

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФІВ ІЗ ДОСКОНАЛИМ
ПАНУВАННЯМ»**

Виконала: студентка 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна математика

Мартинюк Аліна Олександрівна

Керівник: Соломко В. О.,
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«____» _____ 20____ р.

Київ – 2021

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Освітній ступінь бакалавр

Спеціальність 113 Прикладна математика

(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Т.в.о. завідувача кафедри

доцент, к.н. Р. К. Чорней

“ ____ ” _____ 20__ року

З А В Д А Н Н Я

ДЛЯ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТУ

_____ Мартинюк Аліни Олександрівни

_____ (прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Спектральні характеристики графів із досконалим паруванням

керівник роботи _____ Соломко Вікторія Олександрівна, кандидат фізико-математичних наук

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом вищого навчального закладу від « 16 » жовтня 2020 року № 890-с

2. Строк подання студентом роботи 28.05.2021

3. План роботи: дослідження умов існування досконалого парування у дводольному графі, підрахунок кількості досконалих парувань у повному графі та оформлення кваліфікаційної роботи із наступними розділами
Вступ

1. Основні означення та твердження

1.1 Основні означення

1.2 Означення парування та приклади

2. Досконале парування у дводольних графах

3. Досконале парування у повних графах

Висновки

Список літератури

Календарний план виконання роботи

Тема: Спектральні характеристики графів із досконалим паруванням

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	24.10.2020	
2.	Огляд наукових статей за темою роботи.	30.10.2020	
3.	Ознайомлення з основними поняттями.	12.11.2020	
4.	Знаходження спектру графів.	01.12.2020	
5.	Створення малюнків та ілюстрацій.	17.12.2020	
6.	Формулювання тверджень та теорем.	25.12.2020	
7.	Доведення теорем.	09.01.2021	
8.	Знаходження характеристик.	22.01.2021	
9.	Написання курсової роботи.	24.02.2021	
10.	Оформлення малюнків, ілюстрацій та посилань.	21.03.2021	
11.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді.	07.04.2021	
12.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів.	08.05.2021	
13.	Остаточна перевірка курсової роботи науковим керівником.	10.05.2021	
14.	Захист курсової роботи.	15.06.2021	

Студент _____

Керівник _____ “ _____ ” _____

Вступ

Графи є сучасним об'єктом, який використовується для моделювання багатьох процесів у різноманітних галузях науки. Застосування алгоритмів з теорії графів допомагають у вирішенні задач транспортних і комп'ютерних мереж, у хімії, при будівельному проектуванні, в аналізі соціальних зв'язків.

Початок теорії графів датується 1736 роком, коли Л. Ейлер вирішив популярне в той час «завдання про кенігсберзькі мости», що стала згодом однією з класичних задач теорії графів.

Термін «граф» вперше був введений через 200 років (в 1936 році) Д. Кенігом.

Дана курсова робота присвячена дослідженню характеристик графів із досконалим паруванням. Вона складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У першому наведені основні означення з теорії графів та приклади різних парувань.

До другого розділу входять основні теореми, пов'язані з досконалим паруванням у дводольних графах.

Третій розділ присвячено розв'язанню задачі зі знаходження кількості досконалих парувань у повних графах.

Актуальність обраної для роботи теми зумовлена широким застосуванням досконалиго парування з теорії графів у таких сферах науки як проектування комп'ютерних мереж, програмування, хімія та біологія. Зокрема, структура ароматичної сполуки Кекуле складається із досконалиго парування її вуглецевого скелета, показуючи розташування подвійних

зв'язків у хімічній структурі; транспортна проблема Хічкока передбачає парування у дводольному графі як підзадачу.

Метою даної курсової роботи є дослідження умов існування досконалого парування у дводольних та повних графах; обрахунку кількості досконалих паруваль у повному графі.

РОЗДІЛ 1: Основні означення та твердження

1.1 Основні означення

У даному розділі наведені основні означення із теорії графів.

Означення 1.1.1 [4]

Неорієнтованим графом G називається впорядкована пара (V, E) , в якій V – це деяка непорожня множина (множина вершин) і E – це множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів (множина ребер).

Означення 1.1.2 [4]

Дві вершини v_1, v_2 називаються **суміжними**, якщо вони з'єднані ребром, тобто існує ребро $e \in E: e = (v_1, v_2)$, причому говорять, що ребро e є інцидентним, як вершині v_1 так і вершині v_2 .

Означення 1.1.3 [4]

Матриця суміжності графа Γ зі скінченною кількістю вершин n (пронумерованих числами від 1 до n) – це квадратна матриця $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ розміру $n \times n$, в якій значення елементу a_{ij} рівне числу ребер з i -ї вершини графа в j -у вершину. Для неорієнтованого графа матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі.

Означення 1.1.4 [1]

Матриця Лапласа (позначається як L) для кінцевого неорієнтованого графа Γ , що не має циклів – це матриця, індексована набором вершин графа Γ з нульовими сумами рядків, яку можна записати в загальному вигляді як

$$Lx = Dx - Ax$$

або Lx дорівнює

- $-A_{xy}$, якщо $x \neq y$
- D_{xx} , якщо $x = y$,

де $D = \{D_{xx}\}$ – діагональна матриця, що містить інформацію про степінь кожної вершини, елемент D_{xx} дорівнює кількості ребер, що виходять із вершини x ;

$A = \{A_{xy}\}$ – матриця суміжності.

Означення 1.1.5 [1]

Характеристичний поліном квадратної матриці A розміру $n \times n$ – це многочлен степені n від змінної θ , що дорівнює

$p_A(\theta) = \det(\theta I_n - A)$, де I_n – це одинична матриця порядку n .

Означення 1.1.6 [1]

Власні числа (власні значення) графа визначаються як власні числа його матриці суміжності. Якщо існує вектор $X \in \mathbb{R}^n \neq 0$, такий що

$$AX = \lambda X$$

для деякого скаляра λ , то λ називається власним значенням матриці A з відповідним **власним вектором** X .

Означення 1.1.7 [1]

Спектр графа – це сукупність усіх власних значень його матриці суміжності разом з їх кратністю.

Означення 1.1.8 [1]

Коспектральні графи – це графи, які мають однаковий спектр.

Далі наведемо означення спеціальних типів графів, які розглядаються у роботі.

Означення 1.1.9 [3]

Дводольний граф - це граф, вершини якого можна розділити на дві непересічні множини так, що жодне ребро не з'єднує дві вершини однієї множини.

Загальноприйнято використовувати терміни ліворуч і праворуч для опису двох наборів вершин.

Означення 1.1.10 [3]

Збалансований дводольний граф - це граф, що має однакову кількість лівих та правих вершин.

Означення 1.1.11 [1]

Повний граф – це граф, у якого будь-які дві вершини з'єднані ребром.

Означення 1.1.12 [3]

Повний дводольний граф — спеціальний вид дводольного графа, у якого будь-яка вершина першої частки з'єднана з усіма вершинами другої частки вершин.

Звернемо увагу на рисунок нижче. Це приклад дводольного графа.

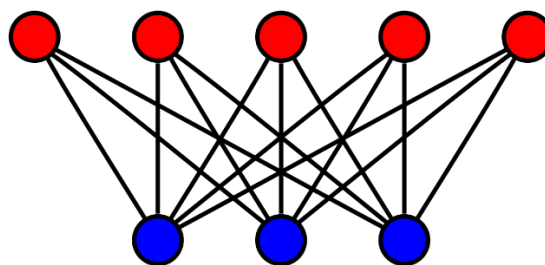


Рисунок 1.1.1. Повний дводольний граф

1.2 Означення парування та приклади

Для початку наведемо означення понять, пов'язані із паруванням

Означення 1.2.1 [3]

Візьмемо граф $G = (V, E)$, у такому випадку **паруванням** M в G буде називатися множина попарно несуміжних ребер, тобто, тих, які не матимуть спільних вершин.

Означення 1.2.2 [3]

Розмірність парування - це кількість ребер у цьому паруванні.

Приклад 1.2.1 [3]

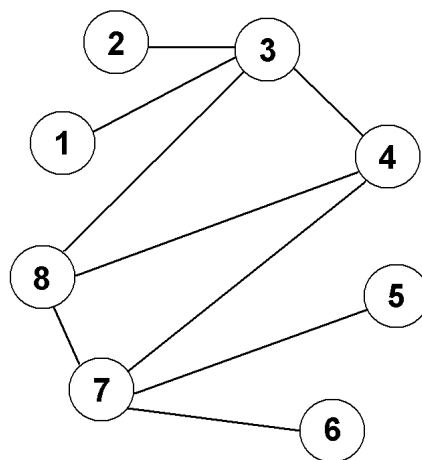


Рисунок 1.2.1. Приклад парування M_1 та M_2

Розглянемо граф на рисунку 1.2.1. Позначимо ребро, що з'єднує вершини i та j , як (i, j) . Пари $M_1 = \{(3, 8), (4, 7)\}$ утворюють парування. Розмірність цього парування - два. Інший приклад парування – це парування розмірності три $M_2 = \{(2, 3), (4, 8), (5, 7)\}$. Парування розмірності

чотири не існує, оскільки вершини 1 і 2 повинні бути об'єднані з вершиною 3.

Отже, три - це найкращий варіант. Це є максимальним досконалим паруванням.

Означення 1.2.3 [3]

Максимальне парування – це парування, яке містить найбільшу можливу кількість ребер. Важливо, що для графу G може бути кілька максимальних збігів.

Означення 1.2.4 [3]

Досконале парування – це парування, яке покриває всі вершини графа. Тобто кожна з вершин графа інцидентна одному з ребер в паруванні.

Приклад 1.2.2

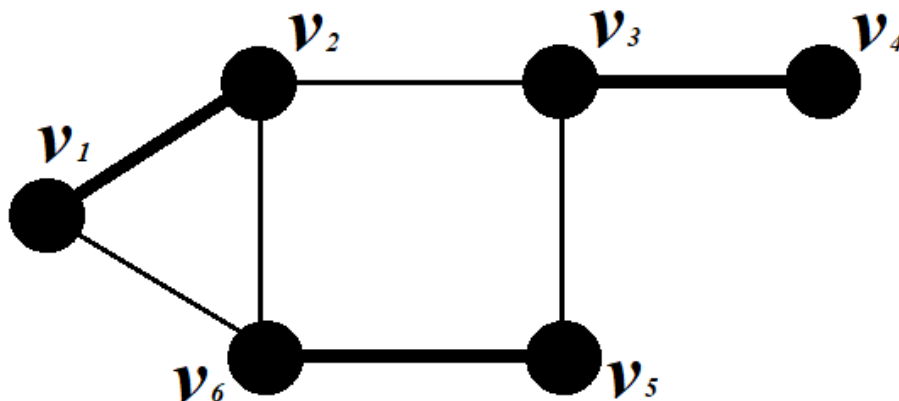


Рисунок 1.2.2. Приклад досконалого парування

Можемо помітити, всі вершини графа G на рисунку 1.2.2 інцидентні одному із ребер парування $M = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$, тому, таке парування є досконалим.

РОЗДІЛ 2: Досконале парування у дводольних графах

Природньо буде почати розглядати досконале парування у дводольних графах. Інтерпретація досконалого парування для даного типу графів полягає в існуванні зв'язків між елементами двох множин для будь-якого елемента.

Філіп Холл у 1935 році сформулював необхідні і достатні умови того, щоб у дводольному графі можливо було створити досконале парування ([3]). Розглянемо таку ситуацію: припустимо, ми поєднуємо N хлопців та N дівчат (якщо вони не були б обоє N , тоді, очевидно, немає можливості для узгодження нашого дводольного графа бути повним). Тепер кожна дівчина складає список прийнятних партнерів, які їй подобаються з N хлопців. Оскільки ці хлопці мають «джентльменський» тип, ніхто з них не відхилить пропозицію, якщо їм запропонують. Цю ситуацію можна представити дводольним графом, де ребро представляє подію, коли конкретній дівчині подобається конкретний хлопець. Одне з таких можливих ситуацій наведено на рисунку 2.1.

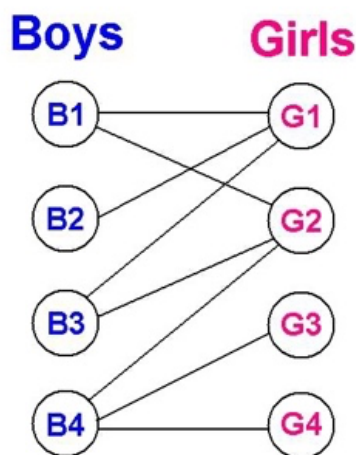


Рисунок 2.1. Збалансований дводольний граф

Теорема 2.1 (Холла про шлюб, [3])

Для того, щоб дводольний граф мав досконале парування необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:

- дводольний граф є збалансований (рівна кількість хлопців і дівчат),
- кожній підгрупі із r дівчат подобається принаймні r хлопчиків.

Доведення. Оскільки необхідність легко побачити, нам потрібно довести, що умови теореми також є достатніми.

Ми використаємо індукцію, щоб довести бажаний результат. Враховуючи, що граф G - збалансований дводольний, припустимо, що умови теореми виконуються. Розглянемо підмножину S лівих вершин нашого графа G розмірності r . Що нам потрібно зробити, це показати, що якщо теорема про шлюб виконується для r , то вона також виконується для $r + 1$, і врешті-решт для всього графа G . Але спочатку перевіримо базу, де $r = 1$.

Якщо $r = 1$ і умова шлюбу виконується для будь-якої підмножини розміру один, то, очевидно, її можна поєднати з правою вершиною. Тоді ми маємо досконале парування для будь-якої однієї вершини. База індукції виконана.

Індуктивний крок. Припустимо, що для будь-якої підмножини S розміру r умови теореми виконується. Тепер нам потрібно показати, виходячи з попереднього припущення, що теорема про шлюб справедлива і для $r + 1$. Нехай набір вершин, які з'єднуються із набором вершин S , позначається як S' . Тепер розглянемо будь-яку $(r + 1)$ - ліву вершину, позначивши її v_{r+1} . Тепер ми розділили проблему на три випадки.

Випадок 1

Вершина v_{r+1} з'єднана з деякою вершиною, що не знаходиться в S' . Тоді, очевидно, що існує досконале парування між цими $(r + 1)$ вершинами. Це показано на рисунку 2.2.

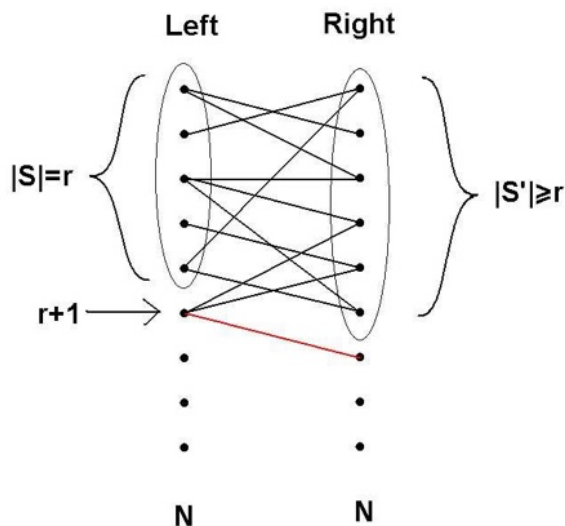


Рисунок 2.2. Випадок 1

Випадок 2

Вершина v_{r+1} суміжна лише з вершинами в S' , і $|S'| = |S|$. У цьому випадку очевидно, що це порушує шлюбну умову, яку ми вважали істинною для всього нашого графа G . Отже, цей випадок неможливий.

Випадок 3

Вершина v_{r+1} суміжна лише з вершинами в S' і $|S'| > |S|$. Тоді ми використовуємо наше припущення, що для кожної підмножини вершин розмірності r ми можемо знайти досконале парування. Зокрема, ми розглядаємо кожну підмножину розмірності r , яка включає $(r - 1)$ вершину із S плюс вершину v_{r+1} . Тепер, що ми повинні показати, те, що з огляду на цю властивість (що всі ці підмножини розмірності r мають досконале парування), що означає ми можемо створити досконале парування розмірності $(r + 1)$. Тож, видаливши вершину v_1 , розглянемо всі інші

вершини (включаючи вершину v_{r+1}) як підмножину розмірності r . Назвемо цю підмножину S_r . Тепер розглянемо всі досконалі парування для S_r . Нехай $S_r' \in S'$, яка є у кожному досконалій паруванні S_r . Якщо вершина v_1 суміжна лише з точками в S_r' , то це суперечить умові шлюбу, що ми вважали істинним. Таким чином, v_1 суміжна деякій точці, що не знаходиться в S_r' , отже, існує досконале парування для всіх $r+1$ точок. Це проілюстровано на рисунку 2.3. Виділені ребра представляють одне можливе досконале парування для вершин $v_2, \dots, v_{r+1}$. Через наші початкові припущення, ребро, зображене червоним кольором, гарантовано існує, тим самим встановлюючи наш індуктивний крок.

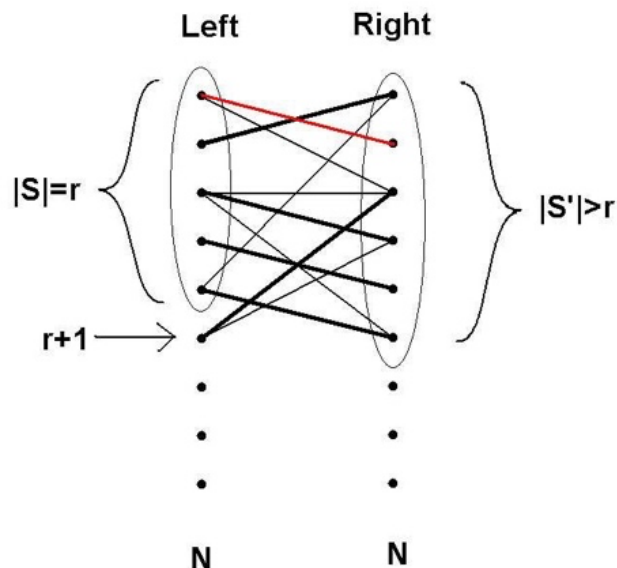


Рисунок 2.3. Випадок 3

Після завершення нашого індуктивного кроку можна побачити, що теорема про шлюб виконується для всього графа G . І оскільки розмір G не був обумовлений, теорема про шлюб, таким чином, справедлива для будь-якого такого довільно великого графа.

Приклад 2.1

Дивлячись на рисунок 2.1 , ми можемо побачити, що цей граф не відповідає умовам шлюбу. Якщо взяти набір дівчат $\{G3, G4\}$, вони обидві будуть в парі лише з одним хлопцем, отже, у них дефіцит однієї людини. Це порушує умови шлюбу.

Тут легко помітити, що через це не існує жодного досконалого парування: максимум одна із $\{G3, G4\}$ могла вийти заміж, а інша – ні. Якщо подивитись на стан шлюбу з боку хлопців, ми також бачимо порушення умов шлюбу – дивимося на набір хлопчиків $\{B1, B2, B3\}$, то побачимо, що вони в сукупності люблять однакових двох дівчат. Цей набір також має недолік.

Тож виникає подібна проблема: щонайбільше два хлопці з нашого набору можуть одружитися.

Приклад 2.2

На рисунку 2.4 зображено дводольний граф, який має досконале парування.

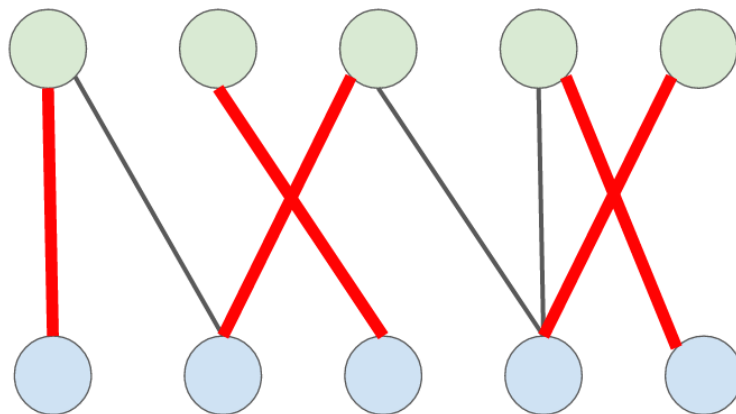


Рисунок 2.4. Дводольний граф із досконалим паруванням

Наступне твердження гарантує досконале парування для регулярного дводольного графа.

Теорема 2.2 [2]

Довільний k -регулярний дводольний граф має досконале парування.

РОЗДІЛ 3: Досконале парування у повних графах

У даному розділі розглядаються досконалі парування у повному графі.

Теорема 3.1

- Повний граф K_n не має досконалого парування, якщо n непарне.
- Повний граф K_n має $(n-1)!! = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2})!}$ досконалих парувань, якщо n парне.

Доведення. Оскільки n парне, ми можемо позначити його як $2m$ для деякого додатного цілого числа m . Через a_m позначимо кількість досконалих парувань у повному графі на $2m$ вершинах. Очевидно, що $a_1 = 1$.

Кожна вершина з'єднана з будь-якою іншою вершиною у повному графі, тому степінь кожної вершини дорівнює $2m-1$.

Зафіксуємо будь-яку вершину v . З $2m-1$ ребер, які виходять із зафіксованої вершини, ми повинні вибрати одне ребро для досконалого парування, щоб включити дві вершини. Ми можемо вибрати ребро для досконалого парування $2m-1$ способами. Це ребро буде покривати вершини v та w .

Після вибору ребра, що входить у досконале парування, видаляємо усі ребра, що інцидентні вершинам v та w . Залишається $2m-2$ вершини, які ще непокриті ребрами із досконалого парування.

Таким чином, маємо рекурентне співвідношення

$$a_m = (2m-1) \cdot a_{m-1}.$$

Зафіксуємо іншу вершину q . Вершина q буде інцидентна уже $(2m-2)$ ребру, оскільки ребра, приєднані до вже вибраних вершин, не можуть бути вибрані.

Отже, кількість способів виділення ребра з $2m-3$ ребер становить $2m-3$.

Ми можемо продовжувати вибирати їх так само.

Тоді за правилом множення кількість досконалих паруваль визначається як

$$(2m-1) * (2m-3) * \dots * 3 * 1.$$

Це також можна записати як

$$\frac{\{(2m-1)*(2m-3)*\dots*3*1\}*\{(2m)*(2m-2)*\dots*4*2\}}{\{(2m)*(2m-2)*\dots*4*2\}} = \frac{(2m)!}{2^m*(m)*(m-1)*\dots*2*1} = \frac{(2m)!}{2^m*m!}.$$

Отже, для досконалого графа з вершинами $2m$ кількість досконалих паруваль дорівнює $a_m = \frac{(2m)!}{2^m*m!} = (2m-1)!!$.

Приклад 3.1

Для повного графа на 3-х вершинах немає досконалого парування.

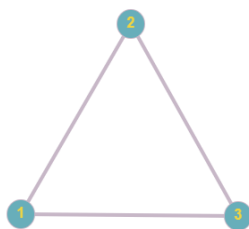


Рисунок 3.1. Граф K_3 не має досконалого парування

Приклад 3.2

Граф K_6 має 15 досконалих паруваль.

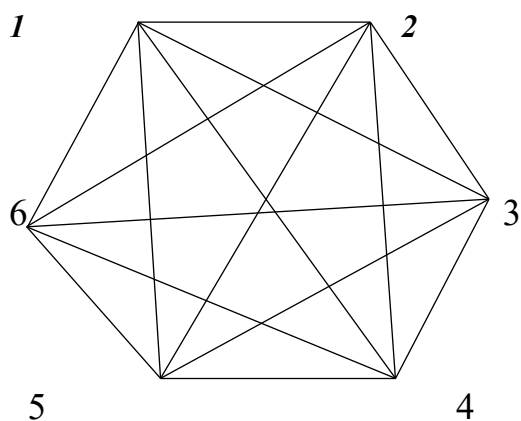


Рисунок 3.2. Граф K_6 має 15 досконалих паруваль

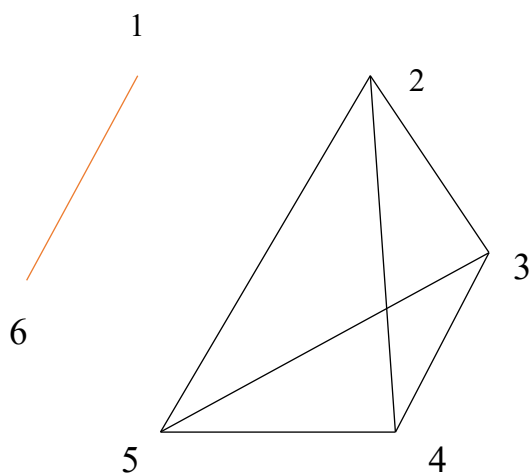
Маємо граф на шести вершинах. Будь-яка вершина з'єднана з іншою вершиною відповідним ребром. Степінь кожної вершини – кількість ребер, які виходять з кожної вершини, їх відповідно 5.

Повний граф з шістьма вершинами позначається як K_6 .

Зафіксуємо будь-яку вершину. Наприклад вершину 1, з неї виходить 5 ребер. У нас є 5 способів вибрати одне з із ребер. Наприклад вибираємо ребро, яке з'єднує вершину 1 із вершиною 6.

Ребро (1,6) входить до досконалого парування.

Ребра інцидентні вершинам 1 і 6 маємо видалити, бо вони точно не будуть входити до досконалого парування. Ми видалили 8 ребер.

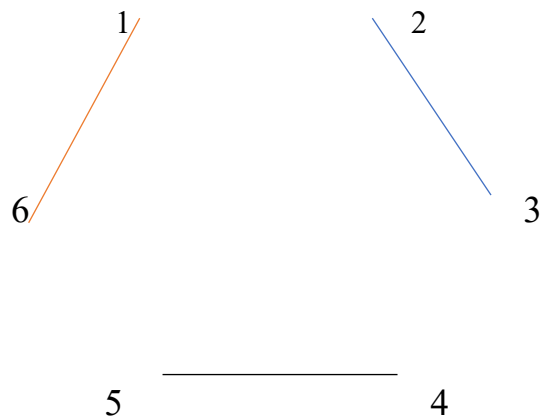


Далі зафіксуємо вершину 2, степінь якої після видалення ребер 3.

У нас три варіанти, щоб вибрати ребра для досконалого паруння.

Наприклад, виберемо ребро (2,3).

Аналогічно видаляємо всі ребра інцидентні вершинам 2 і 3.



Залишилися вершини 5 і 4.

Зафіксуємо вершину 4. Виходить одне єдине ребро , яке з'єднує вершину 4 і 5. За такою формолою ми можемо порахувати кількість досконалих паруннь у даному графі: $5*3*1=15$.

Висновки

Курсова робота присвячена дослідженню характеристик графів із досконалим паруванням.

У першому розділі було розглянуто основні означення, як наприклад, означення простого графа, означення характеристичного многочлена та означення матриць, пов'язаних із графом. Також продемонстровано приклади парування, максимального та досконалого парування.

У другому розділі наведені теорема Холла про шлюб та наслідок із теореми Кенінга. Перша теорема забезпечує необхідні і достатні умови існування досконалого парування у дводольному графі. Друга теорема стверджує про існування досконалого парування у регулярному дводольному графі.

Третій розділ присвячено розв'язанню задачі зі знаходження кількості досконалих парувань у повних графах. Підраховано, що у повному графі K_n $(n - 1)!!$ досконалих парувань для парних n , і не існує досконалих парувань для непарних n .

Список використаної літератури

1. Brouwer E. A. Spectra of Graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – New York: Springer, 2011. – 250 p.
2. Cvetkovic D. Спектры графов. Теория и применение / D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs. – Київ: Наукова думка, 1984. – 383 с.
3. Hirata Jonathan Notes on Matching / J. Hirata // Principles of Applied Mathematics, 2007. – pp. 1-14.
4. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ: Національний університет "Києво-Могилянська академія", 2007. – 138 с.