УДК 519.21

І.В.Берьозкіна, Н.Ю. Щестюк, Канєвська Ю. І

ФЕНОМЕН ХАРСТА І ГІПОТЕЗА ФРАКТАЛЬНОГО РИНКУ

У статті розглянуто R-S аналіз реальних фінансових даних. Знайдено показники Харста для руху цін, які підтверджують гіпотезу існування фрактального ринку.

Вступ. Наразі, стан сучасної фінансової математики можна визначити як період «накопичення фактів», «уточнення моделей». І в цьому розумінні, першочергова роль належить новим методам накопичення та зберігання статистичних даних, їх обробки та аналізу з застосуванням сучасної обчислювальної техніки, що дає емпіричний матеріал для аналізу різних концепцій щодо функціонування ринку цінних паперів і корекції різних положень, закладених в поняття ефективного ринку, гіпотез відносно характеру розподілень цін, динаміки їх поведінки.

З появою робіт Л. Башельє (1900 рік) в якості основної доктрини для фондових ринків була прийнята гіпотеза ефективного ринку. Згодом на основі даного теоретико-ймовірнісного підходу були створені наразі широко відомі моделі оцінки фінансових активів, такі, як модель Марковіца, CAPM, арбітражна портфельна теорія, моделі ціноутворення опціонів, в числі яких модель Кокса-Роса-Рубінштейна, моделі Блека-Шоулза і Кармена-Кохлагена і т.д. Всі ці моделі у якості припущення спираються на ідею ефективного ринку. Основною властивістю ефективного ринку з економічної точки зору є те, що ціни миттєво реагують на нову інформацію, при чому абсолютно однаково для кожного із його учасників. Звідки, отримуємо, що нова ціна залежить, як від фундаментальних факторів ціноутворення ринкових інструментів, так і від настрою учасників ринку. З математичної точки зору модель ефективного ринку – це модель ринку без арбітражних можливостей, в основі якої лежать геометричний броунівський рух і теорія мартингалів. Звідси має справджуватись припущення про незалежність та нормальний розподіл лог-повернень для цін акцій або обмінних курсів валют.

Проте на статистичному матеріалі можна показати, що величина «лог-повернення» має щільність розподілу з «важкими хвостами» і з сильними «видовженнями» в центральній частині. Тобто припущення про нормальний розподіл цих величин не справджується. З часом у поведінці лог-повернень спостерігається властивості «кластерності» та «сильної залежності» (образно – «ціни пам'ятають минуле»). Квадрати та модулі величин лог-повернень виявляються корельованими.

Отже, класична модель гауссівського випадкового блукання і геометричного (економічного) броунівського руху, що узагальнена у моделі Блека-Мертона-Шоулса неадекватно відображає реальність. До того ж при статистичному аналізі фінансових часових рядів давно було помічено, що багато з них мають властивістю (статистичної) само подібності, яка проявляється у тому , що «частини влаштовані так само як і ціле». Подібні властивості вимагали свого пояснення. Дослідження показали, що воно може бути дано у рамках концепції автомодельності (самоподібності). Б. Мандельброт був одним з перших, хто запропонував включити в розгляд гіпотезу фрактального ринку. Гіпотеза фрактального ринку включає в себе ряд припущень:

1.Першопричиною виникнення організованих ринків служить потреба інвесторів у ліквідності.

2. Головне джерело ліквідності - присутність на ринку інвесторів з різними інвестиційними горизонтами.

3.Різноманіття інвестиційних горизонтів робить ринок стійким, тобто в загальному випадку не схильним до різких коливань, стрибків і обвалів. При цьому величина ризику інвестора не залежить від довжини його горизонту. Отже, частотний розподіл прибутку на різних інвестиційних горизонтах виглядає приблизно однаково.[5]

Саме різноманіття інвестиційних горизонтів визначає фрактальну структуру ринку. Ринок позбавляється стійкості, звідки стає потенційно схильним до стрибків і обвалів, при порушенні фрактальної структури.

Таким чином, фрактальний ринок повертає в наш розгляд внутрішню, «змістовну» вартість фінансового інструменту як основного фактору його ціноутворення. У свою чергу, ефективний ринок говорить про ціну як про результат колективної раціональної оцінки, що є неможливим в реальних умовах роботи фондового ринку ризикових активів.

У той же час залишається відкритим питання про практичну застосовність в їх нинішньому вигляді теоретичних методів оцінки вартості ризикових активів з точки зору гіпотези фрактального ринку. Крім цього, наявні оцінки фрактальних характеристик фондових ринків різних країн носять дещо фрагментарний і часто доволі суперечливий характер.

Актуальність даного дослідження обумовлена високою практичною значимістю та недостатньою опрацюванням проблеми використання гіпотези фрактального ринку для оцінки справедливої вартості ризикових активів на фондових ринках.

Постановка задач. Для реальних фінансових даних провести статистичний аналіз, що продемонстрував би невиконання основних припущень Блека-Шоулза про некорельованість та нормальний розподіл лог-повернень (лог-дохідностуй). За допомогою R/S аналізу знайти показник Харста, виявити фрактальну структуру ринку і таким чином обгрунтувати необхідність вдосконалення формули Блека-Шоулза через використання фрактального броунівського руху та фрактального операційного часу.

Статистичний аналіз. Невиконання основних припущень Блека-Шоулза про некорельованість та нормальний розподіл лог-повернень.

Проведемо статистичний аналіз фрактальних властивостей фондових індексів на прикладі двох баз даних: цін акцій корпорації «ММВБ телекоммунікації»з 30.12.2004 по 29.03.2011 та ціни світового фондового індексу S&P 500 (США) за двохрічний період, а саме з 1 січня 2009 по 1 січня 2011 року. Даний індекс публікується незалежною компанією «Стендард енд пурз». S&P-500 являє собою зважений за капіталізацією індекс акцій 500 корпорацій, які представлені в ньому в наступній пропорції: 400 промислових корпорацій, 20 транспортних, 40 фінансових і 40 комунальних компаній. У нього включені в основному акції компаній, зареєстрованих на Нью-йоркській фондовій біржі. Індекс представляє близько 80% ринкової вартості всіх випусків, що котируються на Ньюйоркській фондовій біржі.

Зробимо візуалізацію данних S_n - показник індексу у момент часу та відповідних величин $h_n (= \ln \frac{S_n}{S_{n-1}})$ - логарифмічна дохідність у момент часу n та перевіримо чи відповідають вони основним припущенням про нормальний розподіл та незалежність.

Візуалізаціяціни акцій корпорації «ММВБ телекоммунікації»з 30.12.2004 по 29.03.2011та лог-дохідностей:

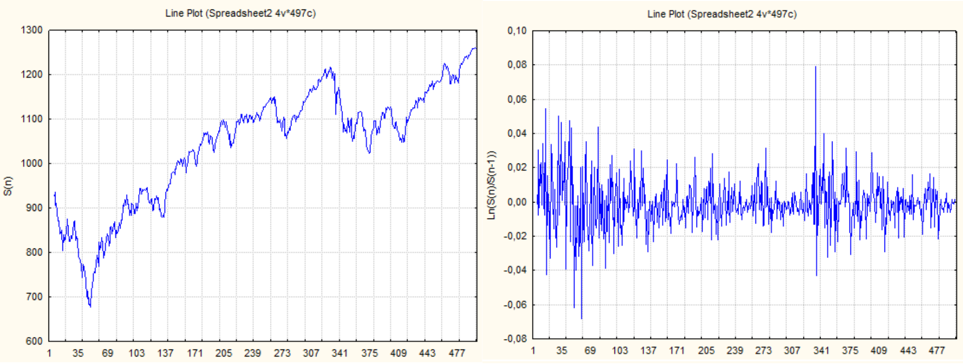


Рис.1 Візуалізація даних та лог-дохідностей

Бачимо, що для лог-повернень відсутній тренд, зростаюча амплітуда та періодичність. Перевіримо чи є h_n незалежними. Для цього побудуємо автокореляційну (АКФ) для h_n.

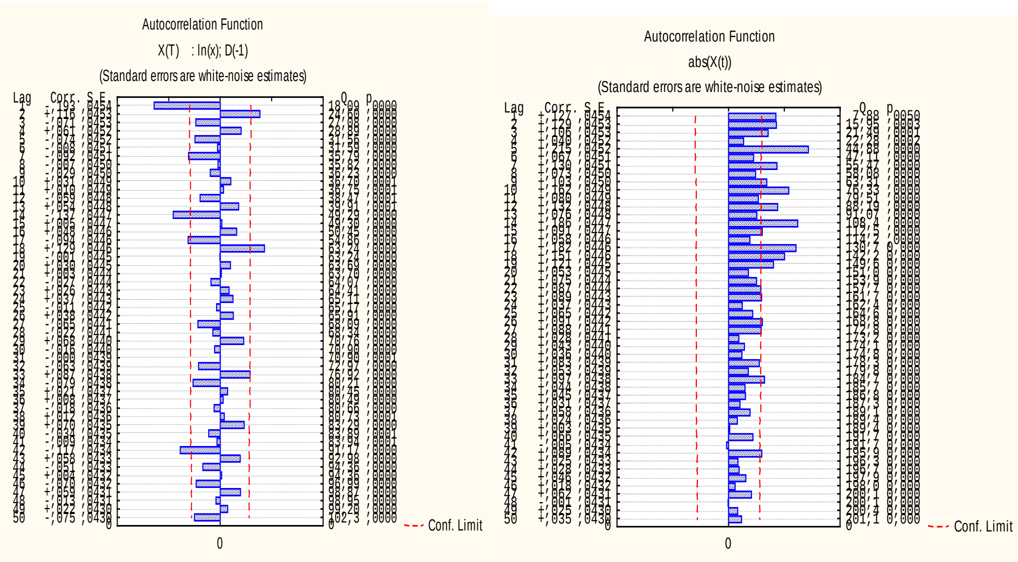


Рис. 2. Автокореляційна функція для лог-повернень та для їх модулей.

Дані h_n можна вважати некорельованими. Протее некорельованість ще не означає незалежності. На рис.2 можна побачити, що модулі величин h_n не можна вважати некорельованими.

Побудуємо емпіричні щільності розподілу (гістограми) лог-прибутків h_n, порівняємо з нормальним розподілом.

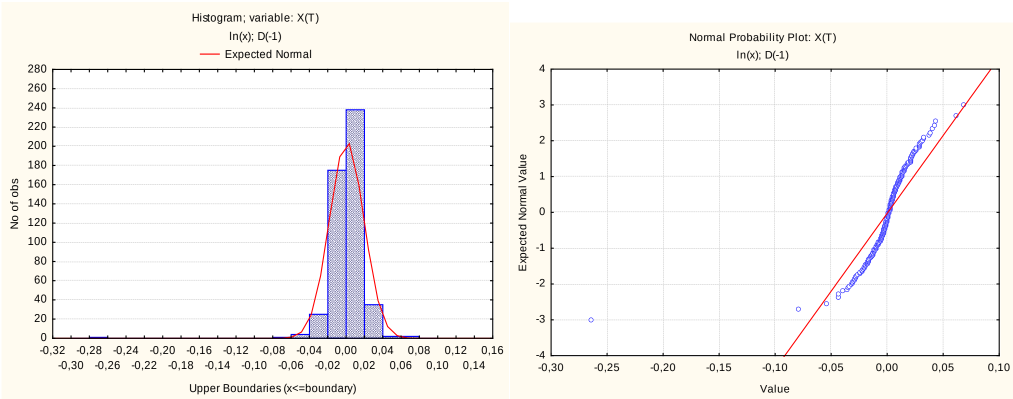


Рис.3. Гістограма та P-P графік для лог-прибутків

З рис.3 можна зробити висновок, що розподіл лог-прибутків не можна вважати нормальним. Критерії Колмогорова-Смірнова, Хі-квадрат та деякі інші так само показують, що на рівні значущості 0.05 нема підстав прийняти гіпотезу про нормальний розподіл.

Далі покажемо, що «частини влаштовані так само як і ціле»; для цього розглянемо емпіричні щільності $\hat{f}_l$ та $\hat{f}_k$ для $k > 1$які знайдено за великим рядом величин

$h_n\left(= ln\frac{s_n}{s_{(n-1)}}\right)$ та $h_{kn}\left(= ln\frac{s_{kn}}{s_{k(n-1)}}\right), n \geq 1,$

Які відповідно виявляються такими, що $\widehat{f_1}(x) \approx k^H \widehat{f_k}(k^H x)$, де H - деяка константа, яка (на відміну від очікуваної, згідно з центральною граничною теоремою, величини $\frac{1}{2}$) значно більша за $\frac{1}{2}$. Розрахуємо емпіричні щільності $\hat{f}_l$ для всієї послідовності

$h_n\left(= ln\frac{s_n}{s_{(n-1)}}\right), n \geq 1$

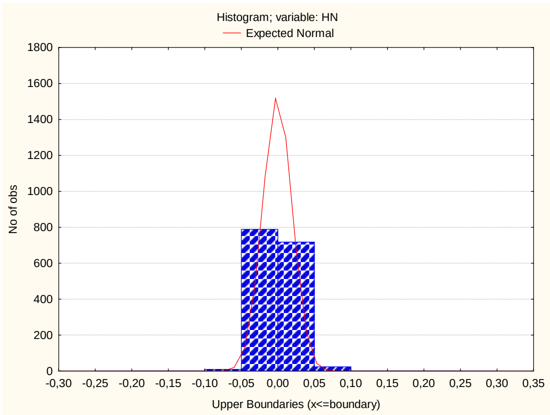


Рис. 4. Емпіричні щільності $\hat{f}_l$ для лог – повернень для $h_n\left(= ln\frac{s_n}{s_{(n-1)}}\right)$.

Розрахуємо емпіричні щільності $\hat{f}_k$ для підпослідовноcі h_{kn} $\left(= ln \frac{s_{kn}}{s_{k(n-1)}}\right)$,$n \geq 1$. Візьмемо $k = 2$.

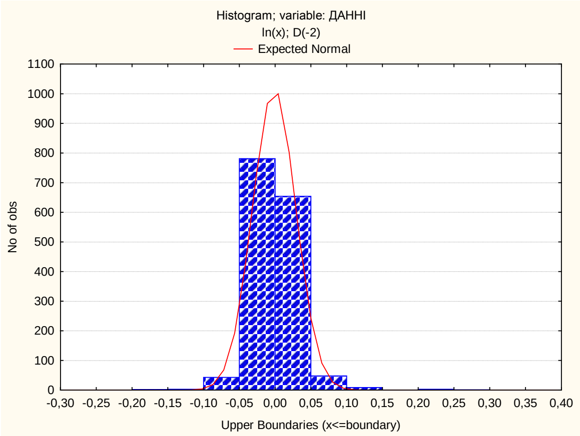


Рис.5. Емпіричні щільності для підпослідовноcі h_{kn} $\left(= ln \frac{s_{kn}}{s_{k(n-1)}}\right) k = 2$.

Візуально видно, що при $k = 2$ дані більш схожі на нормальний розподіл, що доводить властивість самоподібності даної вибірки .

K^H = 1,6245, при k=2, H=0.7

Перевіримо, чи дійсно виконується формула $\widehat{f_1}(x) \approx k^H \widehat{f_k}\ (k^H x)$, при даних K^H = 1,6245, при k=2, H=0.7.

Домножимо вибірку h_n на K^H = 1,6245, і отримаємо графік щільності:

$h_n * K^H$ $\qquad$ h_n

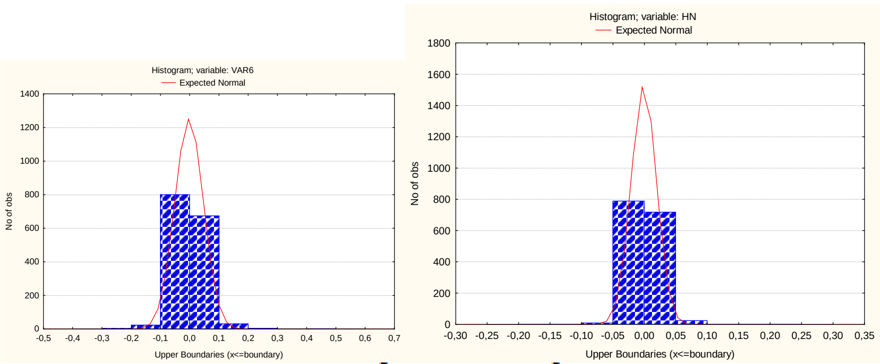
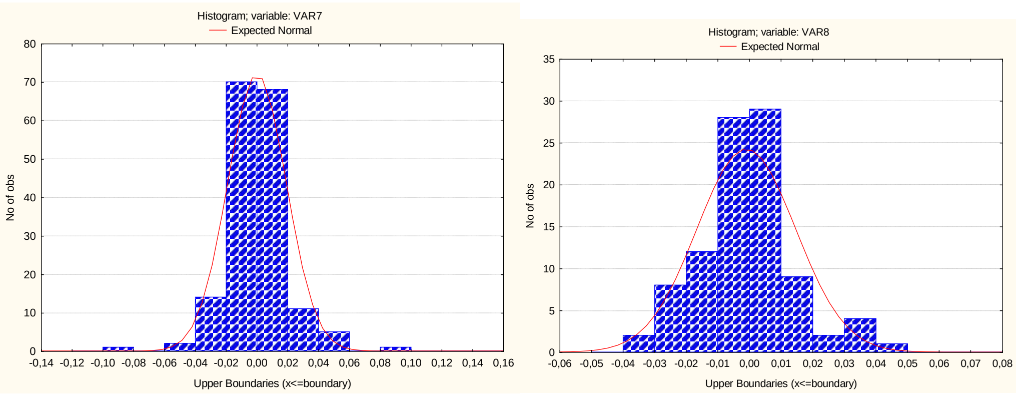


Рис. 6. Порівняння щільностей $\widehat{f_1}(x) \approx k^H \widehat{f_k}\ (k^H x)$, при даних K^H = 1,6245, при k=2, H=0.7.

Візуально, графіки щільності дуже схожі, отже ми перевірили, що дійсно виконується формула $\widehat{f_1}(x) \approx k^H \widehat{f_k}\ (k^H x)$, при H=0,7(>0,5).

Отже, можна висунути припущення, що зі збільшенням k, ефект самоподібності втрачається, а дана вибірка данних наближається до норально розподілих даних. Перевіримо для $k = 3, 4, 5.$

k=3



k=4

Рис. 7. Порівняння щільностей $\widehat{f_1}(x) \approx k^H \widehat{f_k}(k^H x)$, при k=4.

Ми бачимо, що зі збільшенням k, дані все більш стають схожі на нормально розподілені данні. Отже, наша гіпотеза справджується.

R/S аналіз. Статистичний феномен автомодельності Харста. Знаходження показника Харста.

Статистичним феноменом Харста прийнято вважати несподіваний ефект в поведінці флуктуації рівня води, що був отриманий в 1951 році британським кліматологом Г. Харстом, який провів більше 60 років в Египті, приймаючи участь в гідрологічних проектах, пов'язаних з Нілом. Суть цього ефекта у наступному. Нехай $x_1, \dots, x_n$ - величини річних рівнів (скажімо, Ніла в деякій його частині) за n останніх років. «Гарною» оцінкою їх середнього значення буде величина $\frac{1}{n}X_n$, де $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Віхилення X_k за k послідовних років від середнього (емпіричного) значення, яке вираховане за n років, є величина $X_k - \frac{k}{n}X_n$, і, відповідно, мінімальними та максимальними відхиленнями є величини $\min_{k\le n}(X_k - \frac{k}{n}X_n)$ та $\max_{k\le n}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right)$. Позначимо за $R_n = \min_{k\le n}(X_k - \frac{k}{n}X_n) - \max_{k\le n}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right)$ величину «розмаху», яка характеризує ступінь відхилення кумулятивних величин X_k від їх середнього значення $\frac{k}{n}X_n$ за послідовні n років. В своїй експериментальній практиці Г. Харст оперував не з величинами R_n, а з нормованими величинами $Q_n = \frac{R_n}{S_n}$, де S_n - емпіричне стандартне відхилення, яке вводили з метою отримання статистики, інваріантної відносно заміни $x_k \to c(x_k + m)$,

$k \geq 1$, що є бажаною властивістю, оскільки навіть середнє значення та дисперсія x_k, як правило, є невідомими.

Ґрунтуючись на великому фактичному матеріалі спостережень за стоками Ніла Г.Харст виявив, що для великих значень n стистика $\frac{R_n}{S_n}$ «веде» себе наступним чином :

$$\frac{R_n}{S_n} \sim cn^H,$$

де c - деяка константа, а параметр Н, який будемо називати показником Харста, виявся приблизно рівним 0,7. Цей результат Харст вважав несподіваним, оскільки очікуване їм значення Н повинно було бути рівним $\frac{1}{2}$ в силу центральної граничної теореми.

Властивості $\frac{R_n}{S_n} \sim cn^H$ (1) та $\widetilde{Law}\ (x_1 + \cdots + x_n) \approx \widetilde{Law}(n^H x_1)$, які є своєрідною формою самоподібності (автомодельності), спостерігаються для багатьох фінансових індексів (з заміною x_n на h_n). Тому не дивно, що попередні висловлювання відносяться до «незалежності та стійкості» величин (x_n) або «залежності та нормальності» знайшли широке застосування в фінансовій математиці, особливо при аналізі «фрактальної» структури «волатильності». Роботи Г. Харста стали поштовхом для Б. Мандельброта, який запропонував, як і в розглянутій ним моделі Харста, так і в багатьох інших ймовірнісних моделях, в тому числі і в фінансовій математиці використовується строго стійкі процеси та фрактальний броунівський рух, який має властивості автомодельності.

Необхідно зазначити, що властивостями самоподібності наділені найрізноманітніші системи з нелінійною динамікою, які зустрічаються у природі (фізичні, геофізичні, біологічні, економічні). І саме ця властивість відіграє центральну роль у фрактальній геометрії, а її засновник Б. Мандельброт назвав свою книгу The Fractal Geometry of Nature, підкреслюючи тим самим універсальність поняття автомодельності у Природі.

В межах даної роботи використаємо концепцію фрактального ринку, адже як вже було зауважено, маємо прояви властивості самоподібності для даної вибірки значень показника. Для знаходження показника Харста використаємо R/S аналіз. RS-аналіз - сукупність статистичних прийомів і методів аналізу часових рядів (переважно фінансових), що дозволяють визначити деякі важливі їх характеристики, такі як наявність неперіодичних циклів, пам'яті та ін..

Для цього для кожного натурального $n,\ n = 1,2,...494$ обчислимо величини $H_n = \sum_{i=1}^{n} h_i$ і обчислимо числові характеристики отриманої підпослідовності. Нехай $\overline{h}_n = H_n / n$ - середнє арифметичне елементів підпослідовності. Тоді

розмах накопичених сум , $R_n = \max\left(\sum_{i=1}^{k}(h_i - \overline{h}_n)\right) - \min\left(\sum_{i=1}^{k}(h_i - \overline{h}_n)\right)$;

середньоквадратичне відхилення , $S_n : S_n^{\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(h_i - \overline{h}_n\right)^2$;

нормований розмах накопичених сум . $RS_n = \frac{R_n}{S_n}$.

Обчислюючи згідно з вищезазначеним алгоритмом значення RS_n , утворюємо з них і відповідних значень кількості елементів n послідовність точок на площині $(x_n, y_n) \equiv (\ln n, \ln RS_n)_{n=1}^{N}$. Залишилось застосувати метод найменших квадратів для визначення кутового коефіцієнта прямої, що проходить максимально близько до отриманих точок.

За відомою формулою методу найменших квадратів, вважаючи

$$c_1 = \sum_{i=1}^{N} x^2, c_2 = \sum_{i=1}^{N} x; g_1 = \sum_{i=1}^{N} xy, g_2 = \sum_{i=1}^{N} y$$

знаходимо коефіцієнт Херста :

$$H = \frac{Ng_1 - c_2 g_2}{Nc_1 - c_2^{\ 2}}.$$

Отримали, що

$$c_1 = 13882,75991, c_2 = 2574,07292; g_1 = 35282,75991, g_2 = 6745,0992.$$

Звідки показник Херста :

$$H = 0,290279302.$$

Фрактальний шум $h = (h_n)$ з $0 < H < 1/2$,що ще називається розовим шумом, має від'ємну коваріація, що як вже було зазначено, відповідає швидкій перемежаємості в значеннях h_n. А саме такими властивостями характеризуються турбулентні явища, тобто наш приклад – є прикладом фінансової турбулентності.

Проведемо той же аналіз не для всієї вибірки показників,а лише для деяких її частин, результати подамо у вигляді таблиці :

N	c_1	c_2	g_1	g_2	H
1-400	10381,832	2000,5006	27861,72423	5528,6297	0,56168
1-300	6886,906	1403,5016	19358,225	4075,8333	0,90414
1-200	3907,1405	863,231	11576,41032	2663,824	0,435304
1-100	1366,007	354,539	4633,5406	1273,3888	0,766067

Як видно із таблиці, усі вибірки крім однієї представляють «чорний шум», адже $1/2 < H < 1$. Для даного шуму характерною властивістю є сильна післядія, сильна пам'ять.

Для фондового індексу S&P 500 геометрично покажемо застосування методу найменших квадратів для знаходження коефіцієнта Харста.

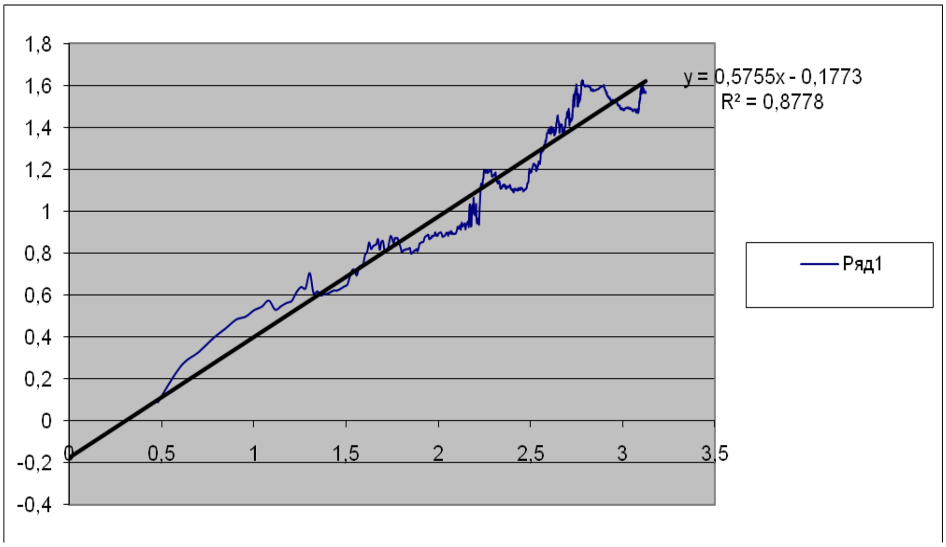


Рис. Коефіцієнт Харста H=0,5755

$\frac{1}{2} < H < 1$, отже це знову «чорний шум». В цьому випадку коваріація додатня $\rho_H(n) > 0, n \geq 0),$ при цьому $\sum_{n=0}^{\infty} | \rho_H(n) | = \infty$. Додатність коваріації означає, що для β_n треба очікувати також додатні значення. Тим самим, фрактальний гаусівський шум з $\frac{1}{2} < H < 1$ може бути влучною моделлю при описі ефектів „кластерності”.

Висновки. У статті на базі реальних фінансових даних показано їх невідповідність гіпотезі ефективного ринку. Розглянуто R/S аналіз і знайдено показники Харста, що підтверджують фрактальність руху цін акцій. Надалі доцільно побудувати такі моделі вартості цінних паперів, що враховують фрактальну структуру ринку і властивість самоподібності.

Література

1. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
2. Мандельброт Б., Хадсон Р.Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. – М.: Вильямс, 2006.
3. Марков А.А. Математичні методи аналізу фрактальних властивостей динаміки цін фондових ринків: дис. доктора економ. наук / Гисин В.Б.. – Москва, 2010. – 168 с.
4. Марков А.А. Некоторые фрактальные свойства фондовых индексов // Сегодня и завтра российской экономики, №30. – 2009. – с. 103-112.
5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 2004.