

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Факультет інформатики  
Кафедра математики

Курсова робота  
освітній ступінь – магістр  
на тему: «УСМІШКА ВОЛАТИЛЬНОСТІ: МЕТОД СКІНЧЕННИХ  
РІЗНИЦЬ»

Виконала: студентка 1-го року навчання,  
Освітньої програми «Прикладна математика», 113

Гуцало Анастасія Вікторівна

Керівник Щестюк Н.Ю.,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент \_\_\_\_\_

Кваліфікаційна робота захищена

з оцінкою \_\_\_\_\_

Секретар ЕК \_\_\_\_\_

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ р.

Київ – 2023

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ПРИЙНЯТИХ СКОРОЧЕНЬ .....	3
ВСТУП .....	4
<b>Розділ 1. Аналітичні моделі оцінки опціонів</b> .....	<b>6</b>
1.1 <b>Модель Блека-Шоулза</b> .....	6
1.2 <b>Стохастичні моделі</b> .....	8
1.2.1 <b>Модель Хестона</b> .....	9
1.2.2 <b>Модель SABR</b> .....	10
<b>Висновки за главою 1</b> .....	10
<b>Розділ 2. Метод скінчених різниць</b> .....	<b>12</b>
<b>2.1   Дискретизація PDE до системи лінійних рівнянь</b> .....	12
<b>2.2   Аналітичне дослідження схеми</b> .....	14
2.2.1   Послідовність.....	14
2.2.2   Збіжність .....	15
<b>2.3   Алгоритмізація</b> .....	15
2.4   Висновки за главою 2.....	16
<b>Розділ 3. Чисельне моделювання</b> .....	<b>17</b>
3.1   Модель Хестона.....	17
3.2   Модель SABR .....	18
<b>ВИСНОВОК</b> .....	<b>19</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	<b>20</b>

## ПЕРЕЛІК ПРИЙНЯТИХ СКОРОЧЕНЬ

PDE – диференціальні рівняння в частинних похідних;

моделі Б-Ш – моделі Блека-Шоулза;

FDM – метод кінцевих різниць;

IMEX-методи – неявно-явні методи.

## ВСТУП

Розвиток фінансових ринків, зміна їх структури та зростання волатильності у цінах призвели до збільшеного інтересу до математичного моделювання фінансових процесів. Математичні та чисельні методи дозволяють моделювати складні фінансові системи з безліччю змінних та факторів. Опціони є важливими інструментами на фінансових ринках та їх ціноутворення є однією з основних фінансових теорій. Проте традиційні методи що неспроможні точно визначити вартість опціону, оскільки ризик змінюється залежно вартості і терміну існування базового активу. Для вирішення цього завдання було розроблено різні моделі ціноутворення опціонів. Однією з основних моделей є модель Блека-Шоулза, яка стала теоретичною основою подальших розробок методів визначення вартості опціонів. Однак дана модель передбачає, що волатильність акції постійна, що може призвести до усмішки волатильності. Для запобігання такої ситуації необхідно застосувати модифікацію моделі зі стохастичною волатильністю. В роботі було використано метод кінцевих різниць для чисельного рішення модифікації моделі.

### **Актуальність:**

Робота присвячена дослідженню моделі оцінки опціонів, розгляд модифікації моделі Б-Ш із стохастичною волатильністю, та їх чисельний розв'язок методом FDM.

**Метою роботи** є дискретизація диференціального рівняння ціни опціону зі стохастичною волатильністю, її розв'язок та виведення змін відносно ціни базового активу та волатильності.

### **Ціль роботи:**

- 1) модифікація моделі Б-Ш;
- 2) визначення диференціального рівняння функції  $U(S, V, t)$  в частинних похідних;
- 3) дискредитація PDE методом скінченних різниць.

**Об'єкт дослідження:** моделі оцінки опціонів зі стохастичною волатильністю.

Робота складається з трьох розділів.

Перший розділ присвячено аналізу моделей оцінок опціонів. Наведено огляд модифікаційних моделей зі стохастичною волатильністю.

В другому розділі наведено результати розробки алгоритму кінцевих різниць для розв'язання диференціального рівняння опціону в частинних похідних, та розглянуто один із IMEX-методів для вирішення системи лінійних рівнянь.

Третій розділ присвячено числовим експериментам для моделей Хестона та SABR із обраними початковими та граничними умовами.

Створено програмний продукт, який призначений для використання при прогнозуванні реальних часових рядів та в навчальному процесі.

## Розділ 1. Аналітичні моделі оцінки опціонів

Опціон являє собою договір, відповідно до якого покупець має право на купівлю або продаж активу за заздалегідь обумовленою ціною, яка називається ціною виконання. У фінансовій математиці опціони часто використовуються для управління ризиками та страхівки від деяких видів ризиків. Опціон може бути типу Call або Put, що означає право на купівлю або продаж відповідно по завчасно обумовленій ціні, яка називається ціною виконання, або *strike*.

Опціон можна представити у вигляді функції, яка визначає виплати по опціону в останній момент експірації договору. Для простоти розглядатимемо опціон типу Call.

$$C = \max(S - K; 0) \quad (1)$$

Де  $S$  – ціна базового активу,  $K$  – ціна *strike*.

Функція (1) визначає вигоду покупця опціону у разі, якщо вартість базового активу  $S$  перевищить ціну страйк  $K$ . В іншому випадку, власник опціону отримає збиток рівний сплаченої премії за придбання опціонного контракту  $S-K$ .

Справедлива вартість опціону визначається так, щоб жодна із сторін не перебувала у переважному положенні під час укладання угоди. Вона дорівнює очікуваного прибутку за опціоном і може бути досліджена як випадковий процес, що залежить від ціни базового активу та часу. Ця функція визначає одержуваний за опціоном прибуток у конкретний час і, отже, його справедливую вартість.

### 1.1 Модель Блека-Шоулза

Перша формула моделі оцінки опціонів була виведена Фішером Блеком та Майроном Шоулзом, на основі досліджень Джека Трейнора, Пола Самуельсона та Едварда Торпа.

Для виведення моделі, було висунуто 7 припущень:

1. Торгівля цінними паперами (базовим активом) ведеться безперервно, і поведінка їхньої ціни підпорядковується моделі геометричного броунівського руху з відомими параметрами.

2. За базовим активом опціону дивіденди не виплачуються протягом усього терміну дії опціону.
3. Немає транзакційних витрат, пов'язаних із купівлею чи продажем акції чи опціону.
4. Короткострокова безризикова процентна ставка відома і є постійною протягом усього терміну дії опціону.
5. Будь-який покупець цінного паперу може отримувати позички за короткостроковою безризиковою ставкою для оплати будь-якої частини її ціни.
6. Короткий продаж дозволяється без обмежень, і при цьому продавець негайно отримує всю готівкову суму за проданий без покриття цінний папір за сьогоднішньою ціною.
7. Немає можливості арбітражу (тобто немає способу отримати безризиковий прибуток).

В результаті було отримано математичну задачу знаходження справедливої вартості опціону як рішення параболічного рівняння в частинних похідних, яке описує ціну опціону з часом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 0,5\delta^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} - rU = 0$$

Де:

$t$  – час у роках;

$S(t)$  - ціна базового активу в момент часу  $t$ ;

$U(S,t)$  - ціна опціону як функція базового активу  $S(t)$  у момент часу  $t$ ;

$\delta$  – волатильність прибутковості базисної акції;

$r$  - безризикова процентна ставка в річному вимірі, що постійно нараховується (також відома як сила відсотка).

В разі європейського опціону, який відрізняється від американського тим, що може бути використаний лише на дату закінчення терміну дії опціону, тобто в один заздалегідь визначений момент час, кінцеві і граничні умови:

$$C(0, t) = 0 \text{ для всіх } t \quad (2)$$

$$C(S, t) = S - K \text{ при } S \rightarrow \infty \quad (3)$$

Враховуючи умови (1-3), отримуємо вартість опціону call та put відповідно:

$$C(S, t) = S_t N(d_+) - K e^{-r\tau} N(d_+ - \delta\tau)$$

$$P(S, t) = K e^{-r\tau} - S_t + C(S, t)$$

$$d_+ = \frac{1}{\delta\sqrt{\tau}} \left( \ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + r\tau + 0.5\delta^2\tau \right)$$

Де  $\tau$  – час до закінчення опціону.

При цьому - ціна базового активу  $S(t)$  змінюється за формулою

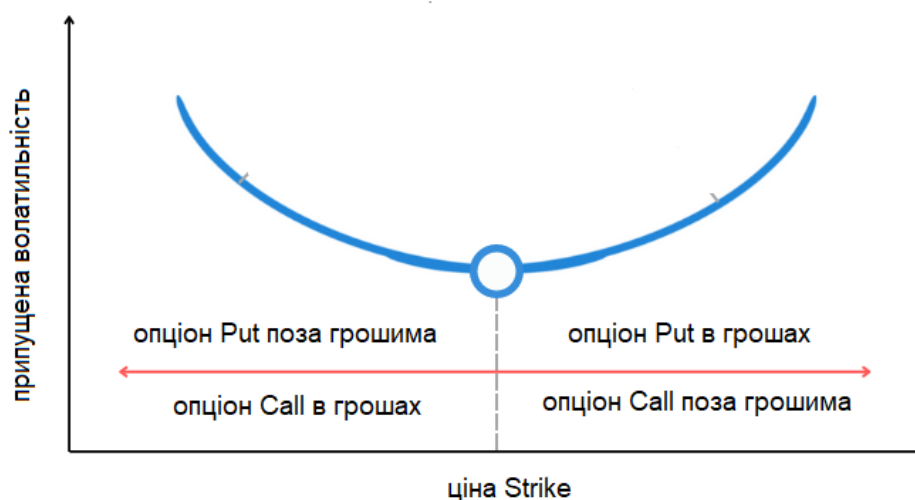
$$dS_t = rS_t dt + \delta S_t W_t \quad (4)$$

Де  $W_t$  – броунівський рух.

Недоліком класичної моделі Б-Ш є те, що міра волатильності  $\delta$  вважається константою, що у моделях зі стохастичною  $\delta$  значно зменшує точність розрахунку ціни опціону.

## 1.2 Стохастичні моделі

Припущення, закладені основою моделі Б-Ш, найчастіше виявляються нездійсненними (зокрема, припущення про сталість волатильності порушується, є явище, зване «усмішкою волатильності»), у зв'язку з чим існує безліч модифікацій цієї моделі, які враховують стохастичність волатильності.



«Посмішка волатильності», ситуація, коли опціони на один базовий актив мають різну очікувану волатильність. При «посмішці» ціна виконання

опціону біля грошей має найнижчу волатильність і вона зростає в обидві сторони при збільшенні і зменшенні страйків.

Стохастичні моделі припускають, що волатильність  $V_t$  також слідує стохастичному процесу. Формула (4) в загальному вигляді перетворюється на систему рівнянь в частинних похідних (PDE):

$$\begin{cases} dS_t = \mu_S(S_t, S_t, t)dt + \delta_S(S_t, V_t, t)dW_t^1 \\ dV_t = \mu_V(S_t, S_t, t)dt + \delta_V(S_t, V_t, t)dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \end{cases} \quad (5)$$

Останній рядок позначає кореляцію між ціною акції  $S_t$  та її волатильністю  $V_t$ . Функції  $\mu_S$ ,  $\mu_V$ ,  $\sigma_S$  та  $\sigma_V$  визначаються моделлю, що використовується.

Скористаємося формулою Фейнмана-Каца для встановлення зв'язку між PDE та випадковими процесами для виведення ціни опціону. Використовуючи формулу Іто для знаходження ціни опціону  $U = U(S, V, t)$  з базовим активом  $S$ , волатильністю  $V$  та в часі  $t$ , отримаємо формулу:

$$\begin{aligned} dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial S} dS_t + \frac{\partial U}{\partial V} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} (dS_t)^2 + \\ \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} dS_t dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} (dV_t)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляючи рівняння (5) у (6), отримуємо:

$$\begin{aligned} dU = \left[ \frac{1}{2} \sigma_V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} + \sigma_S \sigma_V \rho \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \mu_V \frac{\partial U}{\partial V} + \mu_S \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\partial U}{\partial t} \right] dt + \\ + \sigma_S \frac{\partial U}{\partial S} dW_t^1 + \sigma_V \frac{\partial U}{\partial V} dW_t^2 \end{aligned}$$

Для зручності перепишемо формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma_V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \sigma_S \sigma_V \rho \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \mu_v \frac{\partial u}{\partial v} + \mu_s \frac{\partial u}{\partial s} - ru \quad (7)$$

з початковою умовою  $u(s, v, 0) = \varphi(s, v)$ .

### 1.2.1 Модель Хестона

Беручи за основу (5), модель Хестона використовує такі коефіцієнти:

$$\mu_S(S_t, V_t, t) = rS_t, \delta_S(S_t, V_t, t) = S_t \sqrt{V_t}, \mu_V(S_t, S_t, t) = k(\eta - V_t), \delta_V(S_t, V_t, t) = \delta \sqrt{V_t}. \text{ Тоді PDE виглядатиме:}$$

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t = k(\eta - V_t) dt + \delta \sqrt{V_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \end{cases}$$

Загальна формула із (7):

$$\begin{aligned} 0,5\delta^2 V_t \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} + \delta S_t V_t \rho \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} + 0,5 V_t S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \\ + k(\eta - V_t) \frac{\partial U}{\partial V} + r S_t \frac{\partial U}{\partial S} - ru = 0 \end{aligned}$$

Важливою особливістю моделі Гестона є умова Феллера, яка визначає процес волатильності строго позитивним:

$$\frac{2k\eta}{\delta^2} > 1$$

З точки зору рівнянь в частинних похідних, ця умова визначає поведінку поблизу межі при  $V_t = 0$ .

### 1.2.2 Модель SABR

Модель SABR розшифровується як: стохастична альфа-бета та ро-модель.

Модель схожа на Хестонську, однак  $\mu_S(S_t, S_t, t) = rS_t$ ,  $\delta_S(S_t, \alpha, t) = D^{1-\beta} \alpha_t S_t^\beta$ ,  $\mu_V(S_t, \alpha, t) = 0$ ,  $\delta_V(S_t, V_t, t) = \delta \alpha_t$ . PDE виглядатиме:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + D^{1-\beta} \alpha_t S_t^\beta dW_t^1 \\ dV_t = \delta \alpha_t dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \end{cases}$$

Загальна формула із (7):

$$\begin{aligned} 0,5\delta^2 S_t^{2\beta} D^{2-2\beta} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \delta S_t^\beta D^{1-\beta} \alpha_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial \alpha} + 0,5\delta^2 S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \\ + \frac{\partial U}{\partial t} + r S_t \frac{\partial U}{\partial S} - ru = 0 \end{aligned}$$

### Висновки за главою 1

Було переглянуто класичну модель Блека-Шоулза для визначеності вартості опціонів call та put. При стохастичній волатильності, було розглянуто модифікації моделі, а саме моделі Хестона та SABR.

## Розділ 2. Метод скінчених різниць

Метод скінчених різниць (FDM) являє собою чисельний алгоритм для вирішення PDE. Загальною ідеєю FDM є зведення вихідного завдання з граничними умовами (крайової задачі) до більш простого завдання розв'язання системи лінійних або нелінійних рівнянь. стабільним, мають швидко збіжність, точні та прості в реалізації. При застосуванні FDM, неперервна область дискредитується, а диференціальні члени рівняння перетворюються на лінійне алгебраїчні, так звані кінцево-різницеві рівняння.:

Метод скінчених різниць можна поділити на 3 етапи: дискредитація, аналітичне дослідження схеми і алгоритмізація.

### 2.1 Дискретизація PDE до системи лінійних рівнянь

- 1) Застосовуємо рівновіддалену сітку для змінних ціни  $S(t)$  та волатильності  $V(t)$ . Обираємо кількість точок  $m_1$  для  $S$  та  $m_2$  для  $V$ . Отримуємо  $m_1$  точок  $s_i$  та  $m_2$  точок  $v_i$ , де

$$s_0 = 0, s_{i+1} = s_i + h_s, s_{m_1} = S_{\max}.$$

$$v_0 = 0, v_{i+1} = v_i + h_v, v_{m_2} = V_{\max}.$$

Кроки для сіток знаходять як  $h_s = S_{\max}/m_1$ ,  $h_v = V_{\max}/m_2$ .

Просторова область, таким чином, підрозділяється на такі точки сітки:

$$G = \{(s_i, v_j) : 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2\}$$

Позначимо  $u_{i,j}(t)$  як значення функції в точці сітки  $(s_i, v_j)$  і в момент часу  $t$ .

- 2) Дискредитуємо диференціальні оператори за формулами:

$$\delta_s[u_{i,j}] \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta s}$$

$$\delta_v[u_{i,j}] \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta v}$$

$$\delta_s^2[u_{i,j}] \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta s^2}$$

$$\delta_v^2[u_{i,j}] \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta v^2}$$

Крім того, завдяки лінійності операторів, перехресна похідна  $\partial^2 u / \partial s \partial v$  може бути апроксимована:

$$\begin{aligned} \delta_{s,v}[u_{i,j}] &= \delta_s [\delta_v[u_{i,j}]] \approx \delta_s \left[ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta v} \right] = \frac{\delta_s[u_{i,j+1}] - \delta_s[u_{i,j-1}]}{2\Delta v} \approx \\ &\approx \frac{\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2\Delta s} - \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta v}}{2\Delta v} = \\ &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta v \Delta s} \end{aligned}$$

3) На граничних точках (при  $i=0$  або  $j=0$ ) використовується одностороння схема:

$$\begin{aligned} \delta_v[u_{i,0}] &\approx \frac{-3u_{i,0} + 4u_{i,1} - u_{i,2}}{2\Delta v} \\ \delta_v[u_{0,j}] &\approx \frac{-3u_{0,j} + 4u_{1,j} - u_{2,j}}{2\Delta s} \end{aligned}$$

4) Запишемо загальну формулу (7) як

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta v^2} + \\ &+ \sigma_s \sigma_v \rho \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta v \Delta s} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta s^2} + \\ &+ \mu_v \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta v^2} + \mu_s \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta s^2} - ru \end{aligned}$$

Спрощено, запишемо формулу як

$$\begin{aligned} U'(t) &= AU(t) + R \quad 0 \leq t \leq T \\ U(0) &= f(x) \quad (9) \end{aligned}$$

5) Дискретизація за часом

Оскільки у спрощеній формулі є диференціал  $U$  за змінною  $t$ , необхідно застосувати FDM за часом. Аналогічно обираємо крок  $\Delta t$ . Замінюючи

$U'(t)$  на  $\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}$ , отримуємо:

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = AU^k + R$$

$$U(0) = f(x) \quad (10)$$

Виражаючи через  $U^{k+1}$ :

$$U^{k+1} = QU^k + G$$

$$U(0) = f(x)$$

Де  $Q = AU^k \Delta t$ ,  $G = R \Delta t + U^k$ .

## 2.2 Аналітичне дослідження схеми

FDM вважається достатньо наближеним до PDE, якщо виконуються умови збіжності та послідовності. Розглянемо окремо всі 2 умови.

Вважатимемо, що PDE вже дискретизовано за ціною та волатильністю, але не за часом:

$$\frac{du}{dt} = L(u)$$

$$u(0, s, v) = \varphi(s, v)$$

### 2.2.1 Послідовність

Умова послідовності полягає в тому, щоб розв'язок кінцевої різниці не зростає експоненціально з кроком у часі. Скінченно-різницева схема узгоджена в будь-які точці, якщо для будь-якої функції  $u(\tau, s, v)$  виконується наближення

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - L \right) u(t_k, s_i, v_j) - \left[ \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} - D_{\Delta s \Delta v}^{\Delta t} (u_{i,j}^k) \right]$$

до нуля, за умови  $\Delta r, \Delta s, \Delta v \rightarrow 0$ . Іншими словами, при зменшенні кроків і збільшенні розмірності сітки та точок розбиття, кінцева-різницева схемою наближається до PDE.

Для цього розпишемо диференціал за методом Тейлора:

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{1!} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^k + \frac{\Delta t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^k + O(\Delta t^3)$$

Тоді помилки скорочення формули (10)

$$O(\Delta r) + O(\Delta s^2) + O(\Delta v^2) = O(\Delta r, \Delta s^2, \Delta v^2)$$

прямують до нуля, оскільки їх змінні прямують до нуля.

### 2.2.2 Збіжність

**Теорема 7.3.** (Теорема про еквівалентність Лакса) Послідовна дворівнева різницєва схема для правильно поставленої лінійної початкової задачі збіжна тоді і тільки тоді, коли вона стабільна.

Узгодженість доводиться за допомогою розширень Тейлора, а стабільність за допомогою техніки Фур'є, як було зазначено вище.

## 2.3 Алгоритмізація

Останній етап полягає у вирішенні системи лінійних рівнянь. Вирішити її можна двома методами:

- 1) Невний метод (Euler backward).

Метод полягає в пошуку зворотної матриці  $Q$ , що може займати багато часу. Однак такий підхід являється стабільним і простим у виконанні.

- 2) Явний метод (Euler forward).

Явний метод простий і не потребує обрахування зворотної матриці, але цей метод не є безумовно стійким.

Для стабільності та простоти методу, варто використовувати поєднання двох вище вказаних методів, так звані неявно-явні методи (ІМЕХ-методи), одним з яких є метод ADI.

ADI означає Alternating Direction Implicit (змінний напрямний напрямок),

Метод ADI розбиває матрицю  $A$  з формули (9) на 3 матриці  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,

де  $A_0$  містить змішані похідні,  $A_1$  та  $A_2$  – похідні у напрямку  $s$  та  $v$

відповідно.  $g_{i,j}$  розподіляється по  $A_1$  і  $A_2$ . Аналогічно розбивається вектор  $R$ .

Один часовий крок розділяється на підкроки, на кожному з яких потрібно інвертувати ту матрицю напрямків, яка має найменшу пропускну здатність, а інші розглядають явно.

Розділимо матрицю  $A$  на зазначені вище 3 матриці:

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = (A_0 + A_1 + A_2)U^k + R$$

Нехай матриця  $A_1$  трактується неявно, тоді застосовуємо формулу для всіх  $k$  значень:

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = (A_0 + (1 - \theta)A_1 + A_2)U^k + \theta A_1 U^{k+1} + R$$

Отримаємо формулу:

$$(I - \theta \Delta t A_1)U^{k+1} = (I + \Delta t A_0 + (1 - \theta)\Delta t A_1 + \Delta t A_2)U^k + \theta A_1 U^{k+1} + \Delta t R$$

Потім виконується крок корекції так, що один напрямок виконується неявно, а решта явно. На наступному кроці інший напрямок обирається для неявного виконання.

У формулі це виглядає так:

$$\begin{aligned} Y_0 &= U^k + \Delta t(AU^k + R) \\ Y_1 &= Y_0 + \theta \Delta t(A_1 Y_1 - A_1 U^k) \\ Y_2 &= Y_1 + \theta \Delta t(A_2 Y_2 - A_2 U^k) \\ U^{k+1} &= Y_2 \end{aligned}$$

Де  $Y_0$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  – підкроки.

Великою перевагою виконання цих підетапів є менша пропускна здатність інвертованих матриць та зменшення кількості інверсій, оскільки їх не потрібно повторювати.

## 2.4 Висновки за главою 2

Було переглянуто метод різницевого схем як чисельний алгоритм розв'язання диференціальних рівняння в частинних похідних. Було описано дискретизацію PDE та проведено аналітичне дослідження методу для виконання умов наближеності до початкових даних. Для вирішення системи лінійних рівнянь було розглянуто один із IMEX-методів.

## Розділ 3. Чисельне моделювання

### 3.1 Модель Хестона

Щоб перевірити отриманий вище метод, потрібні деякі значення параметрів. Значення параметрів

Нехай початкові та граничні умови дорівнюють:

$$S_{max} = 200, \kappa = 3, \theta = 0,8, V_{max} = 1, \eta = 0,12, r = 0,03, T = 1, \sigma = 0,041, K = 100, \rho = 0,60 \quad (11)$$

Цінова поверхня та  $\Delta$  показані на рисунках:

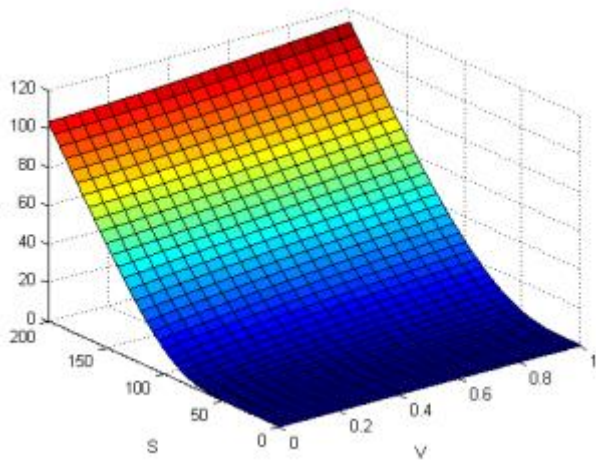


Рис.2 Цінова поверхня моделі Хестона

Далі вказані графіки зміни  $u$  в залежності від зміни  $s$  та  $v$  відповідно:

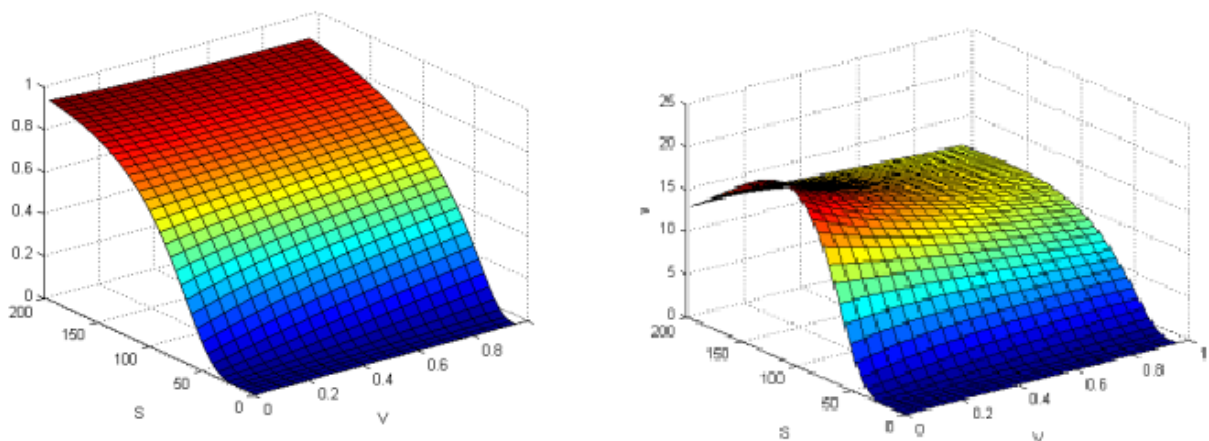


Рис.3. Графік зміни ціни від  $S$  та  $V$ .

## 3.2 Модель SABR

Використовуємо граничні та початкові умови (11)

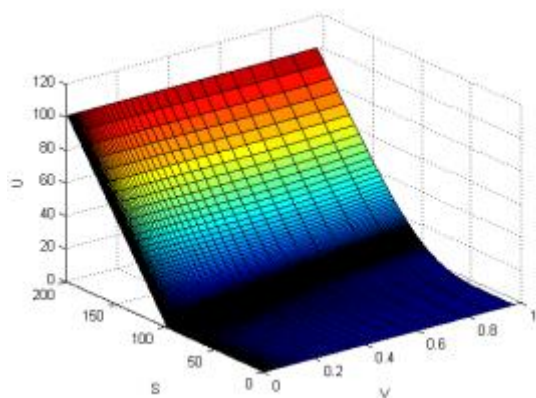


Рис.4 Цінова поверхня моделі SABR

Далі вказані графіки зміни  $u$  в залежності від зміни  $s$  та  $v$  відповідно:

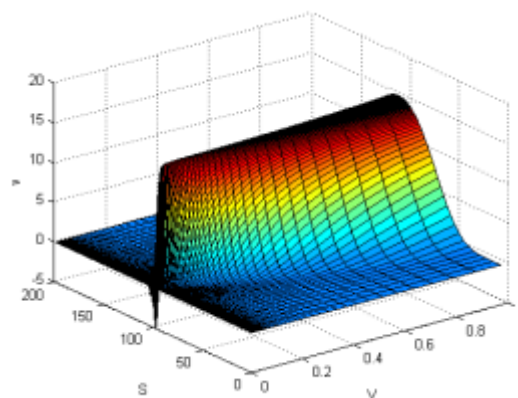
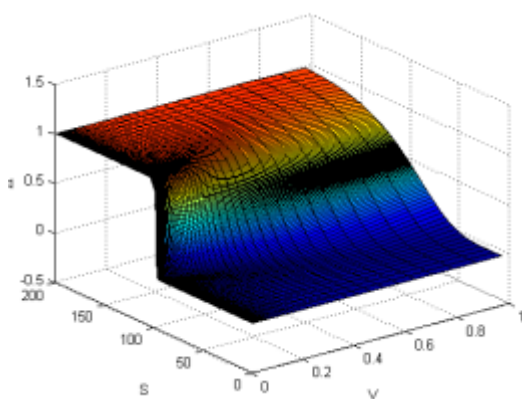


Рис.5. Графік зміни ціни від  $S$  та  $V$ .

## ВИСНОВОК

В цій курсовій роботі був проведений аналіз моделей оцінок опціонів. Окремо розглянуто моделі Хестона та моделі SABR зі стохастичною волатильністю. Було застосовано метод кінцевих різниць для розв'язання диференціального рівняння опціону в частинних похідних, та розглянуто один із IMEX-методів для вирішення системи лінійних рівнянь.

Третій розділ присвячено числовим експериментам для моделей Хестона та SABR із обраними початковими та граничними умовами.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. S.L. Heston, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *The Review of Financial Studies*, 6, 327-343, 1993.
2. F. Fang, Pricing Bermudan and American Options Using the FFT Method, Diploma thesis, Universität Erlangen-Nuernberg, 2006.
3. F. Fang, A Novel Pricing Method For European options Based on Fourier-Cosine Series Expansions, *SIAM Journal on Scientific Computing* 31, 826-848, 2008.
4. T. Haentjens & K.J. in 't Hout, ADI finite difference schemes for the Heston-Hull-White PDE, *Journal of Computational Finance*, 16, 83-110, 2012.