Оптимізація проектування мереж постачання з використанням узагальненої двохетапної стохастичної моделі

Виконавець: Марченко Михайло Сергійович
Керівник: Силенко Ілля Володимирович

Мета роботи

Розробка, формалізація, програмна реалізація та дослідження узагальненої двоетапної стохастичної моделі для оптимізації структури та операційних процесів ланцюгів постачання в умовах невизначеності.

Результатом дослідження є модель, яке дозволяє приймати стратегічні рішення на етапі проектування мережі та адаптувати оперативні дії до реальних сценаріїв, забезпечуючи зниження очікуваних витрат і підвищення стійкості системи.

Теоретичні основи

Означення 2.1 (Ланцюг постачання [8]) *Нехай* $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ *— скінченна множина суб'єктів (організацій), а* $E \subseteq V \times V$ *— множина упорядкованих пар, що репрезентують напрямки матеріальних, інформаційних та фінансових потоків.* Ланцюг постачання *визначається як орієнтований граф* $G = (V, E)$*, доповнений трьома відображеннями:*

$$f_M : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_I : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_F : E \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

які задають інтенсивності відповідних потоків між вузлами.

Означення 2.2 (Проєктування мережі ланцюга постачання [4]) *Нехай* $L_1, \dots, L_K$ *— множини потенційних об'єктів на кожному рівні мережі (заводи, склади, центри дистрибуції тощо).* Задача проєктування мережі *полягає у виборі* $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{K} L_k$ *та відповідних потоків* $Y : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*, що мінімізують загальну очікувану вартість системи або максимізують її очікуваний прибуток за обмежень пропускних здатностей та попиту.*

Теоретичні основи

Означення 2.4 (Набір сценаріїв) *Дискретне наближення неперервного розподілу ξ задають скінченним набором*

$$\mathcal{S} = \{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(S)}\}, \qquad p^{(s)} = \mathbb{P}(\xi = \xi^{(s)}), \ \sum_{s=1}^{S} p^{(s)} = 1,$$

який називають сценарним набором.

Означення 2.3 (Стохастична оптимізаційна задача) *Нехай* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — *ймовірнісний простір та* $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ — *випадковий вектор параметрів.* Стохастичною задачею програмування *називають*

$$\min_{x \in X} \mathbb{E}_{\xi}\left[\, \phi(x, \xi)\right],$$

Теоретичні основи

Означення 2.7 (Двохетапне стохастичне програмування [9]) *Нехай* $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ *— рішення* першого етапу, $y^{(s)} \in \mathbb{R}^{n_2}$ *— рішення* другого етапу *для сценарію* $s \in \mathcal{S}$. *Двохетапна стохастична лінійна програма записується як*

$$\begin{aligned} &\min_{x} c^\top x + \sum_{s \in \mathcal{S}} p^{(s)} q^{(s)\top} y^{(s)} \\ &s.t.\ Ax = b, \quad x \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, \\ &\quad T^{(s)} x + W^{(s)} y^{(s)} = h^{(s)}, \quad y^{(s)} \geq 0,\ s \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Означення 2.8 (Змішане цілочислове лінійне програмування) *Задача виду*

$$\min_{x,y} c^\top x + d^\top y \quad s.t.\ Ax + By \leq b,\ x \in \mathbb{Z}_+^m,\ y \in \mathbb{R}_+^n$$

називається змішаною цілочисловою лінійною програмою *(**MILP**). Якщо* $x \in \{0,1\}^m$, *маємо задачу* бінарного лінійного програмування *(**BLP**).*

Означення 2.9 (NP-складність MILP [6]) *Рішення MILP належить до класу NP-завершених, бо задача цілочислового лінійного програмування є NP-повною, а MILP містить ILP як окремий випадок. Відповідно, для загального формулювання не існує поліноміального алгоритму, який би гарантував отримання оптимального розв'язку.*

Розробка двоетапної стохастичної моделі проектування ланцюга постачання

У наступному підрозділі на основі аналізу літературних джерел, сформульовано універсальну двоетапну стохастичну модель для проєктування мережі ланцюга постачання з урахуванням сценаріїв невизначеності. Серед особливостей:

- підтримує довільну кількість ешелонів
- немає прив'язки до конкретних ешелонів при оптимізації та заданні параметрів вузлів
- широко конфігурабельні параметри вузлів з можливістю розширення

Множини та індекси

- K: Множина сценаріїв невизначеності.
- N: Множина всіх вузлів у мережі (наприклад, постачальники, виробничі потужності, склади, клієнти).
- N_S: Підмножина вузлів-джерел (постачальників), $N_S \subset N$.
- N_I: Підмножина проміжних вузлів (наприклад, виробництва, розподільчі центри), $N_I \subset N$.
- N_D: Підмножина вузлів попиту (клієнтів), $N_D \subset N$.
- N_C: Підмножина конфігурованих вузлів, для яких приймається рішення про відкриття/закриття на першому етапі, $N_C \subset N$.
- A: Множина допустимих дуг (транспортних зв'язків) (i, j) між вузлами з N.

- k: Індекс для сценаріїв, $k \in K$.
- n: Індекс для вузлів, $n \in N$.
- i: Індекс для вихідного вузла дуги, $i \in N$.
- j: Індекс для вхідного вузла дуги, $j \in N$.

Параметри моделі

- p_k: ймовірність реалізації сценарію $k \in K$.
- c_{ij}^{trans}: вартість транспортування одиниці продукції по дузі $(i, j) \in A$.
- f_n^{open}: фіксована вартість відкриття (або використання) конфігурованого вузла $n \in N_C$.
- r: дохід від задоволення одиниці попиту.
- d_n^{nom}: номінальний обсяг попиту у вузлі $n \in N_D$.
- c_n^{proc}: вартість обробки одиниці продукції, що проходить через вузол $n \in N$.
- c_n^{lost}: штраф за кожну одиницю незадоволеного попиту у вузлі $n \in N_D$.
- cap_n^{nom}: номінальна потужність вузла $n \in N$ (наприклад, виробнича потужність, пропускна здатність складу).
- δ_{nk}^{dem}: коефіцієнт зміни попиту для вузла $n \in N_D$ у сценарії $k \in K$. Фактичний попит у сценарії k становить $d_{nk} = d_n^{nom} \cdot \delta_{nk}^{dem}$. (Якщо параметр не вказаний для пари (n,k), приймається значення 1.0).
- γ_{nk}^{cap}: коефіцієнт зміни потужності для вузла $n \in N$ у сценарії $k \in K$. Фактична потужність у сценарії k становить $cap_{nk} = cap_n^{nom} \cdot \gamma_{nk}^{cap}$. (Якщо параметр не вказаний для пари (n,k), приймається значення 1.0).

Змінні рішення

Перший етап (стратегічні рішення):

- $y_n \in \{0, 1\}$: бінарна змінна, що дорівнює 1, якщо конфігурований вузол $n \in N_C$ відкритий (обраний), і 0 в іншому випадку.

Другий етап (операційні рішення, залежні від сценарію k):

- $x_{ijk} \geq 0$: обсяг потоку продукції, що транспортується по дузі $(i, j) \in A$ у сценарії $k \in K$.

- $l_{nk} \geq 0$: обсяг незадоволеного попиту у вузлі $n \in N_D$ у сценарії $k \in K$.

Цільова функція

$$\text{Maximize } Z = -\sum_{\substack{n \in N_C \\ f_n^{\text{open}} \text{ існує}}} f_n^{\text{open}} \cdot y_n + \sum_{k \in K} p_k \cdot \text{Profit}_k,$$

де прибуток у сценарії k, Profit_k, визначається як:

$$\begin{aligned}
\text{Profit}_k = & \sum_{n \in N_D} r \cdot \left(d_n^{\text{nom}} \cdot \delta_{nk}^{\text{dem}} - l_{nk}\right) \\
& - \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^{\text{trans}} \cdot x_{ijk} \\
& - \sum_{\substack{n \in N \\ c_n^{\text{proc}} > 0}} c_n^{\text{proc}} \cdot \left(\sum_{\substack{j \in N \\ (n,j) \in A}} x_{njk} \right) \\
& - \sum_{n \in N_D} c_n^{\text{lost}} \cdot l_{nk}
\end{aligned}$$

Обмеження

1. Баланс потоків для проміжних вузлів

$$\sum_{i \in N:(i,n) \in A} x_{ink} = \sum_{j \in N:(n,j) \in A} x_{njk} \quad \forall n \in N_I, \forall k \in K$$

2. Задоволення попиту вихідних вузлів

$$\sum_{i \in N:(i,n) \in A} x_{ink} + l_{nk} = d_n^{nom} \cdot \delta_{nk}^{dem} \quad \forall n \in N_D, \forall k \in K$$

3. Обмеження потужності вузлів

$$\sum_{j \in N:(n,j) \in A} x_{njk} \leq cap_n^{nom} \cdot \gamma_{nk}^{cap} \cdot Y_n \quad \forall n \in N \text{ s.t. } cap_n^{nom} \text{ існує}, \forall k \in K$$

де $Y_n = y_n$, якщо $n \in N_C$, та $Y_n = 1$, якщо $n \notin N_C$.

4. Невід'ємність та бінарність змінних

$$\begin{aligned} &y_n \in \{0,1\} && \forall n \in N_C \\ &x_{ijk} \geq 0 && \forall (i,j) \in A, \forall k \in K \\ &l_{nk} \geq 0 && \forall n \in N_D, \forall k \in K \end{aligned}$$

Інструментарій програмної реалізації

Julia — декларативна мова з JIT-компіляцією (LLVM), що забезпечує швидкість C/C++. Підходить для обчислювально інтенсивних задач з багатьма сценаріями.
JuMP.jl — бібліотека для формулювання LP/MILP моделей у Julia. Дозволяє будувати двоетапні моделі з великою кількістю змінних і сценаріїв.
HiGHS — відкритий високопродуктивний оптимізатор з підтримкою симплекс-методу та методу внутрішньої точки. Має хорошу інтеграцію з JuMP.

Програмна реалізація

https://github.com/mar4enkom/logistics-optimization

Апробація моделі на прикладній задачі

Маємо об'єкти мережі:
Заводи (США):
- *Детройт*: 3000 авт./міс, відкриття – 150 тис. $, обробка – 0.2 тис. $
- *Лос-Анджелес*: 500 авт./міс, відкриття – 600 тис. $, обробка – 0.3 тис. $

Розподільчі центри (Німеччина):
- *Гамбург*: 900 авт., відкриття – 400 тис. $, обробка – 2.0 тис. $
- *Мюнхен*: 800 авт., відкриття – 380 тис. $, обробка – 2.2 тис. $

Споживачі:
- Берлін – 500 авт.
- Штутгарт – 600 авт.
- Франкфурт – 350 авт.

Транспортні витрати (тис. $ / авто):
- США - Німеччина: 3.0–3.5
- РЦ - міста: 0.5–0.65

Фінансові параметри:
- Ціна продажу авто: 80 тис. $
- Штраф за незадоволений попит: 1000 тис. $ / авто

Сценарії:
Базовий (70%): усі параметри номінальні
Кризовий (30%):
- Потужність Детройта ↓ 20%
- Потужність Гамбурга ↓ 30%
- Попит Берлін ↑ 20%
- Попит Штутгарт ↑ 10%
- Попит Франкфурт ↓ 10%

Задача:
1. Які заводи та розподільчі центри доцільно відкривати?
2. Зазначити незадоволений попит для кожного сценарію.
3. Надати оптимальні маршрути транспортування авто для кожного сценарію.
4. Порахувати очікуваний прибуток.

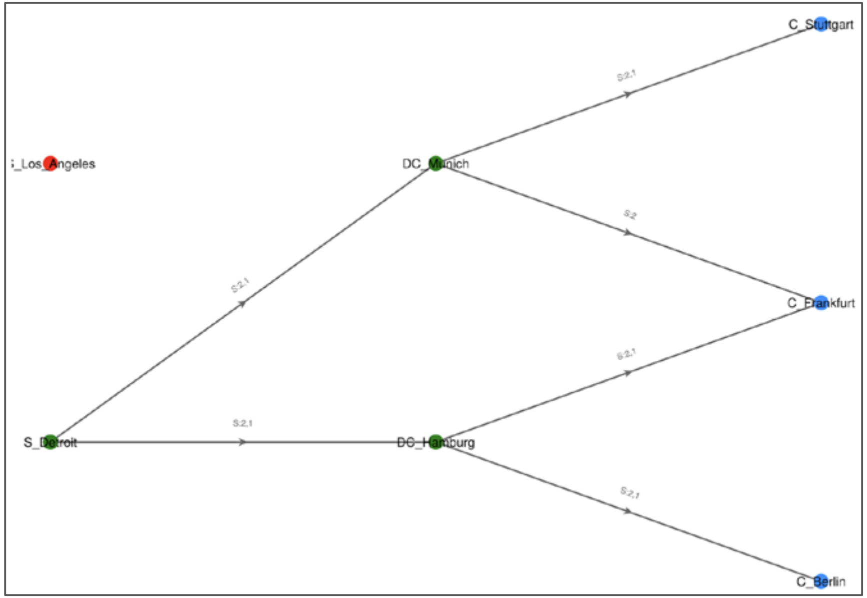
Результат роботи моделі

1.
- Завод у Детройті: відкрити.
- Завод у Лос-Анджелесі: не відкривати.
- Розподільчий центр у Гамбурзі: відкрити.
- Розподільчий центр у Мюнхені: відкрити.

2.
Базовий сценарій: попит повністю задоволено.
Кризовий сценарій: Незадоволений попит — у Франкфурті 145 автомобілів.

3.
Маршрути при кожному сценарії зазначено на малюнку.

4.
Очікуваний прибуток: 62,334.60 тис. $



Візуалізація результату моделі.
Зелений вузол - обраний для відкриття, червоний - не обраний.

Висновок

Спроектовано та розроблено узагальнену стохастичну модель, що проектує оптимальні мережі постачання, адаптує потоки до сценаріїв та максимізує очікуваний прибуток в умовах ризиків.
Створено задачу, вирішення якої наочно демонструє роботу моделі.