребер у кліці дорівнює $\binom{k}{2}$ можемо виразити математичне сподівання так:

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot p^{\binom{k}{2}}$$

Задача 3.1.5.

Знайдемо математичне сподівання кількості Гамільтонових шляхів в $G(n, p)$.

Розв’язання.

Нехай випадкова величина a — кількість Гамільтонових шляхів. Оскільки максимальна кількість таких шляхів у неорієнтованому графі рівна $n!/2$ (кожен Гамільтонів шлях має відповідний зворотний шлях, тому ділимо загальну кількість перестановок вершин на 2, щоб не рахувати один і той самий шлях двічі) можна виразити a через a_i — індикаторні випадкові величини наявності i -го Гамільтонового шляху:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_{n!/2}$$

Оскільки кількість ребер у шляхові дорівнює $(n-1)$ можемо виразити математичне сподівання так:

$$E(a) = \frac{n!}{2} \cdot p^{n-1}$$

Задача 3.1.6.

Знайдемо математичне сподівання кількості Гамільтонових циклів в $G(n, p)$.

Розв’язання.

Нехай випадкова величина a — кількість Гамільтонових циклів. Оскільки максимальна кількість таких циклів у неорієнтованому графі рівна $(n-1)!/2$ (мінус вершина, з якої починається і якою закінчується цикл) можна виразити a через a_i — індикаторні випадкові величини наявності i -го Гамільтонового циклу:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_{(n-1)!/2}$$

Оскільки кількість ребер у шляхові дорівнює (n) можемо виразити математичне сподівання так:

$$E(a) = \frac{(n-1)!}{2} \cdot p^n$$

Не важко здогадатися, що індикатори є просто допоміжними поняттями, які допомагають краще зрозуміти комбінаторну і ймовірнісну оцінку характеристик та властивостей.

Для наступних задач потрібно буде оцінити кількість можливих дерев у графі на n вершинах. Для цього розглянемо теорему Келі.

Теорема Келі

Кількість можливих зафіксованих дерев на n вершинах дорівнює n^{n-2}

Задача 3.1.7.

Знайдемо математичне сподівання кількості дерев розмірності k в $G(n, p)$. Варто зазначити що нас цікавлять всі можливі k -підграфи, які є деревами, тобто можуть існувати навіть у повному графі.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина a — кількість дерев розмірності k . Як і в задачі 3.1.4 Ми фіксуємо кількість підграфів на k вершинах рівну $\binom{n}{k}$. Максимальна кількість різних дерев на цих зафіксованих k вершинах рівна k^{k-2} з *теорему Келі*. І оскільки кількість ребер у дереві дорівнює $(k-1)$ можемо виразити математичне сподівання так:

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1}$$

Задача 3.1.8.

Знайдемо математичне сподівання кількості ізольованих дерев-компонент розмірності k в $G(n, p)$.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина a — кількість таких дерев-компонент розмірності k . Як і в задачі 3.1.5 фіксуємо кількість підграфів на k вершинах рівну $\binom{n}{k}$. Максимальна кількість різних дерев на цих зафіксованих k вершинах рівна k^{k-2} з *теорему Келі*. Кількість ребер у дереві дорівнює $(k - 1)$.

Але на відміну від попередньої задачі ще необхідно переконатись, що зайвих ребер проведено не буде. Розглянемо кількість непроведених ребер всередині k -підграфа. Оскільки всередині компоненти не повинно бути додаткових ребер між вершинами окрім тих, що вже формують дерево: усі можливі ребра в підграфі - $\binom{k}{2}$ і від цієї кількості віднімаємо ребра дерева. $\binom{k}{2} - (k - 1)$.

Також важливо щоб компонента залишалась ізольованою, тобто розглянемо кількість непроведених ребер до вершин поза компонентою для кожної вершини k -підграфа. Досить очевидно що це дорівнює $k * (n - k)$. Маючи все це можемо виразити математичне сподівання:

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1} \cdot q^{\binom{k}{2} - (k-1) + k(n-k)}$$

Задача 3.1.9.

Знайдемо математичне сподівання кількості вершин, що належать ізольованим деревам-компонентам будь-якої розмірності в $G(n, p)$.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина a_v — кількість вершин, що належать ізольованим деревам-компонентам. Оскільки у задачі 3.1.8 вже обчислено математичне сподівання кількості таких дерев-компонент $E(a_t)$ можна обчислити $E(a_v)$ шляхом домноження на k (оскільки кожне дерево розмірності k складається з k вершин) і сумуванням для всіх можливих k :

$$E(a_v) = \sum_{k=1}^n k \cdot E(a_t) = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1} \cdot q^{\binom{k}{2} - (k-1) + k(n-k)}$$

Задача 3.1.10.

Знайдемо математичне сподівання кількості вершин, що належать ізольова-

ним циклам-компонентам будь-якої розмірності в $G(n, p)$.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина a_v — кількість вершин, що належать ізольованим циклам-компонентам. Використаємо підхід з *задачі 3.1.9* для перебору усіх можливих розмірностей циклу (від 3 до n), відповідно спочатку сформулюємо математичне сподівання кількості ізольованих циклів-компонент розмірності k :

Позначимо відповідну випадкову величину через a_c . Як і в попередніх задачах фіксуємо кількість підграфів на k вершинах рівну $\binom{n}{k}$. Із *задачі 3.1.6* відомо що є $\frac{(k-1)!}{2}$ способів розмістити k вершин у циклі. Аналогічно до *задачі 3.1.8* визначаємо, що у компонентах зв'язності кількість непроведених ребер рівна $\binom{k}{2} - k + k(n-k)$. Маючи все це можемо виразити математичне сподівання:

$$E(a_c) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot p^k \cdot q^{\binom{k}{2} - k + k(n-k)}$$

Звідси знаходимо $E(a_v)$:

$$E(a_v) = \sum_{k=3}^n k \cdot E(a_c) = \sum_{k=3}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot p^k \cdot q^{\binom{k}{2} - k + k(n-k)}$$

Задача 3.1.11.

Знайдемо дисперсію степеня вершини графа $G(n, p)$.

Розв'язання.

Як і в *задачі 3.1.2* позначимо випадкову величину a — степінь вершини, який виражаємо через суму a_i — індикаторних випадкових величин наявності i -го ребра, а максимальний степінь вершини $n - 1$. Тоді:

$$D(a) = D\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} D(a_i)$$

Дисперсію $D(a)$ степеня вершини графа можна обчислити за припущення, що ребра є незалежними. Оскільки a є сумою $n - 1$ незалежних випадкових величин Бернуллі (кожна з ймовірністю успіху p), кожна з дисперсією

$p(1 - p)$, дисперсія a є просто сумою дисперсій цих $n - 1$ змінних.

Отже, дисперсія $D(a)$ визначається за формулою:

$$D(a) = (n - 1)(p - p^2)$$

Задача 3.1.12.

Знайдемо дисперсію кількості трикутників в графі $G(n, p)$.

Розв'язання.

Як і в задачі 3.1.3 позначимо випадкову величину a — кількість трикутників, який виражаємо через суму a_i — індикаторних випадкових величин наявності i -го трикутника, а максимальна кількість трикутників в графі рівна $\binom{n}{3}$. Тоді:

$$D(a) = D\left(\sum_{i=1}^N a_i\right) = \sum_{i=1}^N D(a_i) + \sum_{i \neq j} Cov(a_i, a_j)$$

$E(a_i) = p^3$ (із задачі 3.1.3), тоді за формулою дисперсії випадкової величини Бернуллі:

$$D(a_i) = p^3 - p^6$$

Тепер потрібно розглянути два випадки для знаходження $Cov(a_i, a_j)$.

Випадок 1.

Якщо a_i і a_j незалежні випадкові величини (їм відповідають трикутники, що реберно не перетинаються). Тоді $Cov(a_i, a_j) = 0$ і нас не цікавить оцінка кількості таких випадків.

Випадок 2.

Якщо a_i і a_j залежні випадкові величини (їм відповідають трикутники, що ребром перетинаються). Тоді із задачі 3.1.3 $E(a_i a_j) = p^5$. Відповідно обчислимо коваріацію:

$$Cov(a_i, a_j) = E(a_i a_j) - E(a_i)E(a_j) = p^5 - p^6$$

Кожна така пара трикутників, що перетинаються, має чотири вершини $\binom{n}{4}$, а кожен набір з чотирьох вершин відповідає 12 таким парам (будь-яке з ребер(6) може бути спільним у два порядки).

Відповідно можемо виразити $D(a)$:

$$D(a) = \binom{n}{3} \cdot (p^3 - p^6) + 12 \binom{n}{4} \cdot (p^5 - p^6)$$

Задача 3.1.13. Діаметр випадкових графів.

Відомо, що діаметр випадкового графа майже завжди рівний 2.

Розв'язання.

Для доведення цього твердження потрібно дослідити, що при $n \rightarrow \infty$ ймовірність того що граф має діаметр 2 рівна 1. Для цього обчислимо ймовірності того, що діаметр графа рівний 1 (граф повний) і діаметр графа більший 2.

$$P(d(G) = 1) = p^{\binom{n}{2}}$$

для $P(d(G) > 2)$ розіб'ємо ймовірність на об'єднання подій - шлях між парою вершин буде більше 2.

$$P(d(G) > 2) = P\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{d(i, j) > 2\}\right)$$

Ймовірність події, що відстань між двома вершинами більша 2 можна записати таким чином:

$$P(i \text{ та } j \text{ не інцидентні}) \cdot (1 - P(\text{якась } w \text{ інцидентна } i \text{ та } j))^{n-2}$$

Відповідно:

$$\begin{aligned} P(d(G) > 2) &= P\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{d(i, j) > 2\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} q \cdot (1 - p^2)^{n-2} = \binom{n}{2} \cdot q \cdot (1 - p^2)^{n-2} \end{aligned}$$

Можемо записати $P(d(G) = 2)$:

$$P(d(G) = 2) = 1 - p^{\binom{n}{2}} - \binom{n}{2} \cdot q \cdot (1 - p^2)^{n-2}$$

Обчислимо значення ймовірності при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - p^{\binom{n}{2}} - \binom{n}{2} \cdot q \cdot (1 - p^2)^{n-2} \right) = \\ = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p^{\frac{n(n-1)}{2}} \right) - q \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n-1)}{2 \left(\frac{1}{1-p^2} \right)^{n-2}} \right) \end{aligned}$$

Скористаємось властивістю, що показникова функція з основою степеня > 1 зростає швидше за степеневу, для останнього доданка:

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall a > 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

І отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(d(G) = 2) = 1$$

Доведено ■.

Задача 3.1.14.

Нехай $\epsilon > 0$ і $p = p(n) > 0$, і нехай $r \geq (1 + \epsilon)(2 \ln n)/p$ цілочисельна функція від n . Довести що майже жоден граф $G(n, p)$ не містить r незалежних вершин. **Розв'язання.**

Для доведення цього твердження потрібно дослідити, що при $n \rightarrow \infty$ ймовірність знайти набір з r незалежних вершин рівна 0.

Для того, щоб набір з r вершин був незалежним, ніякі дві вершини в ньому не можуть мати спільне ребро. Ймовірність того, що певна множина r вершин є незалежною, дорівнює $(1 - p)^{\binom{r}{2}}$

Нехай випадкова величина a — кількість незалежних наборів розмірності r в $G(n, p)$.

$$P(a \geq 1) \leq \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}}$$

Скористаємось відомою нерівністю:

$$\forall p \geq 0 : 1 - p \leq e^{-p}$$

Тоді:

$$(1-p)^{\binom{r}{2}} \leq e^{-p\binom{r}{2}}$$

Також:

$$\binom{n}{r} \leq n^r$$

Отже:

$$\binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \leq n^r (e^{-p})^{\binom{r}{2}} = n^r e^{-p\frac{r(r-1)}{2}} = \left(n e^{-p\frac{r-1}{2}} \right)^r$$

Оцінимо $n e^{-p\frac{r-1}{2}}$

$$\begin{aligned} n e^{\frac{-pr}{2} + \frac{p}{2}} &\leq n e^{\frac{-p(1+\epsilon)(2\ln n)}{2p} + \frac{p}{2}} = n e^{-(1+\epsilon)\ln n} \cdot e^{\frac{p}{2}} = \\ &= n \cdot n^{1-\epsilon} \cdot e^{\frac{p}{2}} = n^{-\epsilon} \cdot e^{\frac{p}{2}} \leq \frac{\sqrt{e}}{n^{\epsilon}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Тоді:

$$\left(n e^{-p\frac{r-1}{2}} \right)^r \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Отже:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \geq 1) = 0$$

Доведено ■.

3.2 Емпіричні дослідження

У цьому розділі наведено результати емпіричного дослідження властивостей випадкових графів, що були розглянуті вище. Для цього мною було розроблену просту програму на мові програмування Python. Клас RandomGraph слугує для генерації випадкових графів з n вершинами, де між будь-якими двома вершинами існує ребро з ймовірністю p . Клас реалізований з використанням бібліотеки NetworkX.

```
class RandomGraph:
    def __init__(self, n, p):
        self.n = n
        self.p = p
        self.graph = self.generate_graph()

    def generate_graph(self):
        G = nx.Graph()
        G.add_nodes_from(range(self.n))

        for i in range(self.n):
            for j in range(i+1, self.n):
                if random.random() < self.p:
                    G.add_edge(i, j)

        return G

def generate_random_graphs(n, p, num_graphs):
    graphs = []
    for _ in range(num_graphs):
        graph = RandomGraph(n, p)
        graphs.append(graph)
    return graphs
```

Задача 3.1.1.

Математичне сподівання кількості ребер графа $G(n, p)$.

$$E(a) = \binom{n}{2} \cdot p$$

Обчислення кількості ребер графа вже закладено в бібліотеку, тому використовується така проста функція:

```
def get_edge_count(self):
    return len(self.graph.edges())
```

То ж результати після обчислення для 10 000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
10	0.5	22.5	22.478
100	0.1	495	495.124
10	0.8	980	980.076

Задача 3.1.2.

Математичне сподівання степеня вершини графа $G(n, p)$.

$$E(a) = (n - 1) \cdot p$$

У обчисленнях розглядається випадкова вершина графа. Обчислення степеня вершини вже закладено в бібліотеку:

```
def get_random_vertex_degree(self):
    random_vertex = random.choice(list(self.graph.nodes()))
    return self.graph.degree(random_vertex)
```

То ж результати після обчислення для 10 000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
10	0.5	4.5	4.519
100	0.1	9.9	9.913
10	0.8	7.2	7.203

Задача 3.1.3.

Математичне сподівання кількості трикутників в $G(n, p)$.

$$E(a) = \binom{n}{3} \cdot p^3$$

Функція перебирає всі можливі комбінації трьох вершин у графі. Для кожної комбінації створюється підграф, породжений цими трьома вершинами, і перевіряє, чи кількість ребер у підграфі дорівнює максимально можливій кількості ребер у трикутнику (трьом). Якщо умова виконується, то збільшується змінна-лічильник. Після перебору всіх комбінацій метод повертає кінцеве значення лічильника, яке представляє загальну кількість трикутників у графі:

```
def num_triangles(self):
    nodes = list(self.graph.nodes())
    count = 0
    for nodes_in_clique in combinations(nodes, 3):
        if self.graph.subgraph(nodes_in_clique)
            .number_of_edges() == 3 * (3 - 1) // 2:
            count += 1
    return count
```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
10	0.5	15	14.807
3	0.65	0.275	0.279
10	0.8	61.44	61.428

Задача 3.1.4.

Математичне сподівання кількості клік розмірності k в $G(n, p)$.

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot p^{\binom{k}{2}}$$

Як і у випадку трикутників іде перебір всіх комбінацій k вершин у графі. По суті, це загальна версія попередньо розглянутої функції:

```
def num_k_cliques(self, k):
    nodes = list(self.graph.nodes())
    count = 0
    for nodes_in_clique in combinations(nodes, k):
        if self.graph.subgraph(nodes_in_clique)
            .number_of_edges() == k * (k - 1) // 2:
            count += 1
    return count
```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	k	Мат. сподівання	Обчислене значення
10	0.5	5	0.246	0.238
10	0.9	5	87.867	86.987
15	0.2	4	0.087	0.082

Задача 3.1.5.

Математичне сподівання кількості Гамільтонових шляхів в $G(n, p)$.

$$E(a) = \frac{n!}{2} \cdot p^{n-1}$$

Функція обчислює кількість Гамільтонових шляхів у графі. Обчислюються всі можливі перестановки вершин у графі. Для кожної перестановки виконується ітерація по вершинах і перевіряється, чи існує ребро між послідовними вершинами в перестановці. Якщо таке ребро існує, поточна вершина додається до шляху. Якщо довжина шляху стає рівною кількості вершин мінус один, це означає, що знайдено Гамільтонів шлях, і лічильник збільшується. Нарешті, метод повертає кількість, поділену на два, щоб врахувати той факт, що кожен Гамільтонів шлях можна пройти в обидвох напрямках.

```
def num_hamiltonian_paths(self):
    count = 0
    nodes = list(self.graph.nodes())
    for perm in permutations(nodes):
        path = []
        for i in range(len(perm)):
            u = perm[i]
            if i == len(perm) - 1:
                break
            v = perm[i + 1]
            if self.graph.has_edge(u, v):
                path.append(u)
            else:
                break
        if len(path) == len(perm) - 1:
            count += 1
    return count/2
```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
6	0.5	11.25	10.833
8	0.1	0.002	0.002
5	1	60	60

Задача 3.1.6.

Математичне сподівання кількості Гамільтонових циклів в $G(n, p)$.

$$E(a) = \frac{(n-1)!}{2} \cdot p^n$$

Ця функція схожа на попередню, основна відмінність полягає в умові, яка використовується для перевірки того, чи знайдено допустимий цикл. У функції `num-hamiltonian-cycles` допустимий цикл вважається знайденим, якщо довжина шляху дорівнює кількості вершин, оскільки остання вершина повинна бути з'єднана з першою, щоб утворився цикл. Крім того, остаточний підрахунок ділиться на $2 \cdot \text{self.n}$, а не просто на 2, де `self.n` - кількість вершин у графі, щоб врахувати той факт, що кожен гамільтонів цикл може бути пройдений в обох напрямках і може починатися з будь-якої вершини.

```
def num_hamiltonian_cycles(self):
    count = 0
    nodes = list(self.graph.nodes())
    for perm in permutations(nodes):
        path = []
        for i in range(len(perm)):
            u = perm[i]
            if i == len(perm) - 1:
                v = perm[0]
            else:
                v = perm[i + 1]
            if self.graph.has_edge(u, v):
```

```

        path.append(u)
    else:
        break
    if len(path) == len(perm):
        count += 1
return count/(2*self.n)

```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
6	0.5	0.938	0.921
8	0.25	0.038	0.048
5	1	12	12

Задача 3.1.7.

Математичне сподівання кількості дерев розмірності k в $G(n, p)$.

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1}$$

Функція перераховує всі підмножини з $k - 1$ ребер вихідного графа і будує підграфи з цих підмножин ребер. Потім перевіряється, чи кожен підграф є деревом з рівно k вершинами, збільшуючи лічильник для кожного знайденого підграфа.

```

def num_k_trees(self, k):
    count = 0
    edges = list(self.graph.edges())
    for edge_subset in combinations(edges, k-1):
        subgraph = nx.Graph(edge_subset)
        if nx.is_tree(subgraph) and len(subgraph.nodes()) == k:
            count += 1
    return count

```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	k	Мат. сподівання	Обчислене значення
4	0.6	3	4.32	4.218
4	0.6	4	3.456	3.492
6	0.2	3	2.4	2.407

Задача 3.1.8.

Математичне сподівання кількості ізольованих дерев-компонент розмірності k в $G(n, p)$.

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1} \cdot q^{\binom{k}{2} - (k-1) + k(n-k)}$$

Функція перераховує всі k -розмірні компоненти зв'язності. Якщо така компонента містить $k - 1$ ребер збільшується лічильник для кожної знайденої компоненти .

```
def num_k_isolated_trees(self, k):
    count = 0
    components = [c for c in
nx.connected_components(self.graph) if len(c) == k]
    for component in components:
        if self.graph.subgraph(component)
        .number_of_edges() == k - 1:
            count += 1
    return count
```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	k	Мат. сподівання	Обчислене значення
4	0.6	3	0.110	0.096
4	0.6	4	0.221	0.217
6	0.2	3	0.257	0.246

Задача 3.1.9.

Математичне сподівання кількості вершин, що належать ізольованим деревам-компонентам будь-якої розмірності в $G(n, p)$.

$$E(a_v) = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1} \cdot q^{\binom{k}{2} - (k-1) + k(n-k)}$$

Функція обчислює загальну кількість вершин, присутніх у всіх ізольованих деревах заданого графа `self.graph`. Спочатку визначаються всі компоненти зв'язності у графі. Для кожної компоненти зв'язності перевіряється, чи є підграф породжений компонентою-деревом, перевіряючи, чи кількість ребер дорівнює кількості вершин мінус один. Якщо компонента є деревом, він додає кількість вершин у цьому компоненті до поточного підсумку. Нарешті, метод повертає загальну кількість вершин, присутніх у всіх ізольованих деревах, знайдених у графі.

```
def get_isolated_tree_vertex_counts(self):
    total_vertices = 0
    components = [c for c in nx.connected_components(self.graph)]
    for component in components:
        if self.graph.subgraph(component)
            .number_of_edges() == len(component) - 1:
            total_vertices += len(component)
    return total_vertices
```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
6	0.5	0.7	0.764
8	0.25	3.542	3.624
5	1	0	0

Задача 3.1.10.

Математичне сподівання кількості вершин, що належать ізольованим циклам-компонентам будь-якої розмірності в $G(n, p)$.

$$E(a_v) = \sum_{k=3}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot p^k \cdot q^{\binom{k}{2} - k + k(n-k)}$$

Функція ітерується по усіх зв'язних компонентах графа. Для кожної зв'язної компоненти створюється підграф і перевіряється, чи задовольняє він трьом умовам: має принаймні три вершини, є зв'язним і має кількість ребер, що дорівнює кількості вершин. Якщо ці умови виконуються, то виконується ітерація по вершинах підграфа. Якщо всі вершини мають степінь 2, це означає, що підграф є ізольованим циклом. У цьому випадку він додає кількість вершин у підграфі до поточного підсумку. Після перевірки всіх з'єднаних компонент метод повертає остаточну суму, яка представляє собою загальну кількість вершин, присутніх в ізольованих циклах.

```
def get_isolated_cycle_vertex_counts(self):
    total_vertices = 0
    for component in nx.connected_components(self.graph):
        subgraph = self.graph.subgraph(component)
        if len(component) >= 3 and nx.is_connected(subgraph) and
        len(subgraph.edges()) == len(component):
            all_degree_two = True
            for node in subgraph.nodes():
                if subgraph.degree(node) != 2:
                    all_degree_two = False
```

```

        break
    if all_degree_two:
        total_vertices += len(component)
return total_vertices

```

То ж результати після обчислення для 1000 випадкових графів:

n	p	Мат. сподівання	Обчислене значення
6	0.6	0.013	0.008
5	0.35	0.201	0.188
3	0.99	2.91	2.892

Задача 3.1.11.

Дисперсія степеня вершини графа $G(n, p)$.

$$D(a) = (n - 1)(p - p^2)$$

Використовується функція з емпіричного дослідження *задачі 3.1.2*. Дисперсія генерованої вибірки обчислюється за допомогою системної бібліотеки python `statistics.variance`. То ж результати після обчислення для 10 000 випадкових графів:

n	p	Дисперсія	Обчислене значення
10	0.5	2.25	2.308
100	0.1	8.91	8.987
10	0.8	1.44	1.429

Задача 3.1.12.

Дисперсія кількості трикутників в графі $G(n, p)$.

$$D(a) = \binom{n}{3} \cdot (p^3 - p^6) + 12 \binom{n}{4} \cdot (p^5 - p^6)$$

Використовується функція з емпіричного дослідження *задачі 3.1.3*. То ж результати після обчислення для 10 000 випадкових графів:

n	p	Дисперсія	Обчислене значення
10	0.5	52.5	51.725
3	0.65	0.199	0.209
10	0.8	195.133	196.795

4 Числа Рамсея

Теорема 4.1.

Кожне сімейство, що містить не більше 2^{d-1} множин з d елементів є 2-розфарбовуваним, тобто

$$m(d) > 2^{d-1}$$

Доведення.

Нехай F сімейство, що складається з не більше ніж з 2^{d-1} множин розмірності d кожна. Розглянемо розфарбування множини X випадковим чином у два кольори, вважаючи що усі розфарбування однаково ймовірні. Для кожної множини $A \in F$ позначимо як E_A подію, коли всі елементи множини A розфарбовані однаково. Оскільки ми розглядаємо 2-розфарбування існує два такі варіанти розфарбування, відповідно:

$$P(E_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1}$$

Звідси випливає, що при $m = |F| \leq 2^{d-1}$ (перетини подій E_A не порожні) виконується нерівність з оцінки ймовірності:

$$P\left(\bigcup_{A \in F} E_A\right) < \sum_{A \in F} P(E_A) = m \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1} \leq 1$$

Звідси, існує 2-розфарбування множини X без 1-кольорових множин в F , що і є умовою 2-розфарбування. Доведено ■.

Означення 4.1.

Для натуральних чисел m, n число Рамсея $R(m, n)$ це найменше натуральне число N , що при будь-якому розфарбуванні ребер повного графа на N вершинах у два кольори знайдеться повний підграф розмірності m з ребрами першого кольору, або повний підграф розмірності n з ребрами другого кольору.

Також існує альтернативне означення:

Число Рамсея $R(m, n)$ це найменше натуральне число N , що для будь-якого графа G на N вершинах або в G буде міститися K_m , або в $\overline{G}$ буде міститися K_n .

З означення очевидно, що для будь-яких натуральних m, n :

$$R(m, n) = R(n, m)$$

$$R(1, n) = 1$$

$$R(2, n) = n$$

Існують випадки, коли числа Рамсея можуть бути точно визначені, наприклад: $R(3, 3) = 6$. Це означає, що в будь-якому розфарбованому графі з 6 вершинами ми знайдемо або підграф першого кольору з 3 вершинами, або підграф другого кольору з 3 вершинами.

Однак багато чисел Рамсея досі залишаються невідомими. Визначення точних значень чисел Рамсея є важливою відкритою проблемою в комбінаториці та теорії графів.

Теорема 4.2. Теорема Рамсея. Оцінка зверху

Для довільних натуральних m, n існує число Рамсея $R(m, n)$, тоді

$$R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$$

Доведення.

Нехай $N = R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$ і відповідно розглянемо довільно розфарбований червоно-синій граф K_N . Для зручності та наочності доведення позначатимемо значенням m кількість червоних ребер, а значенням n кількість синіх ребер очевидно, що в загальному випадку це значення не має. Візьмемо якусь вершину v з цього графа. Оскільки граф повний, кількість ребер, що виходить з вершини рівна $N - 1$. Розглянемо множину вершин $|A|$, яка сполучається з v червоними ребрами і множину $|B|$, яка сполучається з v синіми ребрами.

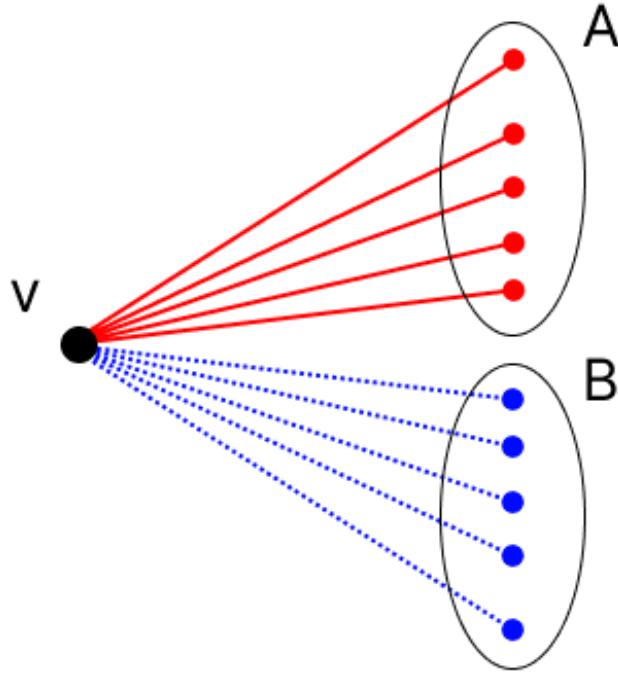


Рис. 1: допоміжне зображення для доведення Теорема 4.2.

З властивості графа зрозуміло, що $|A| + |B| = N - 1$, відповідно:

$$|A| + |B| = R(m - 1, n) + R(m, n - 1) - 1$$

Звідси виходить, що або $|A| \geq R(m - 1, n)$, або $|B| \geq R(m, n - 1)$. Розглянемо один з варіантів:

Якщо $|A| \geq R(m - 1, n)$, то за означенням чисел Рамсея $R(m - 1, n)$ вказує на те що в A існує підмножина червоного кольору розмірності $m - 1$, що разом з v формує повний червоний граф K_m , або в A існує підмножина синього кольору розмірності n , що $i \in K_n$. Альтернативний випадок розглядається по аналогії. Звідси, у нашому повному графі розмірності N K_N виконується властивість (m, n) . Нерівність доведено ■.

Теорема 4.3.

Для натуральних чисел m, n виконується нерівність:

$$R(m, n) \leq \binom{n+m-2}{m-1}$$

Доведення.

Доведемо за методом математичної індукції по $k = m + n$.

База індукції: $k = 2, m = n = 1$

$$R(1, 1) = 1 \leq \binom{1+1-2}{1-1} = \binom{0}{0} = 1$$

Індукційний перехід: $k \rightarrow k + 1, m + n = k + 1$

Можемо скористатися нерівністю з теореми 4.2:

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

Розглянемо $R(m-1, n)$ і $R(m, n-1)$, відповідно $k = m + n - 1$, тобто можемо скористатися припущення індукції:

$$\begin{aligned} R(m, n) &\leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \\ &\leq \binom{n+m-1-2}{m-2} + \binom{n-1+m-2}{m-1} \end{aligned}$$

Застосуємо властивість $\binom{k+1}{l} = \binom{k}{l} + \binom{k}{l-1}$ до нашої нерівності:

$$\binom{n+m-3}{m-2} + \binom{n+m-3}{m-1} = \binom{n+m-2}{m-1}$$

Доведено ■.

Теорема 4.4. Оцінка знизу

Для будь-якого натурального числа $k \geq 2$ виконується нерівність:

$$R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$$

Доведення.

З властивості $R(2, n) = n$ Відомо, що $R(2, 2) = 2$. З теореми 4.2 слідує оцінка $R(3, 3) \leq 6$, відповідно не складно обчислити, що $R(3, 3) = 6$. Обидва випадки задовільняють нерівність, тож будемо доводити для $k \geq 4$.

Доведемо за допомогою ймовірнісного методу. Нехай $N < 2^{\frac{k}{2}}$. Розглянемо усі можливі розфарбування, і будемо розфарбовувати ребра у червоний та синій кольори з ймовірністю $\frac{1}{2}$ відповідно. Ймовірнісний простір складається з $2^{\binom{N}{2}}$ елементів (розфарбувань), відповідно всі розфарбування мають однакову ймовірність рівну $2^{-\binom{N}{2}}$. Позначимо якусь множину A , що містить k вершин. Відповідно розглянемо подію A_{red} , таку що всі вершини з A з'єднані червоними ребрами. Ймовірність цієї події обчислимо, шляхом виключенням ребер "зафіксованих" для множини A :

$$\frac{2^{\binom{N}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{N}{2}}} = 2^{-\binom{k}{2}}$$

Відповідно, розглянемо ймовірність P_{red} того, що існує множина вершин розмірності k , всі ребра якої червоні. Оцінімо цю ймовірність так:

$$P_{red} = P\left(\bigcup_{|A|=k} A_{red}\right) \leq \sum_{|A|=k} P(A_{red}) = \binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$$

Тепер потрібно розглянути ще одну допоміжну оцінку:

$$\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}}$$

Доводиться вона шляхом порівняння зі значенням зі збільшеним чисельни-

ком і зменшеним знаменником, що вочевидь буде більшим значенням:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(n-k)!} = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k(k-1)\dots 2} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}}$$

Отож, з умови доведення маємо $k \geq 4$ і $N < 2^{\frac{k}{2}}$, використавши $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}}$ більш точно оцінимо P_{red} :

$$\binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}} 2^{-\binom{k}{2}} < 2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2} - k + 1} = 2^{-\frac{k}{2} + 1} \leq \frac{1}{2}$$

Таким чином знаходимо що $P_{red} < \frac{1}{2}$. Очевидно, що P_{blue} (ймовірність того, що існує множина вершин розмірності k , всі ребра якої сині) за симетрією також буде менше ніж $\frac{1}{2}$. Як наслідок, при $N < 2^{\frac{k}{2}}$: $P_{red} + P_{blue} < 1$. Відповідно має існувати розфарбування без повних червоних і синіх графів K_k . Звідси випливає, що повний граф K_N не володіє досліджуваною властивістю (k, k) . Доведено ■.

Висновки

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню застосування ймовірнісного методу у доведенні та визначенні характеристик та теорем теорії випадкових графів та чисел Рамсея.

У другому розділі розглядалися основні означення з теорії ймовірностей (підрозділ 2.1), теорії графів, випадкових графів (підрозділ 2.2), чисел Рамсея (підрозділ 2.3).

У третьому розділі було проведено детальне дослідження ймовірнісних характеристик випадкових графів, зокрема моделі Ердеша-Реньї p , за допомогою ймовірнісного методу. Увага була приділена статистичним характеристикам випадкових величин що позначають кількість різних структур у графах: ребра, вершини, трикутники, кліки, Гамільтонові шляхи та цикли, а також ізольовані дерева та цикли. Було досліджено такі властивості випадкових графів як діаметр, кількість незалежних вершин.

У четвертому розділі розглядалися теореми та властивості з теорії чисел Рамсея. Головним результатом роботи викладеної у цьому розділі було висвітлення застосування ймовірнісного методу у доведенні оцінки знизу числа Рамсея.

Отже ця робота детально розглядає випадкові графи, числа Рамсея та застосування ймовірнісного методу в доведенні властивостей з цих теоретичних областей. Матеріали також можна використовувати на математичних семінарах, факультативних заняттях та при підготовці до олімпіад.

Список літератури

1. *Reinhard Diestel.*, Graph Theory. 3rd ed., Springer-Verlag, 2005.
2. *Alan Frieze, Michal Karonski.*, Introduction to random graphs, Carnegie Mellon University, 2024.
3. *Kristina Buschur.*, Introduction to Ramsey Theory, 2011.
4. *Eduard Bosch, Jan-Hendrik Evertse.*, Ramsey theory and applications, Universiteit Leiden, Leiden, 2018.
5. *James Odziemiec Dickson.*, An Introduction to Ramsey Theory on Graphs, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2011
6. *Jiri Matousek, Jan Vondrák.*, The Probabilistic Method, Lecture notes, Department of Applied Mathematics, Charles University Prague, 2008.
7. *N. Alon and J. Spencer.*, The Probabilistic Method, J. Wiley and Sons, New York, NY, 4th edition, 2015.
8. *Aric A. Hagberg, Daniel A. Schult and Pieter J. Swart.*, “Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX”, in Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008), Gäel Varoquaux, Travis Vaught, and Jarrod Millman (Eds), (Pasadena, CA USA), pp. 11–15, Aug 2008