УДК 517.9

*Лаврик В. І, Булавацький В. М.*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ НЕРІВНОВАЖНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ

*Одержано розв'язки крайових задач теорії нерівноважної теплопровідності для однорідних і кусково-однорідних середовищ*

### Вступ

У даній праці розглядаються крайові задачі для математичних моделей нерівноважних процесів теплопровідності. Спочатку розглянемо таке узагальнення закону Фур'є [1]:

$$q + \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left( T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t} \right) ,$$

де $q$ – тепловий потік, $T(x, t)$ – температура, $\lambda$ – коефіцієнт теплопровідності середовища, $\tau_1, \tau_2$ – часи релаксації теплового потоку і температури відповідно. Звідси, з урахуванням закону збереження енергії, маємо рівняння з частинними похідними третього порядку

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left( T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_v}\left( 1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) Q(T),$$

де $c_v$ – теплоємність, $Q(T)$ – потужність джерел. З огляду на повну аналогію цього рівняння рівнянню релаксаційної фільтрації [2] будемо називати модель, що на ньому ґрунтується, моделлю релаксаційної теплопровідності.

### 1. Крайові задачі теплопровідності однорідних середовищ в рамках релаксаційної моделі

Одержимо розв'язки деяких лінійних крайових задач релаксаційної теплопровідності однорідних середовищ у випадку лінійного джерела виду $Q(T) = T$. Спочатку зупинимось на випадку скінченного стрижня $[0, l]$ на кінцях якого підтримується нульова температура.

Вводячи безрозмірні змінні та параметри згідно із співвідношеннями:

$$x' = \frac{x}{l}, \; t' = \frac{\lambda}{c_v l^2} t, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \qquad R = \frac{\tau_1 \lambda}{c_v l^2}, \quad P = \frac{\tau_2 \lambda}{c_v l^2} \tag{1.1}$$

та опускаючи надалі знак «штрих» над безрозмірними змінними, одержуємо крайову задачу:

$$R\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (1-R)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T + P\frac{\partial T}{\partial t}) + T \tag{1.2}$$

$$T(0,t) = T(1,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad T_t'(x,0) = \psi(x), \tag{1.4}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – задані функції свого аргументу. Задачу (1.2) – (1.4) розв'язуватимемо методом скінченних інтегральних перетворень за такою схемою.

Введемо до розгляду скінченне синус-перетворення Фур'є за змінною $x$ вигляду:

$$\overline{T}_n(t) = \int_0^1 T(x,t) \sin(\lambda_n x)\, dx, \quad (\lambda_n = n\pi). \tag{1.5}$$

Оператор (1.5) ставить у відповідність задачі (1.2)–(1.4) задачу Коші:

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{T}_n(t) + \aleph_n \frac{d}{dt}\overline{T}_n(t) - \mu_n \overline{T}_n(t) = 0, \tag{1.6}$$

$$\overline{T}_n(0) = \alpha_n, \qquad \overline{T}_n'(0) = \beta_n, \tag{1.7}$$

де

$$\aleph_n = \frac{1}{R}(1 - R + \lambda_n^2 P), \; \mu_n = \frac{1}{R}(1 - \lambda_n^2),$$

$\alpha_n, \beta_n$ – образи Фур'є функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ відповідно.

Безпосередньою перевіркою впевнюємось, що у випадку $d_n = \aleph_n^2 + 4\mu_n > 0$ розв'язок задачі (1.6), (1.7) має вигляд

$$\overline{T}_n^{(1)}(t) = (k_n^{(2)} - k_n^{(1)})^{-1}\left[ (\alpha_n k_n^{(2)} - \beta_n) e^{k_n^{(1)} t} + (\beta_n - k_n^{(1)}\alpha_n) e^{k_n^{(2)} t} \right], \tag{1.8}$$

де позначено

$$k_n^{(1)} = \frac{1}{2}(-\aleph_n + \sqrt{d_n}), \quad k_n^{(2)} = -\frac{1}{2}(\aleph_n + \sqrt{d_n}).$$

У випадку $d_n < 0$ розв'язок цієї задачі набуває вигляду:

$$\overline{T}_n^{(2)}(t) = e^{-\frac{\aleph_n}{2} t}\left[ \alpha_n \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}(\beta_n + \alpha_n \frac{\aleph_n}{2}) \sin(\omega_n t) \right], \tag{1.9}$$

де $\omega_n = \frac{1}{2}\sqrt{-d_n}$.

Нарешті, у випадку $d_n = 0$ розв'язок задачі (1.6), (1.7) запишеться у вигляді

$$\overline{T}_n^{(3)}(t)=\left[\alpha_n+\left(\beta_n+\frac{\aleph_n}{2}\alpha_n\right)t\right]e^{\frac{-\aleph_n t}{2}}. \quad (1.10)$$

Переходячи в область оригіналів, одержуємо розв'язок задачі у вигляді:

$$T(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n^{(i)}(t)\sin(\lambda_n x),\ \ (i=\overline{1,3}),\quad (1.11)$$

де функції $\overline{T}_n^{(i)}(i=\overline{1,3})$ визначаються відповідно до співвідношень (1.8) – (1.10).

При цьому легко показати, що, наприклад, у випадку $P>R$ для будь-якого натурального $n$ матимемо $d_n>0$, і тому в цьому випадку розв'язком задачі (1.6), (1.7) буде лише функція (1.8).

Розглянемо далі випадок мішаної крайової задачі для скінченного проміжку (стрижня). Якщо на кінцях стрижня задано однорідні граничні умови I роду (на лівому кінці) і II роду (на правому кінці), то розв'язок задачі (1.2), (1.4), що задовольняє цим умовам, знаходиться аналогічно викладеному вище із застосуванням скінченного синус-перетворення Фур'є за змінною $x$ вигляду (1.5), де попередньо треба покласти $\lambda_n=\frac{\pi(2n-1)}{2}$.

Провівши всі наведені вище викладки, одержимо розв'язок розглядуваної задачі у вигляді (1.8) – (1.11). У випадку граничних умов вигляду

$$T(0,t)=0,\ T_x'(1,t)+hT(1,t)=0,\ (h=\text{const})\quad (1.12)$$

розв'язок крайової задачі (1.2), (1.4), (1.12) відшукуємо за допомогою скінченного інтегрального перетворення Фур'є вигляду:

$$\overline{T}_n(t)=\int_0^1 T(x,t)\sin(\lambda_n x)\,dx,\ \ (n=1,2,...),\quad (1.13)$$

де $\lambda_n>0$ – корені рівняння $\operatorname{ctg}\lambda=-h/\lambda$.

У цьому випадку, після аналогічних викладених вище перетворень, одержуємо розв'язок задачі у вигляді:

$$T(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n^{(i)}(t)\frac{\lambda_n^2+h^2}{\lambda_n^2+h^2+h}\sin(\lambda_n x),\quad (1.14)$$

де функції $\overline{T}_n^{(i)}(t)\ \ (i=\overline{1,3})$ даються співвідношеннями (1.8) – (1.10).

Завершуючи, зауважимо, що цілком аналогічно одержуються розв'язки відповідних крайових задач і для інших можливих комбінацій граничних умов на кінцях стрижня.

## 2. Розрахунок нерівноважного температурного поля кусково-однорідного середовища

Розглянемо випадок кусково-однорідних нерівноважних середовищ за умов ідеального теплового контакту різних шарів, що відрізняються лише теплопровідністю. Для математичного моделювання процесу теплопровідності використовуватимемо рівняння:

$$\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T+\tau_2\frac{\partial T}{\partial t})=T,\quad (2.1)$$

де $a^2=\lambda/c_v$ – коефіцієнт температуропровідності (кусково-неперервна функція), $\tau_1,\tau_2$ – часи релаксації.

Зупинимось на випадку двошарового кусково-однорідного нерівноважного необмеженого середовища. Якщо позначити температуру першого і другого шарів відповідно $T_1(x,t)$ і $T_2(x,t)$, то в розглядуваному випадку задача про структуру нестаціонарного температурного поля зводиться до побудови обмеженого в області

$$G_1=\{(x,t):t\in(0;\infty);x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\}$$

розв'язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними третього порядку

$$\tau_1\frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2}+\frac{\partial T_j}{\partial t}-a_j^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T_j+\tau_2\frac{\partial T_j}{\partial t})=T_j,(j=1,2)\quad (2.2)$$

за початковими умовами

$$T_j(x,0)=\varphi_j(x),\ \ \frac{\partial T_j(x,0)}{\partial t}=\psi_j(x)\ \ (j=\overline{1,2})\quad (2.3)$$

та умовами спряження на лінії $x=0$ розділу середовищ з різними теплофізичними характеристиками

$$T_1(0,t)=T_2(0,t),$$
$$\lambda_1\frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x}=\lambda_2\frac{\partial T_2(0,t)}{\partial t},\quad (2.4)$$

де $\lambda_1,\lambda_2$ – коефіцієнти теплопровідності першого і другого шарів відповідно, $a_1^2, a_2^2$ – коефіцієнти температуропровідності.

Розв'язок задачі (2.2) – (2.4) будуємо із застосуванням методу інтегрального перетворення Фур'є на кусково-однорідній декартовій осі [3]. Визначимо пряме й обернене інтегральні перетворення Фур'є на декартовій осі з однією точкою спряження згідно зі співвідношеннями [3]:

$$F_1[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{V(x,\lambda)}\,\sigma(x)\,dx\equiv\tilde{f}(\lambda),\quad (2.5)$$

$$F_1^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[V(x,\lambda)\tilde{f}(\lambda)\right]\Omega(\lambda)d\lambda\equiv$$
$$\equiv f(x),\quad (2.6)$$

де спектральна функція $V(x,\lambda)$, спектральна густина $\Omega(\lambda)$ і вагова функція $\sigma(x)$ задовольняють співвідношенням [3]:

$$V(x,\lambda)=V_1(x,\lambda)\theta(-x)+V_2(x,\lambda)\theta(x),$$
$$\sigma(x)=\sigma_1\theta(-x)+\sigma_2\theta(x),$$
$$\sigma_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2 a_1^2},\ \ \sigma=\frac{1}{a_2^2},\ \ \Omega(\lambda)=\frac{a_2\lambda_1^2}{\lambda^2 q^2},\ \ q=\frac{\lambda_1}{a_1}+\frac{\lambda_2}{a_2},$$
$$V_1(x,\lambda)=\frac{\lambda a}{\lambda_1}\left(\cos\frac{\lambda}{a_1}x-ib\sin\frac{\lambda}{a_1}x\right),$$
$$a=\sqrt{\frac{\lambda_2 q}{a_2}},\ b=\sqrt{\frac{\lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_2}},$$

$$V_2(x,\lambda) = \frac{\lambda a}{\lambda_1}\left(\cos\frac{\lambda}{a_2}x - ib^{-1}\sin\frac{\lambda}{a_2}x\right),$$

$\theta(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Запишемо систему (2.2) і початкові умови (2.3) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \tau_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + \frac{\partial T_1}{\partial t} - a_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T_1 + \tau_2\frac{\partial T_1}{\partial t}) - T_1 \\ \tau_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + \frac{\partial T_2}{\partial t} - a_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T_2 + \tau_2\frac{\partial T_2}{\partial t}) - T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} \end{bmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix}.$$

Зобразимо інтегральний оператор $F_1$, визначений згідно з (2.5), у вигляді матриці-рядка [3]

$$F_1[...] = \left[\int_{-\infty}^{0} ...\overline{V_1(x,\lambda)}\sigma_1 dx ... \int_0^{\infty} ...\overline{V_2(x,\lambda)}\sigma_2 dx\right]. \quad (2.9)$$

Застосовуючи до задачі (2.8) операторну матрицю-рядок (2.9), з урахуванням правила множення матриць та результатів роботи [3] одержуємо задачу Коші:

$$\tau_1\frac{d^2\tilde{T}(\lambda,t)}{dt^2} + (1+\tau_2\lambda^2)\frac{d\tilde{T}(\lambda,t)}{dt} + (\lambda^2-1)\,\tilde{T}(\lambda,t) = 0,$$

$$\tilde{T}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}(\lambda), \quad \frac{dT(\lambda,0)}{dt} = \tilde{\Psi}(\lambda), \quad (2.10)$$

де $\tilde{T}(\lambda,t) = \tilde{T}_1(\lambda,t) + \tilde{T}_2(\lambda,t)$, $\tilde{\varphi}(\lambda) = \tilde{\varphi}_1(\lambda) + \tilde{\varphi}_2(\lambda)$,

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \tilde{\psi}_1(\lambda) + \tilde{\psi}_2(\lambda),$$

$$\tilde{T}_1(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{0} T_1(x,t)\,\overline{V_1(x,\lambda)}\,\sigma_1 dx,$$

$$\tilde{T}_2(\lambda,t) = \int_0^{\infty} T_2(x,t)\,\overline{V_2(x,\lambda)}\,\sigma_2 dx,$$

$$\tilde{\varphi}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \varphi_1(x)\,\overline{V_1(x,\lambda)}\,\sigma_1 dx,$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \int_0^{\infty} \varphi_2(x)\,\overline{V_2(x,\lambda)}\,\sigma_2 dx,$$

$$\tilde{\Psi}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \Psi_1(x)\overline{V_1(x,\lambda)}\sigma_1 dx,$$

$$\tilde{\Psi}_2(\lambda) = \int_0^{\infty} \Psi_2(x)\overline{V_2(x,\lambda)}\sigma_2 dx.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (2.10) є функція

$$\tilde{T}(\lambda,t) = Q(t,\lambda)\,\tilde{\varphi}(\lambda) + K(t,\lambda)\,\tilde{\psi}(\lambda), \quad (2.11)$$

де позначено

$$Q(t,\lambda) = 2a(\lambda)K(t,\lambda) + K_t'(t,\lambda),$$

а функція Коші $K(t,\lambda)$ дається співвідношенням:

$$K(t,\lambda) = \begin{cases} e^{-\alpha(\lambda)t}\frac{sh[q(\lambda)\,t]}{q(\lambda)}, & D(\lambda) > 0, \\ e^{-\alpha(\lambda)t}\frac{\sin[\beta(\lambda)\,t]}{\beta(\lambda)}, & D(\lambda) < 0, \\ t\cdot e^{-\alpha(\lambda)t}, & D(\lambda) = 0, \end{cases}$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{1+\tau_2\lambda^2}{2\tau_1}, \quad D(\lambda) = \left(1+\tau_2\lambda^2\right)^2 - 4\tau_1\left(\lambda^2-1\right),$$

$$q(\lambda) = \frac{\sqrt{D(\lambda)}}{2\tau_1}, \quad \beta(\lambda) = \frac{\sqrt{-D(\lambda)}}{2\tau_1}.$$

Оскільки суперпозиція операторів $F_1$ і $F_1^{-1}$ є одиничним оператором, то [3]

$$F_1^{-1}[...] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\,\left[...V_1(x,\lambda)\right]\Omega(\lambda)\,d\lambda \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\,\left[...V_2(x,\lambda)\right]\Omega(\lambda)\,d\lambda \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Застосуємо за правилом множення матриць матрицю-стовпець (2.12) до матриці-елемента $\left[\tilde{T}(\lambda,t)\right]$, де функція $\tilde{T}(\lambda,t)$ визначена формулою (2.11). В результаті елементарних перетворень маємо функції, що описують структуру нестаціонарного температурного поля двошарового необмеженого нерівноважного середовища:

$$T_j(x,t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 a_1^2}\int_{-\infty}^{0}\left[\psi_1(\xi)H_{j1}(x,t,\xi) + \right.$$

$$\left. + \varphi_1(\xi)E_{j1}(x,t,\xi)\right]d\xi + \frac{1}{a_2^2}\int_0^{\infty}\left[\psi_2(\xi)H_{j2}(x,t,\xi) + \right.$$

$$\left. + \varphi_2(\xi)E_{j2}(x,t,\xi)\right]d\xi \quad (j=1,2) \quad (2.13)$$

У рівностях (2.13) прийняті позначення:

$$H_{j1}(x,t,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K(t,\lambda)\times$$

$$\times\mathrm{Re}\,\left[V_j(x,\lambda)\overline{V_1(\xi,\lambda)}\right]\,\Omega(\lambda)\,d\lambda,$$

$$H_{j2}(x,t,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K(t,\lambda)\times$$

$$\times\mathrm{Re}\left[V_j(x,\lambda)\,\overline{V_2(\xi,\lambda)}\right]\Omega(\lambda)\,d\lambda, \quad (2.14)$$

$$E_{j1}(x,t,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} Q(t,\lambda)\times$$

$$\times\mathrm{Re}\,\left[V_j(x,\lambda)\,\overline{V_1(\xi,\lambda)}\right]\Omega(\lambda)\,d\lambda,$$

$$E_{j2}(x,t,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} Q(t,\lambda)\times$$

$$\times\mathrm{Re}\,\left[V_j(x,\lambda)\,\overline{V_2(\xi,\lambda)}\right]\Omega(\lambda)\,d\lambda.$$

Зауважимо, що, зокрема, при $\tau_2 = 0$ одержаний розв'язок є розв'язком відповідної задачі теплопровідності двошарового середовища в рамках моделі узагальненої термомеханіки [4].

### 3. Біпараболічна математична модель тепломасопереносу

Для моделювання процесів тепломасопереносу за умов теплової нерівноважності у праці [5] запропонована математична модель, що грунтується на еволюційному рівнянні 4-го порядку, яке задовольняє вимозі інваріантності відносно групи Галілея $G(1,3)$:

$$\mathcal{L}\, u(x,t) \equiv \left(L + \tau_r L^2\right) u(x,t) = 0, \qquad (3.1)$$

де $L = \frac{\partial}{\partial t} - a\Delta$ – класичний оператор теплопровідності, $\Delta$ – оператор Лапласа, $a$ – коефіцієнт теплопровідності, $\tau_r$ – параметр релаксації, $u(x,t)$ – шукана температура, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $L^2 = LL$.

Це рівняння є наслідком узагальнення закону Фур'є [6, 7]:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla\left(u + \tau_r L u\right), \qquad (3.2)$$

де $\lambda$ – коефіцієнт теплопровідності, $\nabla$ – оператор Гамільтона, і дає змогу, зокрема, досліджувати процеси зі скінченною швидкістю розповсюдження збурень. Відповідна математична модель, яка грунтується на біпараболічному [7] рівнянні (3.1), дістала назву біпараболічної математичної моделі і застосовувалась до опису процесів тепломасопереносу за умов суттєвої нерівноважності в ряді робіт, зокрема в [8–9].

Нижче наведено точні розв'язки деяких крайових задач теорії теплопровідності в рамках біпараболічної математичної моделі.

### 4. Температурне поле скінченного стрижня в рамках біпараболічної моделі

В рамках зазначеної моделі розглянемо задачу про структуру нестаціонарного нерівноважного температурного поля скінченного стрижня довжиною $\ell$, на кінцях якого підтримується задана температура. У математичній постановці вказана задача зводиться до розв'язання в області $(0,\ell)\times(0,+\infty)$ такої крайової задачі:

$$\mathcal{L}\, u(x,t) = f(x,t), \qquad (4.1)$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(\ell,t) = T_2, \qquad (4.2)$$

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(\ell,t) = 0, \qquad (4.3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad (4.4)$$

де $\varphi(x), \psi(x)$ – задані функції, $u(x,t)$ – шукана температура, $f$ – функція джерела, $T_1, T_2 = \text{const}$. Розв'язок крайової задачі (4.1) – (4.4) побудуємо методом скінченних інтегральних перетворень за такою схемою.

Переходячи до однорідних крайових умов з використанням заміни $\upsilon(x,t) = T_1\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + T_2 \frac{x}{\ell} - u(x,t)$ і застосовуючи скінченне синус-перетворення Фур'є за змінною $x$ [10]

$$\bar{\upsilon}_n(t) = \int_0^\ell \upsilon(x,t)\sin(\lambda_n x)\,dx, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad (4.5)$$

поставимо у відповідність розглядуваній крайовій задачі задачу Коші:

$$\tau_r \frac{d^2\bar{\upsilon}_n(t)}{dt^2} + \mu_n \frac{d\bar{\upsilon}_n(t)}{dt} + \nu_n \bar{\upsilon}_n(t) = -\bar{f}_n(t), \qquad (4.6)$$

$$\bar{\upsilon}_n(0) = \bar{\varphi}_n, \quad \bar{\upsilon}_n'(0) = -\bar{\psi}_n, \qquad (4.7)$$

де $\mu_n = 1 + 2\tau_r a\lambda_n^2$, $\nu_n = \lambda_n^2 a\left(1 + \tau_r a\lambda_n^2\right)$, $\bar{\varphi}_n$, $\bar{\psi}_n$, $\bar{f}_n$ – образи Фур'є функцій $\varphi_1, \psi, f$ відповідно $\left(\varphi_1(x) = T_1\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + T_2\frac{x}{\ell} - \varphi(x)\right)$. Розв'язуючи задачу (4.6), (4.7) та переходячи в область оригіналів, одержуємо функцію, яка описує структуру нестаціонарного нерівноважного температурного поля скінченного стрижня

$$u(x,t) = T_1\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + T_2\frac{x}{\ell} - w(x,t) + \int_0^\ell \left[\varphi(\xi)\, G_1(x,\xi,t) + \psi(\xi) G_2(x,\xi,t)\right] d\xi + \frac{1}{\tau_r}\int_0^t\int_0^\ell f(\xi,\tau) G_2(x,\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau, \qquad (4.8)$$

де позначено

$$w(x,t) = \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_1 + (-1)^{n+1} T_2\right] Q_n(t)\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n}, \qquad (4.9)$$

$$Q_n(t) = e^{-\left(\frac{1}{2\tau_r} + a\lambda_n^2\right)t}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2\tau_r}\right) + \left(1 + 2\tau_r a\lambda_n^2\right)\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2\tau_r}\right)\right], \qquad (4.10)$$

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t)\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi), \qquad (4.11)$$

$$G_2(x,\xi,t) = \frac{4\tau_r}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\tau_r} + a\lambda_n^2\right)} \times \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi). \qquad (4.12)$$

Зауважимо, що в окремому випадку $\tau_r \to 0$ зі співвідношень (4.8)–(4.12) одержуємо відповідні співвідношення, що визначають температурне поле стрижня в рамках класичної моделі Фур'є [10].

Зазначимо, що в рамках біпараболічної моделі коректною є і така некласична постановка крайової задачі про структуру нестаціонарного температурного поля скінченного стрижня, кінці якого підтримуються при заданій температурі:

$$\mathcal{L}\, u(x,t) = 0, \qquad (4.13)$$

$$u(0,t) = u_1, \quad u(\ell,t) = 0, \qquad (4.14)$$

$$Lu(0,t) = \chi_1, \quad Lu(\ell,t) = 0, \qquad (4.15)$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad (4.16)$$

де $u_1$, $\chi_1$ – задані дійсні числа, $L$ – оператор теплопровідності.

У цьому випадку ефективний розв'язок задачі можна одержати операційним методом [11]. Використовуючи вказаний метод, після простих, проте громіздких перетворень, одержуємо

$$u(x,t)=u_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[erfc\left(z_1(x,t)\right)-erfc\left(z_2(x,t)\right)\right]+$$

$$+\frac{\tau_r\chi_1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2\left[erfc\left(z_1(x,t)\right)-erfc\left(z_2(x,t)\right)\right]+\right.$$

$$+\exp\left[-z_2\left(x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_2(x,t)-\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]+$$

$$+\exp\left[z_2\left(x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_2(x,t)+\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]-$$

$$-\exp\left[-z_1\left(x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_1(x,t)-\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]-$$

$$\left.-\exp\left[z_1\left(x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_1(x,t)+\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]\right\},\quad(4.17)$$

де $z_1(x,t)=\dfrac{2n\ell+x}{2\sqrt{t}}$, $z_2(x,t)=\dfrac{2(n+1)\ell-x}{2\sqrt{t}}$,

$$erfc(z)=1-erf(z),\quad(4.18)$$

$erf(z)$ – функція Лапласа [10].

У випадку, коли на одному з кінців стрижня підтримується задана температура, а інший – теплоізольований, отримуємо крайову задачу:

$$\mathcal{L}u(x,t)=0,\quad(4.19)$$

$$u(0,t)=u_1,\quad\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}=0,\quad(4.20)$$

$$Lu(0,t)=\chi_1,\quad\frac{\partial}{\partial x}Lu(\ell,t)=0,\quad(4.21)$$

$$u(x,0)=u_t'(x,0)=0.\quad(4.22)$$

Застосовуючи операційний метод, одержуємо розв'язок задачі (4.19)–(4.22) у вигляді

$$u(x,t)=(u_1+\tau_r\chi_1)\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{\tau_r\chi_1}{2}\left[e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_r}}}erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}-\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right)+e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_r}}}erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}+\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right)\right]+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{(u_1+\tau_r\chi_1)\left[erfc\left(z_2(x,t)\right)-erfc\left(z_2(-x,t)\right)\right]-\right.$$

$$-\frac{\tau_r\chi_1}{2}\left\{\exp\left[-z_2\left(x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_2(x,t)-\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]+\right.$$

$$+\exp\left[z_2\left(x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_2(x,t)+\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]-$$

$$-\exp\left[-z_2\left(-x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_2(-x,t)-\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]-$$

$$\left.\left.-\exp\left[z_2\left(-x,\frac{\tau_r}{4}\right)\right]erfc\left[z_2(-x,t)+\sqrt{\frac{t}{\tau_r}}\right]\right\}\right\},\quad(4.23)$$

де $z_1(x,t), z_2(x,t)$ визначаються згідно з (4.18).

Аналогічно можна розглянути і випадки інших можливих комбінацій граничних умов на кінцях стрижня.

Зауважимо, що неперервна залежність наведених розв'язків від параметрів задачі дає змогу, в рамках розглядуваної моделі, виділити будь-який практично важливий випадок, а алгоритмічний характер розв'язків дає можливість використовувати їх в інженерних розрахунках.


1. *Булавацький В. М., Юрик І. І.* Математичне моделювання процесу тепломасопереносу в релаксуючому середовищі // Доп. НАН України, 1998.- № 7-О. 42-45.
2. *Молокович Ю.* М, *Непримеров Н. И., Пикуза В. И., Штанин А. В.* Релаксационная фильтрация- Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980.- 136 с.
3. *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях.- К.: 1н-т математики НАН України, 1997- 188 с.
4. *Подстигач Я. С, Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. - К.: Наук, думка, 1976.-310 с.
5. *Фущич В. И.* О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики,- К.: Ин-т математики АН УССР, 1983- С. 4-22.
6. *Фущич В. 1., Галіцин А. С, Полубинсьааш А. С.* Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченною швидкістю // Доп. АН УРСР. Сер. А- 1988.- № 8.- С. 21-26.
7. *Фущич В. И,, Голицын А. С, Полубинский А. С.* О новой математической модели процессов теплопроводности // Укр. матем. журнал- 1990.-Т. 42-№2.-С. 146-160.
8. *Булавацький В. М.* Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації // Доп. НАН України, 1997.-№8.-С. 13-17.
9. *Булавацький В. М.* Розв'язок незв'язної динамічної задачі термопружності для півпростору на основі біпараболічної моделі теплопровідності // Доп. НАН України, 1998- № 9 - С 50-53.
10. *Карташов Э. И.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел-М.: Вые. школа, 1979.-415 с.
11. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Иігтегральньїе преобразования и операционное исчисление. - М: Наука, 1974,- 542 с.



*V. I. Lavrvk, V. M. Bulavatskyi*


## MATHEMATICAL SIMULATION OF PROBLEMS NONEQUILIBRIUM HEAT AND MASS TRANSPORT


*The solutions boundary-value problems of the theory of nonequilibium heat and mass transport for homogeneous and composite environments isobtained*