

Задача Квадратичной Оптимизации на Множестве Размещений

Алла Нагорная
Кафедра информатики
Национальный университет
“Киево-Могилянская академия”
Киев, Украина
naghirnaalla@ukr.net

Quadratic Optimization Problem on Placement Set

Alla Nahirna
Department of Informatics
National University of “Kyiv-Mohyla Academy”
Kyiv, Ukraine
naghirnaalla@ukr.net

Аннотация — В статье представлена математическая модель задачи оптимизации на множестве размещений с квадратичной функцией цели. Представлен алгоритм решения данного типа задач.

Abstract - The article presents a mathematical model of the optimization problem on a set of placements with a quadratic target function. An algorithm for solving this type of problem is presented.

Ключевые слова — оптимизация, математическая модель, квадратичная функция, множество размещений, опорное решение, оптимальное решение.

Key words — optimization, mathematical model, quadratic function, placement set, support solution, optimal solution.

I. ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие информационных технологий позволяет использовать компьютерное моделирование реального объекта исследования и постановки вычислительных экспериментов на этой модели. Естественно полагать, что процесс компьютерного моделирования включает в себя проектирование модели и ее применения для решения задачи оптимизации и проектирования технологических процессов на производстве. Все эти проблемы чрезвычайно сложны и включают в себя многочисленные элементы, переменные, параметры, ограничения и т. д. Такие проблемы могут быть смоделированы с помощью задач комбинаторной оптимизации [1-8].

Достаточной широкий круг практических задач моделируется комбинаторными моделями [1, 2, 5, 7, 9, 10-12, 20-29]. Как результат, в последнее время появилось много работ, в которых исследуются проблемы

комбинаторной оптимизации и предлагаются подходы к их решению [8, 11-35].

Следует отметить, что класс задач нелинейного программирования значительно шире линейного и большое количество вопросов, практического характера, решается при моделировании определенных процессов нелинейными функциями. Значительное внимание заслуживает квадратичная функция, которая является частным случаем нелинейной, представленной в виде суммы линейной и квадратичной функций. Некоторые практические задачи технико-экономического содержания моделируются с квадратичными целевыми функциями и значительное количество квадратичных моделей возникают как вспомогательные или промежуточные, при решении ряда задач. По этому возникает необходимость оценить существующие методы решения и создать новые алгоритмы для решения задач комбинаторной оптимизации с нелинейными целевыми функциями [28-31].

В статье представлена модель задач оптимизации на комбинаторном множестве размещений, являющаяся моделью многих прикладных задач. Предлагается алгоритм решения задачи оптимизации с квадратичной целевой функцией.

При реализации метода находится первый опорный план и осуществляется проверка возможного его улучшения за счет сформулированных неравенств, налагаемых на элементы множества размещений.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Определение 1. Пусть задано некоторое конечное множество A из n различных элементов. Из числа n элементов выбраны различные k ($n \geq k$). Упорядоченный



Інформаційні системи та технології ICT-2019

Секція 2.

Математичне та комп'ютерне моделювання у інформаційних системах.

набор из k различных элементов из некоторого множества из n различных элементов, называется размещением из n элементов по k и обозначается A_n^k [6, 7, 15].

Рассмотрим оптимизационную задачу вида:

$$Z(\Phi, A_n^k) : \max\{\Phi(a) \mid a \in A \subset A_n^k\} \quad (1)$$

Где A - некоторое подмножество комбинаторного множества размещений A_n^k .

Осуществим биективное отображение множества A_n^k в пространство R^n , поставив каждому элементу $a \in A_n^k$ в соответствие вектор $x \in R^n$. Образ множества A_n^k обозначим $E_n^k \subset R^n$. В результате имеем задачу комбинаторной оптимизации в евклидовой постановке:

$$Z(F, E_n^k) : \max\{F(x) \mid x \in D \subset E_n^k\} \quad (2)$$

где $\Phi(a) = F(x)$ при $a \in A_n^k$, $x \in E_n^k$,

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (3)$$

Согласно теореме 4.8 [6] многогранник размещений $M(A_n^k)$ при $(n > k)$ комбинаторно эквивалентен перестановочному многограннику размерности k $M(P_k)$. Тогда, X – непустое множество в R^n , которое будем обозначать следующим образом: $X = \text{vert}M(A_n^k)$, $M = \text{conv}P_k$.

Эквивалентность многогранников позволяет рассчитать количество транспозиций в многограннике размещений [7]:

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2} \quad (4)$$

III. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Алгоритм решения состоит из двух шагов.

Шаг 1. Нахождение первого опорного решения.

На начальном этапе определяем количество транспозиций за формулой (4).

Далее для каждой транспозиции составляется квадратичная функция цели (3) в виде произведения двух сомножителей:

$$F_{ij} = (x_i - x_j)(a_{ij}x_i + a_{ij}x_j + \dots + a_kx_k) \quad (5)$$

Тогда квадратичные функции, которые формируются при транспозиции соответствующих элементов множества размещений будут иметь вид:

$$x_1 \leftrightarrow x_i, (i = 2, \dots, k):$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2 : F_{12} = (x_1 - x_2)(a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{k2}x_k);$$

$$x_1 \leftrightarrow x_3 : F_{13} = (x_1 - x_3)(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{k3}x_k);$$

... ..

$$x_1 \leftrightarrow x_k : F_{1k} = (x_1 - x_k)(a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \dots + a_{1k}x_k); \quad (6)$$

... ..

$$x_2 \leftrightarrow x_k, (i = 3, \dots, k)$$

$$F_{2k} = (x_2 - x_k)(a'_{1k}x_1 + a'_{2k}x_2 + \dots + a'_{2k}x_k);$$

... ..

$$x_{k-1} \leftrightarrow x_k,$$

$$F_{k-1k} = (x_{k-1} - x_k)(a'_{1k-1}x_1 + a'_{2k-1}x_2 + \dots + a'_{k-1k-1}x_{k-1} + a'_{k-1k}x_k).$$

Естественно полагать, что единственным решением для всех сомножителей вида $(x_i - x_j)$:

$$x_1 \leftrightarrow x_k, (i = 2, \dots, k) : F'_{12} = (x_1 - x_2);$$

... ..

$$x_2 \leftrightarrow x_k, (i = 3, \dots, k) : F'_{2k} = (x_2 - x_k); \quad (7)$$

... ..

$$x_{k-1} \leftrightarrow x_k, F'_{k-1} = (x_{k-1} - x_k).$$

квадратичных функций (6) является: $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m, \dots, x_n)$, при условии $(x_1 > x_2 > \dots > x_n)$. Данное решение будем называть первым опорным решением.

Далее, осуществляем проверку первого опорного решения в каждом сомножителе вида $(a_{ij}x_i + a_{ij}x_j + \dots + a_kx_k)$ квадратичных функций (6):

$$x_1 \leftrightarrow x_2 : F''_{12} = (a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{k2}x_k);$$

$$x_1 \leftrightarrow x_3 : F''_{13} = (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{k3}x_k);$$

... ..

$$x_1 \leftrightarrow x_k : F''_{1k} = (a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \dots + a_{1k}x_k); \quad (8)$$



Інформаційні системи та технології ICT-2019

Секція 2.

Математичне та комп'ютерне моделювання у інформаційних системах.

... ..

$$x_2 \leftrightarrow x_k, (i = 3, \dots, k) \quad F''_{2k} = (a'_{1k}x_1 + a'_{2k}x_2 + \dots + a'_{2k}x_k);$$

... ..

$$x_{k-1} \leftrightarrow x_k, \quad F''_{k-1k} = (a'_{1k-1}x_1 + a'_{2k-1}x_2 + \dots + a'_{k-1,k-1}x_{k-1} + a'_{k-1,k}x_k).$$

Подставляем первое опорное решение $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m, \dots, x_n)$ в F''_{12} . Если $F''_{12} > 0$, то первое опорное решение оставляем без изменений.

В случае $F''_{12} < 0$ необходимо осуществить перестановку элементов x_k на x_m , где $x_k > x_m$, при которой функция F''_{12} возрастает. Тогда первое опорное решение будет иметь вид: $(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Необходимо осуществить проверку всех функций (8). Если все функции выполняются, то найдено оптимальное решение.

В противном случае, на этапе не выполнения условий формируются необходимые неравенства для элементов множества размещений:

$$\begin{cases} x_1 > (<)x_2, \\ x_1 > (<)x_3, \\ \dots \\ x_1 > (<)x_k, \\ x_2 > (<)x_3, \\ \dots \\ x_{k-1} < (>)x_k \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) формулирует необходимые условия нахождения каждого элемента множества размещений в оптимальном решении.

Шаг 2. Улучшение опорного решения.

После выполнения (9), получаем первое опорное решение. Поскольку множество размещение учитывает порядок следования элементов, то следует полагать, что найденное решение может не являться оптимальным. Для проверки оптимальность необходимо осуществить перебор имеющихся элементов множества размещений в порядке возрастания точки многогранника размещений, с учетом выполнения системы (9).

Если при рассмотрении таких элементов функция цели возрастает, то необходимо осуществлять дальнейшую проверку, в противном случае, последнее найденное опорное решение будет оптимальным.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена оптимизационная задача на множестве размещений с квадратичной целевой функцией и предложен алгоритм ее решения.

Представленный алгоритм состоит из двух шагов. На первом шаге осуществляется поиск опорного решения, на основании сформированной системы для элементов множества размещений (9). Данная системы формируется с учетом построения квадратичной функции на основе транспозиций соответствующих элементов множества (6).

На втором шаге происходит поиск оптимального решения, который заключается в переборе не входящих в опорное решение элементов множества размещений, при обязательном выполнении системы (9).

Естественно полагать, что при возрастании функции цели возникает надобность в дальнейшем поиске оптимального решения, в ином случае, найдено оптимальное решение.

Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию данного алгоритм на других комбинаторных множествах с учетом дополнительных ограничений.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Korte, B., Vygen, J.: Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Springer, New York (2018)
- [2] Pardalos, P.M., Du, D.-Z., Graham, R.L. (Eds.): Handbook of combinatorial optimization. Springer, New York (2013)
- [3] Bernhard, K., Jens, V.: Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms. Springer-Verlag, Berlin (2012)
- [4] Karin, R., Saoub, A.: Tour through Graph Theory. Chapman and Hall/CRC, New York (2017)
- [5] Berge, C.: Principes de combinatoire. Dunod, Paris (1968)
- [6] Yemelichev, V.A., Kovalev, M.M., Kravtsov, M.K.: Polytopes, graphs and optimisation. Cambridge University Press, Cambridge (1984)
- [7] Стоян, Ю.Г., Яковлев С.В.: Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Нук. думка, Киев (1986)
- [8] Hulianytskyi, L., Riasna, I.: Formalization and classification of combinatorial optimization problems. Springer Optimization and its Applications. 130: pp. 239-250 (2017)
- [9] Yakovlev, S.V., Grebennik, I.V.: Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. Cybernetics and Systems Analysis. 29(5): pp. 727-734 (1993)
- [10] Schrijver, A.: Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer Science & Business Media, Berlin (2012)
- [11] Balakrishnan, R., Sridharan, S.: Foundations of Discrete Mathematics with Algorithms and Programming. Chapman and Hall/CRC, New York (2018)
- [12] Bona, M.: Combinatorics of Permutations, Second Edition. Chapman and Hall/CRC, New York (2012)
- [13] Shor, N.Z., Stetsyuk, P.I.: Modified r-algorithm to find the global minimum of polynomial functions Cybernetics and Systems Analysis. 33(4): pp.482-497 (1997)
- [14] Emets, O.A., Koliechkina, L. N.: Solution of optimization problems with fractional-linear objective functions and additional linear constraints on permutations. Cybernetics and Systems Analysis. 40(3): pp. 329-339 (2004)
- [15] Donec, G. A., Kolechkina, L. M.: Method of ordering the values of a linear function on a set of permutations. Cybernetics and Systems Analysis. 45(2): 204-213 (2009)
- [16] Sergienko, I.V., Volkovich, O.V., Roshchin, V.A.: Models and methods of solution of quadratic integer programming problems. Cybernetics. 23(3): 289-305 (1987)
- [17] Semenova, N.V., Kolechkina, L.N., Nagornaya, A.N.: On Approach to Solving Vector Problems with Fractionally Linear Functions of the Criteria on the Combinatorial Set of Arrangements. Journal of Automation and Information Sciences. 42(1): pp. 67-80 (2010)



Інформаційні системи та технології ICT-2019

Секція 2.

Математичне та комп'ютерне моделювання у інформаційних системах.

- [18] Yakovlev, S.V.: The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polygons. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 34: pp. 959-965 (1994)
- [19] Yakovlev, S.: Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Springer Optimization and its Applications*. 130: pp. 567-584 (2017)
- [20] Yakovlev, S.V.: Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. *Cybernetics*. 25(3): pp. 385-391 (1989)
- [21] Pichugina, O.S., Yakovlev, S.V.: Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 52(6): pp. 921-930 (2016)
- [22] Yakovlev, S.V.: The method of artificial space dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 53(5): pp. 725-732 (2017)
- [23] Stoyan, Y.G., Yakovlev, S.V.: Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 54(5): 716-726 (2018)
- [24] Yakovlev, S.V.: On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Autom and Information Sciences*. 50(9): 38-50 (2018)
- [25] Stoyan, Yu.G., Sokolovskii, V.Z., Yakovlev, S.V.: Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroenie*. 2: pp. 4-5 (1982)
- [26] Stoyan, Y., Romanova, T., Pankratov, A., Kovalenko, A., Stetsyuk, P.: Balance layout problems: mathematical modeling and nonlinear optimization. *Springer Optimization and its Applications*. vol. 114, pp. 369-400 (2016)
- [27] Gulianitsky, L.F. Sergienko, I.V.: Meta-evolutionary method of deformed polyhedron in combinatorial optimization. *Cybernetics and system analysis*. 44(6): pp. 70-79 (2007)
- [28] Stoyan, Y.G., Yakovlev, S.V., Parshin, O.V.: Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n . *Cybernetics and Systems Analysis*. 27(4): pp. 561-567 (1991)
- [29] Yakovlev, S.V., Valuiskaya, O.A.: Optimization of linear functions at the vertices of a permutation polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal*. 53(9): pp. 1535-1545 (2001)
- [30] Pichugina, O.S., Yakovlev, S.V.: Functional and analytic representations of the general permutations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 1(4): pp. 27-38 (2016)
- [31] Pichugina, O., Yakovlev, S.: Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications. *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*. 4(2): pp. 129-152 (2016)
- [32] Yakovlev, S.V., Pichugina, O.S.: Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 54(1): pp. 99-109 (2018)
- [33] Koliechkina, L. N., Dvirna, O. A., Nagornaya, A. N.: Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 59(4): pp. 620-626 (2014)
- [34] Koliechkina, L. N., Dvirna, O. A.: Solving Extremum Problems with Linear Fractional Objective Functions on the Combinatorial Configuration of Permutations Under Multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 53(4): pp. 590-599 (2017)
- [35] Kolehckina, L. M., Dvirna, O. A.: Solving extremum problems with linear fractional objective functions on the combinatorial configuration of permutations under multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 53(4): pp. 590-599 (2017)



Інформаційні системи та технології ICT-2019

Секція 2.

Математичне та комп'ютерне моделювання у інформаційних системах.