

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«Парадокси теорії ймовірностей: теорія та комп'ютерне моделювання»**

Виконав: студент 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Волошин Олександр Віталійович

Керівник: Щестюк Н.Ю.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
« ____ » _____ 20__ р.

Київ – 2021

ЗМІСТ	Стор.
<i>ВСТУП</i>	3
РОЗДІЛ 1 Теоретичні особливості і методи моделювання парадоксів теорії ймовірностей	
1.1. Парадокси як невід’ємна частина розвитку сучасної науки	6
1.2. Симуляція та імітаційне моделювання. Метод Монте-Карло	7
РОЗДІЛ 2 СУТЬ ТА ОПИС ДЕЯКИХ ПАРАДОКСІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	
2.1. Структурна схема дослідження	12
2.2. Суть, опис та деталізація деяких відомих парадоксів	13
РОЗДІЛ 3 Практична реалізація парадоків на основі симуляції та статистичного аналізу	
3.1. Експериментальні дослідження парадоксу Монті Голла через симуляцію	21
3.2. Експериментальні дослідження парадоксу де Мере через симуляцію	23
3.3. Експериментальні дослідження парадоксу Юла-Сімпсона через симуляцію	27
3.4. Експериментальні дослідження парадоксу «вимірювання «регулярності» грального кубика» через симуляцію.	28
3.5 Експериментальні дослідження парадоксу «транзитивності» через симуляцію	29
3.6 Результати порівняння теоретичних висновків і комп’ютерних симуляцій парадоксів	
Висновки по роботі	32
Література	33
Додаток А. Реалізація парадоксу де Мере (проміжні результати)	36
Додаток Б. Початкові дані для реалізації парадоксу Юла-Сімпсона (проміжні результати)	37

Додаток В. Код Python для симуляції парадоксів.

ВСТУП

Більшість процесів в сучасному світі підпорядковано використанню математичних моделей та формул, котрі в кількісному або якісному вираженні можуть детально представити певні характеристики. Багатовіковий розвиток теоретичних поглядів ймовірнісного характеру поступово агрегувався в один великий блок інформації, котрий відповідає за реалізацію світу з точки зору ймовірнісного представлення інформації.

Із подальшим розвитком науки з'являються так звані «винятки із правил» або такі події чи судження, котрі вступають у смисловий конфлікт із загальними теоретичними твердженнями чи установками. Тому в науковій спільноті з плином часу виникають *парадокси* як можливі положення, що не відповідають загальновідомим теоріям.

Вирішення парадоксів веде до прориву і прогресу як в математиці, так і в інших науках. І історія науки має чимало таких прикладів. Теорія ймовірностей завжди була багата на парадокси. Як зазначав Карл Пірсон, в математиці немає такого іншого розділу, в якому було б так легко помилитись, як в теорії ймовірностей.

Автори робіт про парадокси теорії ймовірностей, такі як Г. Секей [1], І. Володін [2], А. Колмогоров [3], Є. Свіцова [4] та Б. Гнеденко [5] привернули увагу до його блоку наукових проблем та надали повноцінні теоретичні обґрунтування різноманітних прийомів та їх попередню практичну перевірку. Така зацікавленість у сфері вивчення парадоксів і викликала зацікавленість у реалізації даної теми в роботі.

Метою даної роботи є фактичне розкриття сутності деяких парадоксів теорії ймовірностей та підтвердження цих висновків через симуляцію випадкового експерименту та подальшого статистичного аналізу його результатів.

Мета роботи зумовила наступне наукове завдання:

- обрати та дослідити теоретичні особливості деяких парадоксів теорії ймовірностей;

- створити та здійснити деталізовану схему комп'ютерного моделювання випадкових експериментів для обраних парадоксів;

- сформулювати висновки на основі отриманих практичних результатів.

Об'єктом дослідження є обрані парадокси теорії ймовірностей. Методами дослідження можна вважати прийоми та математичні моделі симуляції цих експериментів.

Результати дослідження покликані підтвердити або спростувати загальновідомі парадокси теорії ймовірностей на основі проведення комп'ютерних моделювань випадкових експериментів та сформулювати практичну базу перевірки парадоксальних гіпотез.

РОЗДІЛ 1: Теоретичні особливості парадоксів теорії ймовірностей

1.1. Парадокси як невід’ємна частина розвитку сучасної науки

Сучасні наукові теорії пройшли тернистий шлях від свого зародження та становлення впродовж багатьох століть. Так, наприклад, декілька тисячоліть людство думало, що планета Земля має плоску формацію і лише відносно не так давно наука прийшла до думки, що наше місце життя все ж схоже на сферу.

Проте проблем, що вирішує наука значно більше. І коли поточні теоретичні знання по певному питанню більше не вкладаються в загальноприйнятну теоретичну модель, то виникає так званий парадокс.

С. Важинський та Т. Щербак доволі влучно означили, що під парадоксом в загальному баченні прийнято характеризувати твердження, що має різке розходження із прийнятною, «безумовно вірною» думкою. У детальній характеристиці парадокс відповідає протилежним твердженням, коли кожний із них акумулює переконливі аргументи [14].

Що ж дає парадокс сучасній науці? Існує думка, що парадокси можуть бути ключовою та характерною рисою поточного наукового пізнання світу. Логічно, що кожне теоретичне бачення попри свою універсальність та унікальність із плином часу дає певний «збій». Такий перебіг подій змушує або коригувати логіку доведень парадоксу (вона в цілому може бути хибною), або покращити вже існуючу теорію в системі теоретичних знань [4].

Якщо звернути увагу на розвиток філософії як науки, то там є доволі цікаве твердження, що наука ніколи не стоїть на місці і постійно видозмінюється під впливом тих чи інших внутрішніх та зовнішніх чинників. Багато із наукових теорій, наприклад Древньої Греції чи Риму досі використовуються у сучасній науковій практиці, але багато з них століттями не використовуються, тому логічно сформулювати гіпотезу про те, що сучасна наука також продовжує свій розвиток і з плином часу будуть знайдені та доведені нові теоретичні та практичні алгоритми тих чи інших подій. Оскільки

людство знаходиться в пошуку доведення теорем, аксіом для звичайних подій, щоб максимально формалізувати своє життя та зробити його більш адаптивним та гнучким, тому виявлення парадоксів може стати рушійною силою для подальшого розвитку наукової спільноти.

Оскільки ми знаходимося 21-му столітті, вік великих даних, тому на перший план виходять ті парадокси, які пов'язані із великими масивами даних, а великі масиви даних свою чергу несуть великі труднощі з їх обробкою та потребують повноцінного аналізу. Тому вивчення парадоксів у комбінації із математичним моделюванням, симуляцією, статистичним збором інформації та аналізом, теорії ймовірностей є доволі потрібним та перспективним заняттям.

1.2. Симуляція та імітаційне моделювання. Метод Монте-Карло

Основною метою роботи було не тільки і не стільки визначення теоретичної суті парадоксів теорії ймовірностей, а саме підтвердження цих висновків через моделювання випадкового експерименту. Отже, доцільно буде зупинитись на огляді основних методів моделювання.

Більшість наукових відкриттів та законів сучасного світу виявлені або підтверджені за допомогою експериментів та дослідів. Тому, щоб пізнавати навколишній світ як метод наукового пізнання доволі часто використовують моделювання як дієвий спосіб вирішення задач, котрі не можуть вирішуватись безпосередньо в ході функціонування процесу.

Під моделюванням можна зрозуміти такий метод дослідження, який відповідає за формування реальних чи абстрактних об'єктів-прототипів на умовних схемах, образах чи фізичних об'єктів, що мають певні відмінності від прототипів, проте аналогічні за внутрішньою побудовою чи виконують аналогічні функції або мають той же самий тип поведінки [6]. При цьому в дослідженні розглядається поняття модель в якості представлення об'єкта,

системи чи поняття в певній абстрактній формі, що може бути зручною для проведення дослідження [6].

Серед основних класифікаційних ознак моделей можна виділити наступні: з точки зору зміни моделі в часі виділяють статичну (незмінну) та динамічну (змінюється з перебігом часу); динамічні в свою чергу поділяються на неперервні та дискретні (зміна тільки у визначені періоди часу); дискретні також можуть поділятися на детерміновані (зміни в яких передбачувані та контрольовані) та стохастичні (зміни відбуваються хаотично чи із заданою ймовірністю) [7].

Серед найбільш відомих методів моделювання навколишніх процесів варто виділити три основних, а саме аналітичне, математичне та імітаційного моделювання [8].

“Відповідно до тематики обраної роботи цікаво розглянути питання симуляції як дієвої роботи саме імітаційного моделювання. Оскільки воно дозволяє будувати моделі, що описують процеси так, як вони проходили б у дійсності. Таку модель можна застосувати під час як для одного випробування, так і заданого їх безлічі. При цьому результати будуть визначатися випадковим характером процесів. За цими даними можна отримати достатньо стійку статистику”[8].

При цьому при імітаційному моделюванні визначена система замінюється моделлю з достатньою точністю описує реальну систему і з нею проводяться експерименти з метою отримання інформації про цю систему. Експериментування з моделлю називають імітацією. Імітаційне моделювання - це окремий випадок математичного моделювання.

До імітаційного моделювання вдаються, коли:

дорого або неможливо експериментувати на реальному об'єкті;

неможливо побудувати аналітичну модель: в системі є час, причинні зв'язку, наслідок, нелінійності, стохастичні змінні;

необхідно зімітувати поведінку системи в часі.

Мета імітаційного моделювання полягає у відтворенні поведінки досліджуваної системи на основі результатів аналізу найбільш істотних взаємозв'язків між її елементами або іншими словами - розробці симулятора досліджуваної предметної області для проведення різних експериментів. Імітаційне моделювання дозволяє імітувати поведінку системи в часі. Причому плюсом є те, що часом в моделі можна управляти: уповільнювати у випадку з швидкоплинними процесами і прискорювати для моделювання систем з повільною мінливістю [20].

Можна виділити два різновиди імітації:

- метод Монте-Карло (метод статистичних випробувань);
- метод імітаційного моделювання (статистичне моделювання) [9].

Метод Монте-Карло можна визначити як метод моделювання випадкових величин з метою обчислення характеристик їхнього розподілів.» [20]

«Сама назва «Монте-Карло» походить від міста Монте-Карло в князівстві Монако, знаменитого своїм гральним будинком. Одним з найпростіших механічних приладів для отримання випадкових величин є рулетка.»[20] «Метод Монте-Карло» рівний «методу статистичних випробувань. У зарубіжній літературі зазвичай говорять про методи Монте-Карло, маючи на увазі ту обставину, що підлягають обчисленню величини можуть бути оцінені, виходячи з різних імовірнісних моделей.

Для моделювання випадкових процесів, пов'язаних із застосуванням методу Монте-Карло, необхідні випадкові числа. Оскільки при обчисленнях методом значну кількість операцій витрачається для оперування над випадковими числами, то наявність простих і економних способів формування послідовності випадкових чисел багато в чому визначає можливість практичного використання цього методу [10-11].

Стає зрозуміло, що використання симуляції неможливе без застосування статистичного апарату.

Окрім методів імітаційного моделювання, а саме методу Монте-Карло в роботі було використано методи математичної статистики. Відправними

точками математичної статистики є генеральна сукупність та вибірки. Генеральна сукупність - набір об'єктів, з яких створено вибірку. Вибіркою - набір випадково взятих об'єктів при дослідженні ознаки. Більш детальне ознайомлення із статистичним апаратом аналізу даних буде проведено в практичній частині роботи.

Оскільки основним предметом нашого дослідження є парадокси теорії ймовірностей, то варто навести ті терміни і означення, якими ми будемо оперувати.

Випробування – це експеримент, дослідження чи процес. Подія – це результат випробування.[13]

Випадковою подією називають величину, яка в результаті дослідження може з'явитися, а може не з'явитися, незалежно від бажання дослідника. Наприклад, випав герб; здав екзамен на відмінно.[12]

Ймовірність P появи події A у випадку експерименту з скінченим числом рівноможливих подій називається відношення числа m випробувань, що сприяють появі події A , до загального числа n всіх можливих випробувань:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

Цю теоретичну ймовірність заданої події можна оцінити за допомогою частоти, здійснивши серію незалежних випробувань. Право для такої оцінки дає нам закон великих чисел у формі Бернуллі.

Закон великих чисел у формі Бернуллі полягає в нижчевикладеному: з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при достатньо великій кількості випробувань частота появи події A як завгодно мало відрізняється від її ймовірності в окремому досліді, тобто,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1$$

де будь-яке додатне число. Іншими словами, при необмеженому збільшенні числа n випробувань частота $\frac{m}{n}$ події A збігається за ймовірністю до $p(A)$ ймовірності події A в окремому досліді.[22]

Розглянувши основні теоретичні характеристики моделювання, симуляції, імітаційного моделювання, статистичного аналізу, теорії ймовірностей можна сказати, що ці математичні прийоми доволі добре вкладаються в тематику написання цієї роботи.

РОЗДІЛ 2. СУТЬ ТА ОПИС ДЕЯКИХ ПАРАДОКСІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Структурна схема дослідження [14]

Даний розділ пропонується розпочати із формування структурної схеми дослідження, яка у графічній формі покаже оптимальний алгоритм проведення роботи на основі вхідних інформаційних даних.

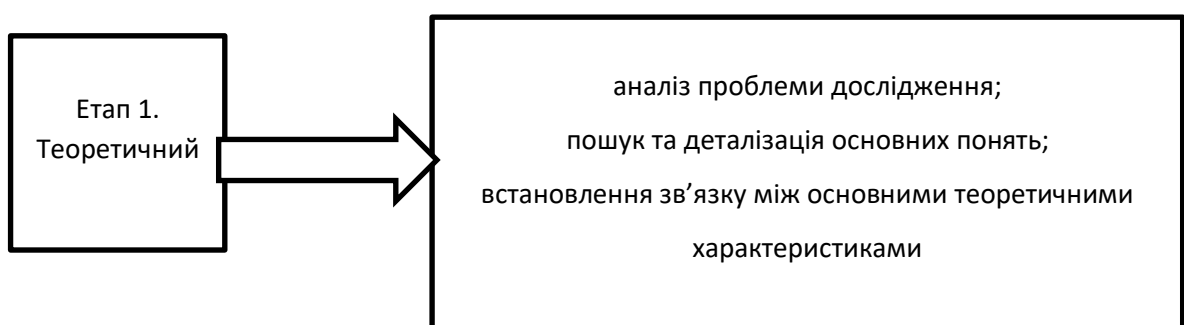
При формуванні структурної схеми дослідження варто звертати увагу на ключові фактори роботи і відсікати особливості, котрі не відіграють значної ролі у формуванні тематики роботи.

Алгоритм дослідження буде включати в себе чотири етапи розгляду (рис.1).

На першому етапі відбувається теоретичний розгляд вхідного матеріалу.

На другому етапі роботи пропонується детально розглянути ті парадокси, котрі будуть використовуватися в роботі в практичній частині. Йде мова про сутність та опис. У завданні роботи пропонується розглянути саме 5 теоретичних особливостей парадоксів, у практичній частині відбуватиметься реалізація для цих парадоксів за допомогою симуляції, статистичного аналізу на основі теорії ймовірностей.

На третьому етапі відбувається практична реалізація парадоксів із використанням математичного апарату, а також за допомогою прикладних програм як дієвого способу встановлення фактичної інформації та її обробки. Також на цьому етапі формуються висновки.



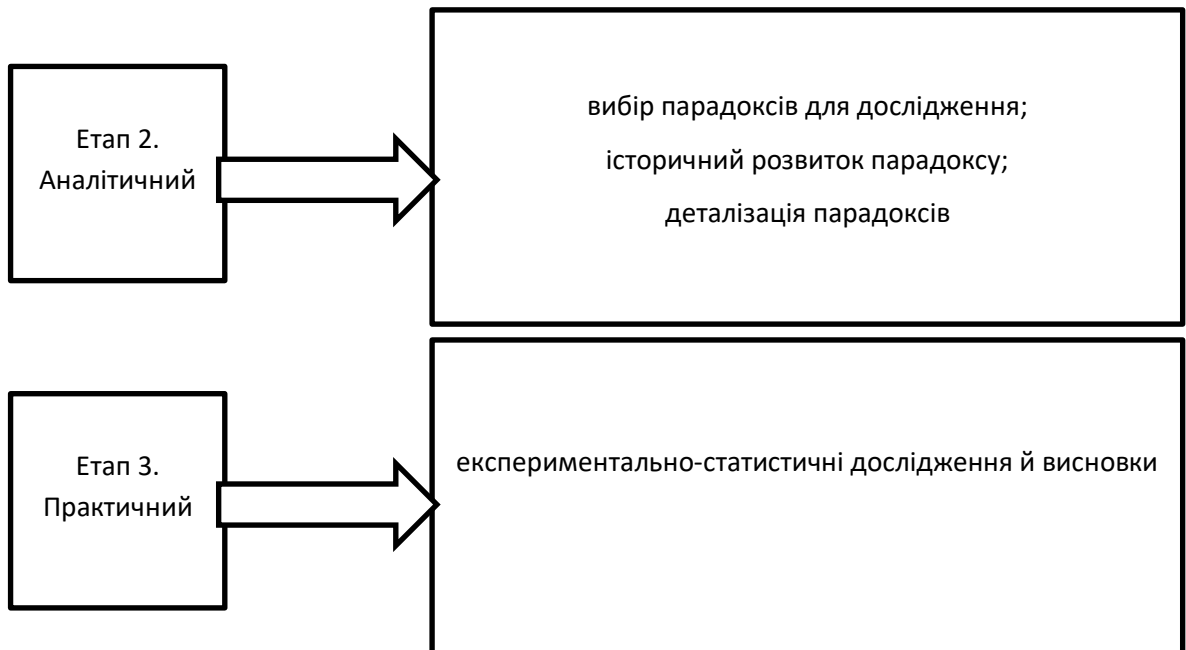


Рисунок 2.1- Структурна схема дослідження

Саме останній етап є максимально важливим, оскільки він показує кінцеву релевантність дослідження та надає базу для формування висновків по роботі.

2.2. Суть, опис та деталізація відомих парадоксів

Було обрано п'ять парадоксів для теоретичного дослідження. Пропонується детально розглянути кожний із них.

Парадокс перший. Монті Голла.[1,15]

Один із найбільш відомих світових парадоксів. Формування завдання полягає в тому, що у кожному з випусків популярного телевізійного шоу,

глядачам і учаснику шоу пред'являються троє закритих дверей, за якими знаходяться призи. Ведучий пояснює, що в якості призів, за однією з дверей знаходиться автомобіль, за двома іншими - козлики. Завдання учасника шоу - правильно вибрати двері і, отже, вдало отримати приз. Ведучий знає, за якою дверима знаходиться автомобіль. Ведучий пропонує учаснику вибрати одну з трьох дверей. Учасник вказує на одну з дверей. Ці двері відразу не відкривається, але ведучий відкриває одну з решти дверей, за якої, природно, знаходиться козел, і пропонує учаснику можливість змінити свій вибір дверей. Питання: чи збільшаться шанси учасника виграти автомобіль, якщо учасник прийме пропозицію ведучого і змінить свій вибір?

Правильна відповідь: виграшним є саме рішення змінити вибір. Імовірність отримання головного призу при цьому підвищується [1,15].

Пояснення парадоксу [24]

Задача вирішується, якщо використати теорему Баєса. Вводимо насупні величини:

$C \in \{1,2,3\}$: двері, за якими схована машина,

$S \in \{1,2,3\}$: номер дверей, обраних гравцем,

$H \in \{1,2,3\}$: номер дверей, відкритих ведучим.

$P(c)$ для будь якого $C = \frac{1}{3}$. [24]

Поведінка ведучого визначається значенням умовної ймовірності H при даних C та S :

$$P(H \vee C, S) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } H = S \\ 0, \text{ якщо } H = C \\ \frac{1}{2} \text{ якщо } S = C \\ 1, \text{ якщо } H \neq C \text{ або } S \neq C. \end{cases}$$

Гравець може використати правило Баєса для підрахунку ймовірності знаходження машини за будь-якими дверима, після його початкового вибору і відкриття дверей ведучим. Це є умовна ймовірність C при даних H і S :

$$P(C|H, S) = \frac{P(H|C, S)P(C \vee S)}{P(H, S)}$$

Де знаменник обчислюється як безумовна ймовірність

$$P(H|S) = \sum_{c=1}^3 P(H, C|S) = \sum_{c=1}^3 P(H|C, S)P(C|S).$$

Тоді, якщо гравець на початку обрав двері 1, ведучий відкриває 3 двері, тоді ймовірність, що автомобіль за 2 дверима, при тому що гравець змінить свій вибір:[24]

P

Ця ймовірність – є ймовірністю відкрити двері з машиною, при зміні рішення незалежно від початкових даних.

Парадокс другий. Парадокс де Мере про пропорційність критичних значень.[1,16,17]

Історія парадоксу. Розпочинається 17 столітті, коли відомий французький гравець де Мере зустрівся із відомим французьким науковцем Блезем Паскалем та повідомив йому дві задачі, які були пов'язані з азартними іграми. Одна з них саме відповідає парадоксу де Мере. В історії залишилися інформація, що Паскаль обговорював з Ферма у 1654 році ці задачі і прийшов з ним до однакових результатів. Цікаво, що самого де Мере цікавили парадокси більше практичної точки зору оскільки він був видатним азартом гравцем.

«Суть парадоксу. При чотирьох киданнях однієї гральної кості ймовірність того, що принаймні один раз випаде 1, більше $1/2$. У той же час при 24 киданнях двох кісток ймовірність випадання двох одиниць одночасно (по крайній мірі один раз) менше $1/2$. Це здається дивним, так як шанси отримати одну 1 в шість разів більше, ніж шанси випадання двох 1, а 24 як раз в 6 разів більше 4.

Пояснення парадоксу. Якщо гральний кубик кидають k раз, то число можливих (і рівномірних результатів) рівне 6^k . У 5^k випадках з цих 6^k кубик не ляже на 6, і, отже, ймовірність випадання принаймні один раз 1 при k киданнях дорівнює $(6^k - 5^k) / 6^k = 1 - \frac{5^k}{6^k}$, що більше $1/2$, якщо $k = 4$. З іншого боку, величина $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k$, яка виходить аналогічно, все ще менше $1/2$ для $k = 24$ і перевершує $1/2$ починаючи з $k = 25$.» [21]

Критичне значення для одного кубика = 4, а для пари кубиків = 25. Весь парадокс полягає в тому, що це рішення не співпадає з «правилом пропорційності критичних точок», в якому говориться, що якщо ймовірність зменшується в 6 разів, то критичне значення збільшується в 6 раз(4:6 = 24: 36) [1].

Абрахам де Муавр в книзі « Доктрина шансів» довів, що правило пропорційності критичних значень» недалеко від істини і довів наступну формулу.

$$(1 - p)^x = \frac{1}{2}$$

Критичне значення k – найменше ціле число, що перевищує x .

Рішення наведеного вище рівняння представляється наступною формулою [19]:

$$x = -\ln 2 / \ln (1 - p) = \ln 2 / (p + p^2/2 + \dots)$$

І тепер видно, що якщо p є дуже маленьким, то p^2 зазвичай нехтують. Але в нашому випадку $p = 1/6$ і сумою $p^2, p^3..$ не можна нехтувати, саме це й приводе до такої різниці і невиконання « правила пропорційності критичних значень».

Парадокс третій. Парадокс Юла-Сімпсона.[23]

Історія. Вперше відзначено Пірсоном, котрий рахував залежності характеристик різнорідних груп коней. У. Юл робить детальний аналіз таких демографічних змін, вивчення механізмів спадковості. Сімпсон вважає парадокс «цікавим випадком» в кілька розділів статті, Сімпсон був першим автором, який вивчав це явище з точки зору статистики.

Суть. Парадокс означає ефект, явище в статистиці, коли при наявності двох груп даних, в кожній з яких спостерігається однаково спрямована залежність, при об'єднанні цих груп напрямок залежності змінюється на протилежне. Такий парадокс простіше пояснювати на прикладах.

Наведемо один приклад з [23].

В експериментальному тесті приймали участь 1710 чоловіків та 900 жінок з однією хворобою. Їх розбили на групи, одні приймали ліки, а інші плацебо(речовина без лікувальних властивостей, що використовується для імітації лікарського препарату в дослідженнях)

	Ліки	Плацебо
Чоловіки	1500	210
Жінки	220	680
Всі	1720	890

Рис 2.2 – Експериментальний тест

Після курсу ліків отримали цікавий результат одужання пацієнтів:

	Ліки		Плацебо	
Чоловіки	700	46,70%	210	38,10%
Жінки	150	68,20%	680	58,80%
Всі	850	49,40%	890	53,90%

Рис 2.3 – Результати одужання після пройденого лікування

З усіх людей одужало 700 чоловіків і 150 жінок, що використовували ліки та 80 чоловіків і 400 жінок, що лікувались плацебо. Дивимось частку(%) і бачимо, що для жінок і чоловіків ліки є ефективними і варто випускати ці ліки в маси. Але не варто поспішати, якщо дивитись групу в цілому (чоловіків і жінок), то ми маємо зовсім протилежний результат. Тепер велика частка на стороні плацебо і виходить, що краще не приймати ліки. Одним із варіантів розв'язання проблеми є категорювання. За допомогою даного парадоксу можна «вміло» трактувати дані в свою користь.[23]

Пояснення. Причина парадоксу полягає в некоректному усередненні двох груп даних з різною часткою контрольних спостережень (нерепрезентативна вибірка). Оскільки інтуїтивно передбачається, що при застосуванні знайдених залежностей частка контрольних буде однаковою в

обох групах, а у вихідних даних це не виконується, то до них можна застосовувати арифметичне усереднення. Парадокс Сімпсона показує, що висновки з результатів соціологічних опитувань з репрезентативної вибірки не можна приймати як незаперечні, доведені науковим шляхом [18].

Парадокс четвертий. «Вимірювання «регулярності» грального кубика»[1]

При підкиданні правильного кубика, де ймовірність випадання кожного ребра однакова одна й та сама грань з'явиться двічі поспіль в середньому при 7 підкиданнях і три рази підряд при 43 підкиданнях.

Якщо гральний кубик не правильний, тобто різні грані мають різну ймовірність випадання, то середнє число до появи одної й тої ж грані двічі або тричі буде менше. Вважаємо, що кубик під номером 1 «регулярніший» за кубик 2, якщо другий кубик потрібно в середньому підкинути більше разів, щоб отримати одну й ту ж грань двічі(тричі).

Парадокс полягає в наступному : може бути таке, що для отримання одної грані 2 рази поспіль на 1-ому кубіку буде необхідно більше підкидань, ніж на 2-гому. Але для випадання трьох разів поспіль одної грані, необхідно вже буде кинути 2-ий кубик більше разів.

Наступний приклад був придуманий Т.Мори і описаний в статті Шомоді А. «Об одном парадоксе, связанном с бросанием костей», Сб. Труды конференции молодых ученых Будапештского и Московского университетов».

Припустимо, що грані 1о-го кубика випадають з ймовірностями : 0.03, 0.03, 0.19, 0.19, 0.28, 0.28. і відповідно для другого кубика ймовірності : 0.04, 0.04, 0.17, 0.17, 0.29, 0.29.

У своїй статті Шомоді А. надав наступні формули, які використовуються в даному парадоксі:

У випадку якщо деяка грань з'являється з ймовірністю p , то середнє значення необхідних підкидань для отримання цієї грані k разів поспіль дорівнює

$$m_p = p^{-1} + p^{-2} + \dots + p^{-k}$$

І нехай. M_k визначає середнє число підкидань, які необхідні для отримання одної й тої ж грані k рази поспіль.

$$M_k^{-1} = m_p^{-1} + m_p^{-2} + \dots + m_p^{-6}$$

Порахувавши M_k для першого кубика і другого кубика, я отримав наступні значення:

Для 1-го кубика: $M_2 = 5,408, M_3 = 22,956$;

Для 2-го кубика: $M_2 = 5,468, M_3 = 22,822$;

Парадокс п'ятий. Парадокс транзитивності. [1]

Два гравці А і В грають в наступну гру : на першому кроці гравець А на свій смак (може вираховувати, використовувати всі доступні теорії) записує по одному числу з набору 1, 2, 3, ..., 18 на кожній ігровій грані кубика (кожне число має бути використано тільки 1 раз).

На другому кроці гравець В, після того як уважно вивчить кожен кубик(пронумеровані гравцем А), має обрати один з них.

На третьому кроці гравець А обирає один кубик з тих двох, що лишились. І останній крок – А і В підкидають свої кубики, виграє той, в кого випало більше число.

Здається, що гра більш вигідна гравцю В, так як незалежно від того, як гравець А пронумерує всі 3 кубики, В завжди може обрати кращого з них (або одного з кращих). Відповідно, шанс перемогти у гравця В становить щонайменше 50%. Однак насправді ситуація зовсім протилежна : гравець А може так пронумерувати гральні кубики, що він перемагає з ймовірністю 21/36 (що є більше 50%), незалежно від того, який кубик обере гравець В. Це відбувається через систему нумерації «поразка по колу», при якій кожен з кубиків перемагає рівно один з інших двох кубиків, що означає що серед кубиків немає «кращого».

Для цього все, що необхідно зробити – це правильно пронумерувати кубики гравцю А. Один з варіантів нумерації навів Г.Секей в книзі «Парадоксы в теории вероятности и математической статистике». Нехай 1,2 і 3 – три кубики і припустимо, що гравець А пронумерував гральні кубики таким чином:

18, 10, 9, 8, 7, 5 на гранях першого кубика.

17, 16, 15, 4, 3, 2 на гранях другого кубика.

14, 13, 12, 11, 6, 1 на гранях третього кубика. [1]

Нескладно порахувати, що на кубіку 1 з'явиться число більше ніж на кубіку 2 з ймовірністю $(21/36)$. Саме в 21 випадках з 36 можливих на 1-ому кубіку значення на ребрі більше. При порівнянні 2-го кубіка з 3-ім так само, на 2-ому кубіку з'явиться більше число ніж на 3-ому з ймовірністю $21/36$. І так само при порівнянні 3 й 1 кубиків – більшу ймовірність перемогти маємо з кубіком під номером 3. Таким чином умова транзитивності: $a > b; b > c \Rightarrow a > c$ не виконується, в цьому й полягає парадокс в даному випадку.

РОЗДІЛ 3 Практична реалізація парадоксів на основі симуляції та статистичного аналізу

3.1. Експериментальні дослідження парадоксу Монті Голла через симуляцію

Для проведення даного експерименту використаємо Excel, де запишемо всі деталі. Пропонується втілити 1000 експериментів, де на основі генератора випадкових чисел застосувати відповідні формули та зміни.

Таким чином виглядає стартова частина таблиці, яка зображена на рис.3.1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Номер експерименту	Двері, де знаходиться авто (генерується від 1 до 3)	Двері 1	Двері 2	Двері 3	Вибір гравця	Ведучий тепер вибирає двері з двох, що залишилися, щоб відкрити її вам	Він не відкриває двері, за якими автомобіль, а в разі, якщо ви спочатку показали на двері з козою, відкриває іншу єдину можливу двері з козою! У цьому його підказка для гравця.	Залишаємо вибір (перемога)	Мінаємо вибір	Мінаємо вибір (перемога)	
1	1	2	Козлик	Авто	Козлик	3	2		1	0	2	1
2	2	3	Козлик	Козлик	Авто	1	2		2	0	3	1
3	3	3	Козлик	Козлик	Авто	3	1		1	1	2	0
4	4	1	Авто	Козлик	Козлик	1	2		2	1	3	0

Рисунок 3.1- Фрагмент стартової частини таблиці

Деталі по рис.3.1:

Стовбець А – номер спостереження, стовбець В – номер дверей, де фактично знаходиться автомобіль (значення генерується автоматично через функцію =СЛУЧМЕЖДУ(1;3)), стовбці С, D, E – варіанти того, як в конкретному випадку розміщені Козлики, якщо Автомобіль знаходиться саме за певними дверима (=ЕСЛИ(В2=2; "Авто"; "Козлик")), стовбець F – номер дверей, котрі гравець обирає вперше (також функціонує через =СЛУЧМЕЖДУ(1;3)), стовбець G – номер дверей, які відкриває ведучий (відрізняється від вибору гравця) (=ЕСЛИ(F2=1; СЛУЧМЕЖДУ(2;3); ЕСЛИ(F2=3; СЛУЧМЕЖДУ(1;2); СЛУЧМЕЖДУ(0;1)*2+1))), стовбець H – ведучий не відкриває двері, за якими автомобіль, а в разі, якщо спочатку гравець показав на двері з козликом, то ведучий відкриє іншу єдину можливу двері з козликом (=ЕСЛИ(В2=G2; 6-СУММ(F2:G2); G2)). Далі гравець може змінити свій вибір: стовбець I – якщо він цього б не зробив (=ЕСЛИ(F2=B2; 1;

Рисунок 3.3- Кінцевий результат пошуку перемоги при незмінній чи змінній стратегії

Як бачимо із 1000 спостережень перший гравець (який не міняє свого вибору) здобуває перемогу у 325 випадках (тобто ймовірність 0,325), гравець номер 2 (міняє вибір) здобуває перемогу у 675 виборах із 1000 (тобто ймовірність 0,675). Звичайно, в ході використання генератору випадкових чисел доволі складно добитись ідеального розподілу на пропорціями (1/3) та (2/3).

3.2. Експериментальні дослідження парадоксу де Мере через симуляцію

Почнемо з того, що при чотирьох вкиданнях одної гральної кості ймовірність того, що по крайній мірі один раз випаде одиниця більше 1/2. Це так, оскільки для цього потрібна реалізація: $(1-(5/6)^4=0.5177)$.

Провівши тести та використавши генератор випадкових чисел можемо бачити появу «1» в запропонованих варіантах вибору:

Кількість вкидань	Отримане число
1	5
2	3
3	1
4	5

Рисунок 3.4- Симуляція перших 4 вкидань

Далі в Excel пропонується врахувати 24 вкидання першого та другого кубика та змодельовати кількість випадінь одночасно одиниці. Яскравий результат приведено на рис.3.5.

Номер експерименту1	Число1	Номер експерименту2	Число2		Порівняння
1	4	1	5		0
2	6	2	1		0
3	5	3	1		0
4	6	4	1		0
5	6	5	2		0
6	3	6	3		0
7	6	7	4		0
8	4	8	6		0
9	4	9	2		0
10	4	10	6		0
11	2	11	2		0
12	2	12	1		0
13	6	13	3		0
14	4	14	4		0
15	3	15	6		0
16	1	16	1		1
17	1	17	3		0
18	2	18	2		0
19	5	19	3		0
20	3	20	3		0
21	6	21	6		0
22	3	22	6		0
23	1	23	6		0
24	1	24	5		0
				>0,то випало	1

Рисунок 3.5- Проведення симуляції для двох кубиків

Також пропонується в рамках даного парадоксу обчислити ймовірності випадіння «1» при киданні кубика до 30 разів. Як бачимо, з ростом кількості кидків така ймовірність наближається до 1 (при цьому вірно розрахована ймовірність при 4 кидках – 0,5177).

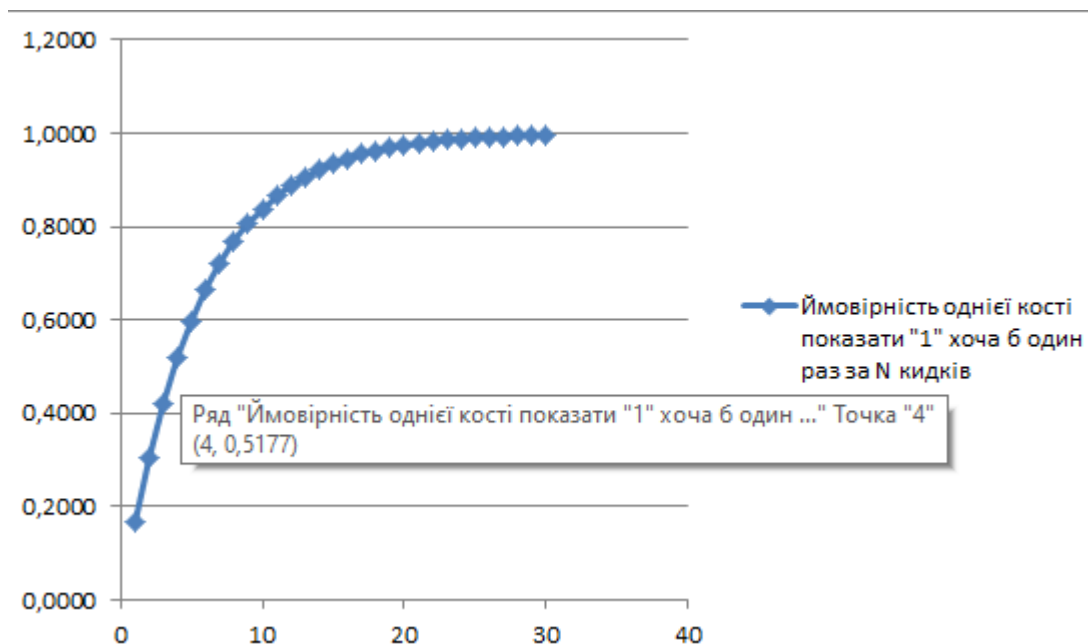


Рисунок 3.6- Симуляція вкидання одного кубика та пошук випадіння «1» впродовж 30 спостережень

Також пропонується в рамках даного парадоксу обчислити ймовірності випадіння однакових чисел (наприклад «1» чи інших) при киданні двох кубиків до 30 разів. Як бачимо, з ростом кількості кидків така ймовірність ледве наближається до 0,5 (при цьому вірно розрахована ймовірність при 24 кидках – 0,4914).

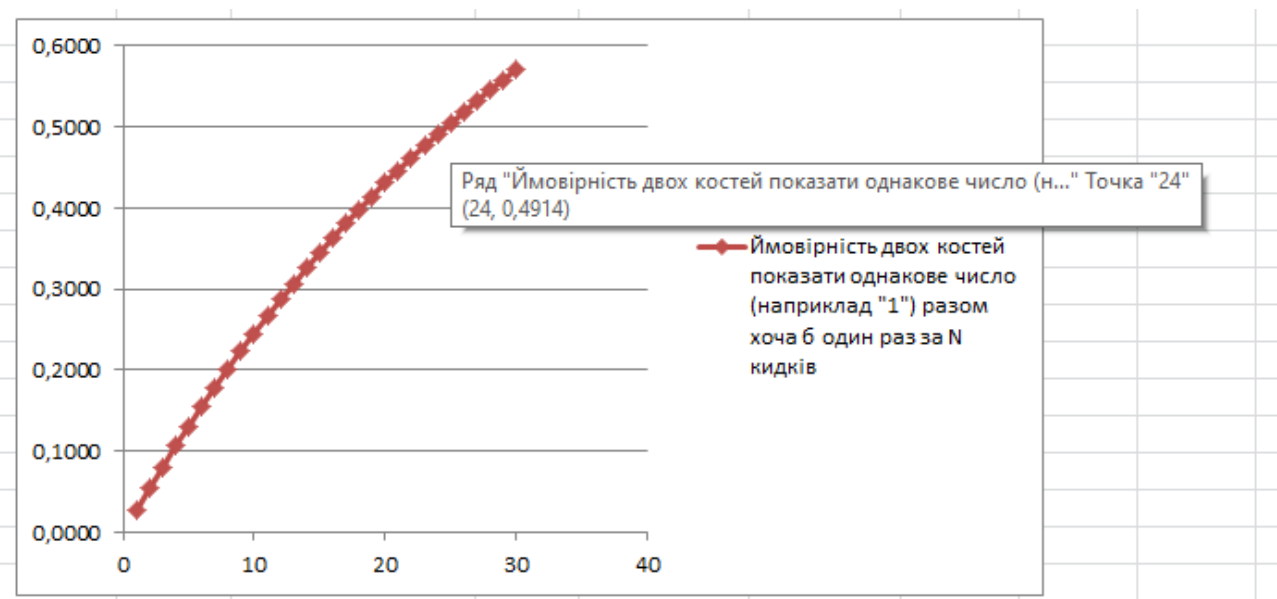


Рисунок 3.7- Симуляція вкидання двох кубиків та пошук випадіння однакових значень впродовж 30 спостережень

На рис.3.8 показане порівняння обох графіків:

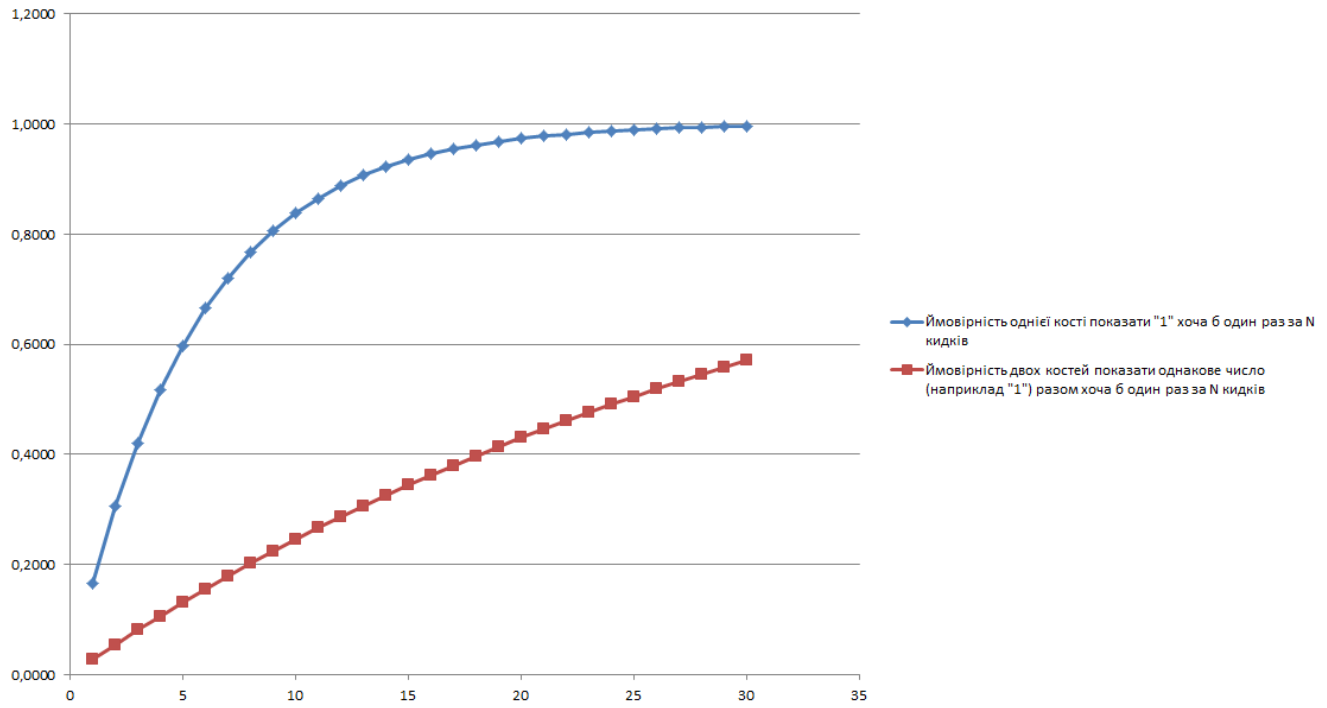


Рисунок 3.8- Порівняння ймовірностей для одиничних та парних вкидань

Щоб перевірити ці всі дані, я вирішив провести експерименти і написав код Python. Де спочатку обрахував ймовірність того, що випаде число один при чотирьох підкиданнях одного кубика. Цей експеримент був повторений 1000000 разів після чого я отримав такий результат. Ймовірність наведеної вище події буде дорівнювати 0,517721 . Порівнюючи з теоретичною ймовірністю, що була порахована в Excel (0,5177) раніше ми бачимо, що ці ймовірності збігаються з точністю до десятитисячних.

Також на Python було проведено симуляцію підкидання кубиків і другої частини цього парадоксу, коли підкидаються одразу 2 кубики 24 рази. Такий експеримент був проведений теж 1000000 разів. І ймовірність події, що випаде

хоча б одна пара одиничок дорівнювала 0,491537. А вище теоретично обрахована дорівнювала 0,4914. Ймовірності рівні з точністю до тисячних.

Експерименти по парадоксу де Мере можна вважати завершеними.

3.3. Експериментальні дослідження парадоксу Юла-Сімпсона через симуляцію

Для симуляції представлені числові дані (повністю в Додатку), котрі складаються із 500 спостережень, що розбиті на 5 груп (А, В, С, D, E). На наступному рисунку 3.9 показано діаграму розсіювання, а також проведено побудову регресій по кожній із п'яти груп.

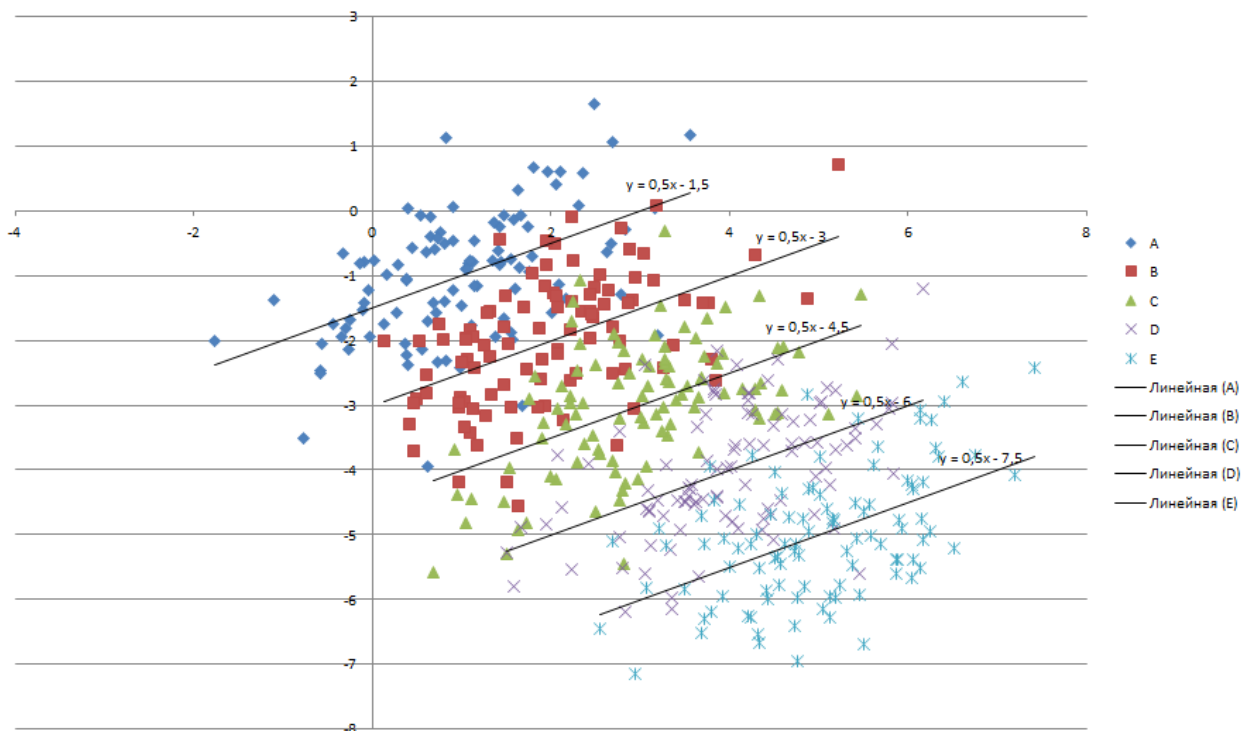


Рисунок 3.9 - Побудова вихідних даних та рівняння регресії по групам

Як бачимо кожна із приведених регресій має тренд на зростання. Аналогічно тепер знайдемо регресійне рівняння для всієї сукупності. Так це виглядає на графіку (рис.3.10):

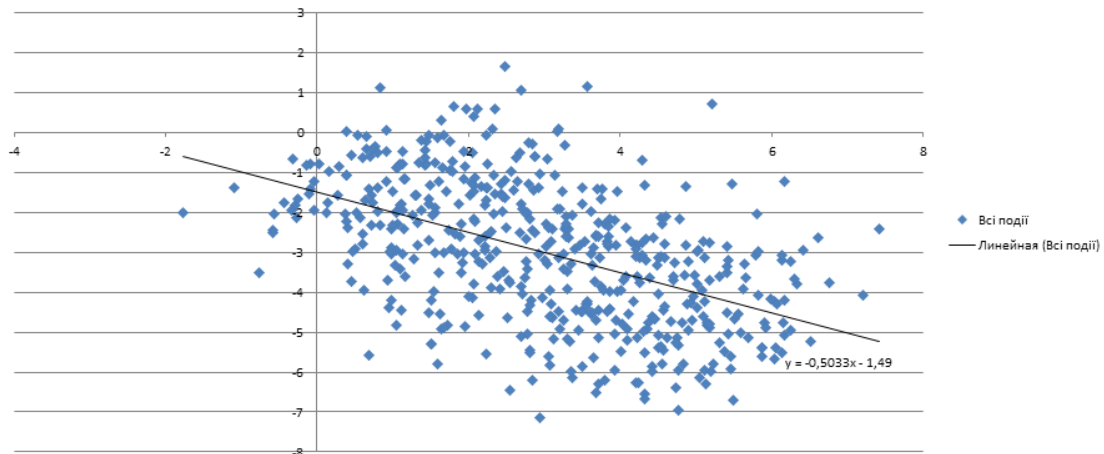


Рисунок 3.10 - Побудова регресійного рівняння для усієї сукупності даних

Бачимо, що регресія має тренд на спадання.

3.4 Експериментальні дослідження парадоксу «вимірювання «регулярності» грального кубика» через симуляцію

Для того, щоб перевірити даний парадокс і переконатись у тому, що все було пораховано правильно, я вирішив реалізувати симуляцію з підкиданням неправильних гральних кубиків через програмний код Python. (додаток В)

Я задав ймовірності для обох кубиків. Грані 1-го кубика випадають з ймовірностями : 0.03, 0.03, 0.19, 0.19, 0.28, 0.28. і відповідно для другого кубика ймовірності : 0.04, 0.04, 0.17, 0.17, 0.29, 0.29. Після чого провів симуляцію підкидання першого кубика до появи двох однакових граней 1000000 разів. І так само до появи 3 однакових граней. Такі самі експерименти я провів і для 2-го грального кубика. Зараз наведу результати, які були отриманні після симуляції даного парадоксу.

Середнє число необхідних підкидань першого кубика для появи двох однакових граней = 5,412. Для появи трьох однакових граней = 22,948.

Середнє число необхідних підкидань другого кубика для появи двох однакових граней = 5,465. Для появи трьох однакових граней = 22,823.

Ми отримали, що середні значення необхідних підкидань для отримання одної грані k разів поспіль, які були знайдені теоретичним шляхом збігається з тими значеннями, які були отримані на основі експериментів проведених в симуляції. І переконались, що дійсно має місце бути такий парадокс.

3.5 Експериментальні дослідження парадоксу «вимірювання «регулярності» грального кубика» через симуляцію

Для того, щоб перевірити даний парадокс, я написав програмний код на мові Python (див в додатку D).

Я задав значення на гранях для кожного з трьох кубиків відповідно до теоретичного матеріалу викладеного в розділі 2.2. Після чого провів по 1000000 симуляцій гри кубиків кожного з кожним: 1-ий з 2-им, 2-ий з 3-ім, 3-ій з 1-им. Я отримав, що кубик 1 перемагає в 2 з частотою 0.5834. Кубик 2 перемагає у кубика 3 з частотою 0.5834. І кубик 3 перемагає у кубика 1 з частотою 0.5836. Тобто з цим нумеруванням кубиків ми отримуємо таку ситуацію, коли кожен з кубиків перемагає по колу і не є кращим за інші 2. Результати прикріплені на рисунку 3.11

Парадокс "Транзитивності"

```
[47] edges_1 = [18, 10, 9, 8, 7, 5] # позначаємо числа на гранях 1 к
     edges_2 = [17, 16, 15, 4, 3, 2] # позначаємо числа на гранях 2 к
     edges_3 = [14, 13, 12, 11, 6, 1] # позначаємо числа на гранях 3 к
     prob = [0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666] # задаємо відповідно ймовірність
```

```
[48] def win_prob(edges_first ,edges_second, pr):
     k=0
     sum=0
     while k!=1000000: # Експеримент проводимо 1000000
         x = choices(edges_first, prob) # Перший гравець підкидає свій о
         y = choices(edges_second, prob) # Другий гравець підкидає свій о
         if (x > y): # Порівнюємо числа на гранях, що
             sum = sum +1
             k = k+1
     return sum/1000000
```

```
print("Частота перемоги гравця, який обрав 1-ий кубик над гравцем, що обрав 2-ий кубик = ",
print("Частота перемоги гравця, який обрав 2-ий кубик над гравцем, що обрав 3-ий кубик = ",
print("Частота перемоги гравця, який обрав 3-ий кубик над гравцем, що обрав 1-ий кубик = ",
```

```
Частота перемоги гравця, який обрав 1-ий кубик над гравцем, що обрав 2-ий кубик = 0.583365
Частота перемоги гравця, який обрав 2-ий кубик над гравцем, що обрав 3-ий кубик = 0.583433
Частота перемоги гравця, який обрав 3-ий кубик над гравцем, що обрав 1-ий кубик = 0.583664
```

Рис 3.11 – Симуляція парадоксу транзитивності на Python

3.6. Результати порівняння теоретичних висновків і комп'ютерних симуляцій

Даний пункт розпочнемо із розбору симуляції Монті-Голла. За допомогою Excel були запущені відповідні симуляції, які підтвердили доцільність зміни дверей під час процесу, коли ведучий відкривав одні із дверей. Після зміни гравець отримав з точки зору теорії ймовірностей фактично подвоєну ймовірність, щоб виграти у телевізійній грі. Теорія вказує, що величина ймовірності перемоги без зміни дверей теоретично рівна $1/3$, на практиці ми досягли результату, при якому дане значення не сильно відхиляється від вказаного. Теорія вказує, що величина ймовірності перемоги зі зміною дверей рівна $2/3$, на практиці ми досягли результату, при якому дане значення не сильно відхиляється від вказаного (все таки не варто забути, що застосовувався генератор випадкових чисел, котрий повністю не може

відповідати теоретичному закону). Наведені твердження підкріплені відповідними графічними матеріалами в Розділі 3.

Далі перевіримо положення щодо парадоксу де Мере. Провівши симуляцію в Excel на практичному прикладі підтвердилось виконання даного парадоксу. Було прийнято рішення розрахувати за допомогою відповідних формул значення ймовірностей при різноманітній кількості вкидань кубиків. На графіках підтверджено, що величина отримати однакове випадіння кубиків є нижче при 24 вкидань, оскільки рівна 0,4914. Також показано порівняння ймовірностей. На мові програмування Python було реалізовану також симуляцію 1000000 експериментів, де я отримав ймовірності випадання одиничок експериментальним способом і вони рівні теоретичним даним. Парадокс є також на конкретному прикладі підтвердженим.

Третій парадокс об'єднання (або Юла-Сімпсона) втілений на конкретному прикладі, котрий показує яким чином здійснюється реалізація парадоксу, котрий також вийшов підтвердженим.

В четвертому парадоксі (вимірювання «регулярності» грального кубика) теоретичні дані, які спочатку були знайдені повністю збігаються з результатами, які були отримані після комп'ютерного моделювання й симуляції даного парадоксу. Цим ми підтвердили існування такого парадоксу.

І останній парадокс «транзитивності» так само був підтверджений в після того, як я провів симуляцію на комп'ютері і знайшов частоту перемоги для кожного з кубиків, які збігалась з ймовірностями теоретичними.

Це означає, що п'ять обраних парадокси підтверджуються в повній мірі.

Висновки

В роботі були представлені теоретичні, аналітичні та практичні особливості проведення симуляції та статистичного аналізу деяких парадоксів теорії ймовірностей.

Такі результати показали, що парадокси є невід'ємною частиною нашого життя та дозволяють досягати нових наукових досягнень.

Було застосовано метод Монте-Карло як основний метод дослідження і створено структурну схему дослідження, в якій вказано конкретні етапи роботи.

Було обрано п'ять відомих парадоксів та зроблено пояснення причин та наслідків їх наявності.

Проведено комп'ютерну симуляції всіх п'яти обраних парадоксів. Результати порівняння теоретичних висновків і комп'ютерних симуляцій детально описано у пункті 3.6.

Література

1. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 240 с.
2. Володин И.Н. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. - Казань: (Издательство), 2006. - 271с.
3. Колмогоров, А. Н. Математика – наука и профессия / А. Н. Колмогоров. – Москва : Наука, 1988. –288 с.
4. Свіщова Є.В. Використання парадоксів теорії ймовірностей в навчальному процесі // Экспертные оценки элементов учебного процесса : программа и материалы XXII межвуз. науч.-практ. Конф – с.58-60.
5. Гнеденко Б.В. Очерк истории теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. -. М.: Наука, 1988.-241 с .
6. Лопатьєв А. Моделювання як методологія пізнання // Теорія та Methodika Fizičnogo Vihovannâ. 1. № 8. С. 4-10. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <https://core.ac.uk/download/pdf/304295518.pdf>
7. Стеценко, І.В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст] / І.В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://web.kpi.kharkov.ua/auts/wp-content/uploads/sites/67/2017/02/MOCS_Kachanov_posobie.pdf
8. Шигун М. Моделювання економічних явищ: теоретико-методичні аспекти [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <https://core.ac.uk/download/pdf/81588038.pdf>
9. Моделирование и симуляция логистических систем / Ю.И. Толуев, С.И. Планковский / – Курс лекций для высших технических учебных заведений. – Киев: «Миллениум», 2009. – 85 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <http://simulation.su/uploads/files/default/2009-lecture-toluev-plankovsky-1.pdf>
10. Школа молодых ученых по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде CITES-2009. Методы Монте-

Карло: теоретические основы и приложения [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <http://www.scert.ru/conferences/cites/2009/presentation/Presentation/School/Prigarin.pdf>

11. Численное интегрирование с использованием метода Монте-Карло [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: http://nano.ivanovo.ac.ru/pdfs/2010_7_01_12_56_38_monte-carlo.pdf

12. Стасюк М.Ф., Карабин О.О., Кусій М.І. Статистичний аналіз. Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач. [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <https://sci.ldubgd.edu.ua/bitstream.pdf>

13. Основні поняття теорії ймовірностей . Лекція №2 [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <https://teta.at.ua/statustuka/lekcija2.pdf>

14. Методика та організація наукових досліджень : Навч. посіб. / С. Е. Важинський, Т. І. Щербак. – Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. – 260 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <https://nuczu.edu.ua/sciencearchive/Articles/gornostal/vajinskii%20posibnyk.pdf>

15. Михаль О. Модифицированный парадокс монти холла. Моделирование на сетях Петри [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <https://openarchive.nure.ua/bitstream/document/5722/1/bionica-2015-1-23-29.pdf>

16. Матеріали V Всеукраїнської студентської науково – технічної конференції /В2т. – Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет ім. І.Пуллюя (м. Тернопіль, 25-26 квітня 2013 р.), 2013.- Т. 1. – 304 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: http://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/123456789/9699/2/Conf_2013v1_Rebrik_M-Paradoksy_teorii_ymovirnostei_136-137.pdf

17. Парадоксы теории вероятности [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: http://arbuz.uz/t_paradox.html

18. Парадокс Симпсона. [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <https://amp.www.google-info.org/703694/1/paradoks-simpsona.html>

19. Абрахам де Муавр, «Доктрина шансов»
20. [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу:
https://znaimo.com.ua/Імітаційне_моделювання
21. Парадокс де Мере. [Електронний ресурс]. -
https://uk.wikipedia.org/wiki/Парадокс_де_Мере
22. Тичинська Л.М. Теорія ймовірностей . [Електронний ресурс]. -
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fitki/4tichinska_teorija_jmovirnostej/52.htm
23. Парадокс Симпсона. [Електронний ресурс]. -
https://uk.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Сімпсона
24. Парадокс Монті Голла [Електронний ресурс]. -
https://uk.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Монті_Голла

Додаток А. Реалізація парадоксу де Мере (проміжні результати)

Кількість кидків	Ймовірність однієї кості показати "1" хоча б один раз за N кидків	Ймовірність двох костей показати "1" разом хоча б один раз за N кидків
1	0,1667	0,0278
2	0,3056	0,0548
3	0,4213	0,0810
4	0,5177	0,1066
5	0,5981	0,1314
6	0,6651	0,1555
7	0,7209	0,1790
8	0,7674	0,2018
9	0,8062	0,2239
10	0,8385	0,2455
11	0,8654	0,2665
12	0,8878	0,2868
13	0,9065	0,3067
14	0,9221	0,3259
15	0,9351	0,3446
16	0,9459	0,3628
17	0,9549	0,3805
18	0,9624	0,3977
19	0,9687	0,4145
20	0,9739	0,4307
21	0,9783	0,4466
22	0,9819	0,4619

23	0,9849	0,4769
24	0,9874	0,4914
25	0,9895	0,5055
26	0,9913	0,5193
27	0,9927	0,5326
28	0,9939	0,5456
29	0,9949	0,5582
30	0,9958	0,5705

Додаток Б. Початкові дані для реалізації парадоксу Юла-Сімпсона (проміжні результати)

N	V1	V2	N	V1	V2	N	V1	V2	N	V1	V2	N	V1	V2
1	0,83	-2,32	101	1,07	-2,30	201	2,77	-4,46	301	3,87	-4,40	401	6,26	-3,24
2	0,73	-2,32	102	2,22	-2,60	202	2,70	-3,86	302	4,70	-3,70	402	4,47	-4,67
3	0,29	-0,83	103	0,61	-2,53	203	4,15	-2,74	303	5,45	-5,60	403	4,89	-4,95
4	-	-0,79	104	2,77	-2,01	204	2,18	-3,30	304	2,42	-3,90	404	6,52	-5,22
5	0,77	-3,50	105	2,03	-1,26	205	2,30	-2,47	305	1,67	-4,88	405	4,73	-6,40
6	1,48	-0,08	106	1,95	-0,83	206	2,33	-1,07	306	4,46	-4,67	406	2,55	-6,46
7	0,45	-0,57	107	1,61	-3,51	207	3,11	-2,41	307	5,82	-2,04	407	5,43	-5,05
8	2,69	1,07	108	1,49	-1,30	208	4,60	-2,09	308	3,84	-2,74	408	4,10	-5,20
9	0,54	-0,07	109	1,55	-3,02	209	0,95	-4,39	309	4,55	-2,29	409	4,01	-5,49
10	0,72	-1,58	110	1,88	-1,80	210	2,08	-3,05	310	3,84	-2,84	410	6,14	-3,20

11	2,49	1,64	111	3,04	-0,67	211	3,18	-3,13	311	5,41	-3,51	411	7,20	-4,07	
12	3,56	1,17	112	1,88	-2,60	212	4,53	-3,11	312	3,06	-2,37	412	3,93	-5,04	
13	1,68	-3,00	113	2,49	-1,18	213	1,54	-3,97	313	4,97	-4,10	413	5,90	-4,77	
14	0,65	-0,39	114	2,14	-3,22	214	2,71	-1,91	314	3,09	-4,30	414	4,82	-4,75	
15	1,48	-1,65	115	1,73	-2,43	215	3,40	-2,91	315	3,49	-4,49	415	5,02	-4,39	
16	1,61	-1,21	116	1,93	-1,15	216	2,75	-2,65	316	3,06	-5,60	416	6,04	-4,24	
17	1,04	-0,89	117	2,75	-3,62	217	3,53	-2,71	317	4,18	-4,23	417	5,10	-4,59	
18	-	0,26	-2,13	118	1,50	-4,18	218	2,37	-2,97	318	5,19	-3,69	418	4,22	-6,25
19	2,18	-1,36	119	3,77	-1,41	219	3,72	-2,24	319	3,72	-2,61	419	4,51	-5,37	
20	0,83	1,12	120	3,27	-2,42	220	3,69	-2,60	320	3,97	-3,97	420	5,59	-5,01	
21	0,39	-1,06	121	1,32	-2,25	221	2,77	-3,21	321	3,41	-4,46	421	2,69	-5,09	
22	-	0,14	-0,81	122	0,98	-4,19	222	3,93	-2,19	322	6,17	-1,21	422	6,04	-5,66
23	2,84	-0,28	123	4,88	-1,35	223	3,61	-3,03	323	4,70	-3,60	423	3,50	-5,84	
24	1,44	-0,23	124	5,22	0,72	224	3,68	-2,57	324	5,64	-3,30	424	4,89	-4,29	
25	-	0,58	-2,46	125	2,45	-1,96	225	2,53	-3,69	325	3,56	-4,28	425	4,77	-5,32
26	3,20	-1,92	126	2,25	-0,77	226	3,96	-1,49	326	5,18	-4,89	426	6,18	-5,07	
27	2,06	0,41	127	3,70	-1,42	227	1,82	-2,55	327	5,12	-4,23	427	5,01	-3,79	
28	1,63	0,32	128	0,79	-1,99	228	4,58	-2,77	328	5,79	-3,06	428	5,13	-6,28	
29	1,42	-0,83	129	1,53	-2,06	229	3,03	-3,27	329	4,38	-4,75	429	5,56	-4,53	
30	0,40	0,04	130	0,41	-3,28	230	2,29	-3,15	330	4,50	-3,32	430	4,24	-6,26	
31	0,41	-2,37	131	1,93	-3,02	231	2,23	-1,70	331	1,51	-5,28	431	4,75	-5,13	
32	1,08	-0,81	132	1,43	-0,43	232	1,48	-4,49	332	4,50	-5,08	432	5,99	-4,17	
33	0,57	-2,14	133	1,90	-2,28	233	3,32	-2,64	333	2,78	-5,03	433	5,44	-3,20	
34	-	0,05	-1,22	134	2,93	-3,04	234	3,47	-2,83	334	4,21	-2,81	434	3,68	-4,70
35	0,91	0,07	135	2,07	-2,15	235	0,68	-5,58	335	4,43	-4,59	435	5,51	-4,65	

36	- 0,33	-1,94	136	1,63	-4,55	236	2,50	-2,38	336	3,71	-4,44	436	3,71	-6,29
37	0,61	-0,63	137	2,92	-1,36	237	1,51	-5,29	337	4,44	-2,62	437	4,25	-3,76
38	2,09	-1,14	138	1,10	-3,42	238	3,32	-2,40	338	4,90	-3,23	438	6,14	-5,51
39	2,01	-1,57	139	1,48	-1,79	239	2,47	-3,47	339	3,45	-4,93	439	2,95	-7,15
40	2,11	0,60	140	1,10	-1,83	240	1,91	-3,52	340	4,08	-3,61	440	3,21	-4,91
41	- 0,03	-1,94	141	2,29	-2,50	241	2,13	-2,71	341	3,12	-5,15	441	6,16	-4,75
42	1,14	-0,46	142	2,79	-0,26	242	3,76	-1,66	342	3,95	-4,70	442	4,11	-4,54
43	0,91	-1,22	143	0,74	-1,75	243	2,55	-3,75	343	5,19	-2,76	443	6,07	-4,30
44	0,81	-1,39	144	1,86	-3,02	244	2,33	-2,05	344	3,86	-2,16	444	4,83	-5,80
45	1,45	-0,78	145	1,17	-3,61	245	3,09	-2,71	345	4,22	-2,82	445	5,38	-5,47
46	- 0,29	-1,81	146	1,00	-2,33	246	0,93	-3,68	346	4,10	-4,91	446	5,62	-3,93
47	- 0,56	-2,05	147	0,98	-2,88	247	1,73	-4,82	347	3,36	-6,15	447	4,30	-4,98
48	1,37	-1,95	148	2,07	-1,31	248	1,05	-4,82	348	3,34	-5,22	448	4,58	-4,35
49	1,80	0,66	149	0,52	-2,01	249	4,51	-3,13	349	3,84	-2,79	449	4,57	-5,45
50	1,17	-1,16	150	2,08	-1,49	250	3,02	-3,18	350	3,57	-4,23	450	7,42	-2,42
51	1,12	-0,79	151	1,32	-1,55	251	4,33	-1,31	351	2,84	-6,19	451	4,87	-2,83
52	0,16	-0,98	152	0,50	-2,90	252	3,94	-2,82	352	3,30	-3,91	452	5,46	-5,93
53	1,65	-0,87	153	1,14	-2,43	253	4,35	-2,65	353	5,04	-2,94	453	4,76	-6,95
54	0,37	-2,04	154	2,56	-0,98	254	3,23	-1,46	354	5,08	-3,95	454	4,68	-4,73
55	2,67	-0,50	155	2,05	-0,51	255	1,91	-3,26	355	3,10	-4,62	455	6,25	-4,94
56	1,42	-0,62	156	4,29	-0,68	256	4,29	-3,08	356	1,95	-4,84	456	4,62	-5,13
57	0,14	-1,75	157	2,69	-2,50	257	3,28	-2,10	357	3,11	-4,63	457	5,04	-6,15
58	1,15	-1,15	158	0,47	-2,97	258	4,78	-2,17	358	3,87	-3,99	458	5,31	-5,25
59	0,65	-0,08	159	1,48	-2,68	259	4,29	-2,74	359	4,98	-3,57	459	4,54	-5,35
60	0,77	-0,34	160	2,34	-1,55	260	2,88	-2,50	360	2,24	-5,53	460	6,61	-2,63

61	2,31	0,08	161	3,19	0,09	261	2,83	-4,20	361	5,32	-3,61	461	3,68	-6,51
62	0,27	-1,57	162	1,70	-1,47	262	2,76	-2,03	362	4,95	-4,69	462	6,76	-3,76
63	1,67	-0,07	163	3,14	-1,07	263	3,30	-2,60	363	4,39	-3,62	463	4,51	-4,03
64	1,58	-0,13	164	2,86	-1,43	264	3,03	-2,29	364	2,80	-5,51	464	6,17	-4,19
65	0,38	-1,06	165	1,04	-2,94	265	3,66	-2,88	365	2,07	-3,78	465	3,08	-5,82
66	-	-	166	1,29	-1,57	266	3,66	-3,72	366	4,36	-4,92	466	5,88	-5,38
67	0,39	-2,22	167	2,88	-0,59	267	2,22	-2,85	367	4,59	-3,14	467	5,66	-3,64
68	1,76	-0,94	168	1,94	-0,46	268	3,29	-2,35	368	4,20	-2,91	468	3,72	-5,13
69	0,02	-0,77	169	2,44	-1,54	269	3,26	-3,02	369	3,64	-3,33	469	4,32	-6,53
70	3,17	0,04	170	1,79	-0,97	270	2,30	-3,89	370	5,10	-2,73	470	5,20	-5,97
71	1,56	-0,75	171	1,13	-1,94	271	1,76	-2,90	371	4,03	-4,80	471	6,06	-5,37
72	1,56	-1,88	172	0,60	-2,80	272	2,51	-4,64	372	4,71	-3,25	472	4,33	-6,66
73	-	-	173	2,88	-0,60	273	2,80	-4,32	373	2,77	-3,40	473	4,74	-5,25
74	0,63	-1,70	174	1,04	-3,33	274	3,31	-3,47	374	3,19	-4,48	474	6,34	-3,78
75	1,10	-0,77	175	1,34	-2,83	275	2,81	-5,43	375	5,83	-4,06	475	3,93	-5,95
76	1,12	-1,77	176	2,44	-1,28	276	1,12	-4,45	376	4,09	-2,39	476	5,87	-5,38
77	0,91	-0,46	177	0,98	-3,03	277	3,62	-1,96	377	4,26	-3,14	477	5,50	-6,69
78	0,69	-1,42	178	1,05	-1,96	278	2,38	-3,59	378	3,61	-4,53	478	3,78	-3,94
79	-	-	179	1,13	-3,04	279	1,63	-4,93	379	3,63	-4,49	479	4,33	-5,51
80	0,10	-1,54	180	2,60	-1,44	280	3,25	-3,40	380	5,02	-2,97	480	5,69	-5,14
81	2,36	0,59	181	2,70	-1,79	281	4,53	-2,12	381	4,05	-3,69	481	5,15	-4,82
82	0,69	-0,59	182	2,48	-1,64	282	2,81	-2,15	382	4,85	-3,57	482	6,14	-3,07
83	1,06	-0,89	183	2,45	-1,59	283	4,34	-3,19	383	3,55	-4,27	483	4,42	-5,85
84	-	-	184	3,85	-2,61	284	3,50	-1,79	384	5,41	-3,36	484	3,30	-5,16

85	1,80	-0,71	185	3,37	-2,06	285	2,98	-4,14	385	3,26	-4,70	485	5,93	-4,89
86	0,98	-2,43	186	0,46	-3,71	286	3,28	-2,29	386	3,74	-3,15	486	4,43	-5,99
87	-	-1,67	187	2,08	-2,21	287	3,08	-3,95	387	3,07	-4,59	487	5,12	-5,95
88	1,37	-0,18	188	2,84	-2,44	288	3,35	-3,29	388	1,59	-5,80	488	6,41	-2,94
89	1,56	-1,99	189	3,80	-2,30	289	3,27	-0,30	389	3,65	-5,63	489	4,77	-5,96
90	-	-2,01	190	1,27	-3,17	290	3,17	-1,91	390	4,02	-3,95	490	6,31	-3,65
91	1,97	0,61	191	1,26	-2,06	291	5,11	-3,14	391	4,21	-3,11	491	3,83	-4,47
92	0,62	-3,95	192	0,13	-2,01	292	2,05	-4,14	392	3,35	-5,97	492	5,87	-5,60
93	2,79	-1,29	193	2,94	-1,04	293	2,72	-4,04	393	2,13	-4,57	493	5,23	-5,78
94	1,75	-0,23	194	2,24	-0,08	294	5,47	-1,29	394	5,83	-2,97	494	4,23	-5,13
95	-	-1,42	195	2,65	-1,21	295	2,00	-4,09	395	3,55	-4,40	495	3,80	-6,19
96	1,35	-0,76	196	0,97	-2,96	296	3,02	-2,85	396	4,22	-3,60	496	4,94	-4,26
97	0,80	-0,51	197	2,23	-1,39	297	3,85	-2,35	397	3,51	-4,49	497	5,15	-4,74
98	2,63	-0,63	198	3,50	-1,37	298	2,24	-1,39	398	3,87	-4,42	498	5,18	-4,78
99	0,73	-0,42	199	2,22	-1,82	299	5,42	-2,86	399	3,75	-3,85	499	5,40	-4,51
100	1,00	-1,46	200	1,05	-1,99	300	2,22	-2,96	400	4,58	-4,46	500	4,55	-5,78

Додаток В. Код Python для симуляції парадоксів.

Парадокс "Вимірювання "регулярності" грального кубика"

```
edges = [1, 2, 3, 4, 5, 6] # позначаємо грані
кубика
prob_1 = [0.03, 0.03, 0.19, 0.19, 0.28, 0.28] # задаємо відповідно
ймовірність випадання для кожної грані кубика під номер 1
```

```

prob_2 = [0.04, 0.04, 0.17, 0.17, 0.29, 0.29]      # задаємо відповідно
ймовірність випадання для кожної грані кубика під номер 2

def average_tries_2(edges, pr):
    k=0
    sum=0
    while k!=1000000:                                # Проводимо 1000000
експериментів
        x = choices(edges, pr)                       # Підкидаємо кубик перший
раз
        i=2                                           # Через те, що один раз
потрібно кубик кинути завжди, щоб було з чим порівнювати значення
наступного, то відлік для і починається з 2.
        while i!=1000:                                # Цикл, який зупиниться,
коли 2 рази поспіль випаде одна й та ж грань
            y = choices(edges, pr)
            if(x == y):
                n = i
                break
            else :
                x = y;
                i = i + 1
            sum = sum + i                              # Рахуємо суму кількості
кидків необхідних для того, щоб випало 2 рази поспіль однакова грань в
1000000 експериментах
        k = k+1
    return(sum/1000000)

def average_tries_3(edges, pr):
    k=0
    sum=0
    while k!=1000000:
        i=3                                           # і починаємо з 3, так як 2
рази нам в будь-якому випадку необхідно кинути кубики
        x = choices(edges, pr)
        y = choices(edges, pr)
        while i!=1000:                                # Цикл, який зупиниться, коли 3
рази поспіль випаде одна й та ж грань
            z = choices(edges, pr)
            if(x == y) & (y == z):
                n = i
                break
            else :
                x = y;

```

```

        y = z;
        i = i + 1
    sum = sum + i
    k = k+1
    return(sum/1000000)
print('Середня кількість підкидань 1-го кубика до першої появи двох
однакових граней поспіль = :', average_tries_2(edges, prob_1), " - M(A1)")
print('Середня кількість підкидань 2-го кубика до першої появи двох
однакових граней поспіль = :', average_tries_2(edges, prob_2), " - M(A2)")
print('Середня кількість підкидань 1-го кубика до першої появи трьох
однакових граней поспіль = :', average_tries_3(edges, prob_1), " - M(B1)")
print('Середня кількість підкидань 2-го кубика до першої появи трьох
однакових граней поспіль = :', average_tries_3(edges, prob_2), " - M(B2)")

```

Парадокс "Транзитивності"

```

edges_1 = [18, 10, 9, 8, 7, 5] # позначаємо
числа на гранях 1 кубика
edges_2 = [17, 16, 15, 4, 3, 2] # позначаємо
числа на гранях 2 кубика
edges_3 = [14, 13, 12, 11, 6, 1] # позначаємо
числа на гранях 3 кубика
prob = [0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666, 0.1666] # задаємо
відповідно ймовірність випадання для кожної грані кубика (в нашому випадку
кубики правильні і  $p = 1/6$ )

def win_prob(edges_first, edges_second, pr):
    k=0
    sum=0
    while k!=1000000: # Експеримент
        проводимо 1000000 разів
            x = choices(edges_first, prob) # Перший
гравець підкидає свій обраний кубик
            y = choices(edges_second, prob) # Другий
гравець підкидає свій обраний кубик
            if (x > y): # Порівнюємо
числа на гранях, що випали у гравців і додаємо перемогу, якщо гравець з
першим кубик переміг
                sum = sum +1
                k = k+1
    return sum/1000000
print("Частота перемоги гравця, який обере 1-ий кубик над гравцем, що
обрав 2-ий кубик = ", win_prob(edges_1, edges_2, prob))

```

```
print("Частота перемоги гравця, який обере 2-ий кубик над гравцем, що
обрав 3-ий кубик = ", win_prob(edges_2, edges_3, prob))
print("Частота перемоги гравця, який обере 3-ий кубик над гравцем, що
обрав 1-ий кубик = ", win_prob(edges_3, edges_1, prob))
```

Парадокс Де Мере

```
i=0
Sum=0
while i!=1000000:
    n=0
    k=0
    while n!=4:
        x = random.randint(1,6)
        if x == 1:
            k = k + 1
        n = n + 1
    if(k>0):
        Sum = Sum + 1
    i = i + 1
p = Sum/1000000
print("Частота випадання одиниці в 4 кидках = ", p)
```

```
i=0
Sum=0
while i!=1000000:
    n=0
    k=0
    while n!=24:
        x = random.randint(1,6)
        y = random.randint(1,6)
        if (x == 1) & (y==1):
            k = k + 1
        n = n + 1
    if(k>0):
        Sum = Sum + 1
    i = i + 1
p = Sum/1000000
print("Частота випадання одночасно одиниці в 24 кидках(2 кубиків) = ", p)
```