

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТА КЕРУВАННЯ ДЛЯ
ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ РІККАТІ»**

Виконав: студент 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Оборін Михайло Дмитрович

Керівник: Покутний О. О.
доктор фіз.-мат. наук

Рецензент:

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

«_____» _____ 20__р.

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
доцент, кандидат фіз.-мат. наук

_____ Чорней Р.К.
(підпис)

“ _____ ” _____ 2025

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи
студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Оборіну Михайлу Дмитровичу

Тема: «Крайові задачі керування для зв'язаних систем рівнянь Ріккати»

Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація

1. Вступ

2. Дослідження краєвої задачі для зв'язаних систем рівнянь Ріккати

3. Чисельне моделювання та програмна реалізація

Висновки

Додаток

Список літератури

Дата видачі “ _____ ” _____ 2025 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «_____» _____ 2024р.

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконан- ня етапу	Підпис наукового керівника	Дата озна- йомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми квалі- фікаційної роботи.	16.10.2025			
2.	Формування актуаль- ності, мети та завдань дослідження.	30.10.2025			
3.	Розробка плану та стру- ктури роботи.	10.11.2025			
4.	Аналіз літератури з зв'язаними система- ми рівнянь Рікатті. Написання вступу та анотації.	10.12.2025			
5.	Дослідження краєвої задачі для зв'язаних систем рівнянь Ріккати	28.01.2025			
6.	Чисельне моделювання та програмна реаліза- ція. Отримання резуль- татів.	18.03.2026			
7.	Оформлення теоре- тичної та практичної частини. Попередній аналіз тексту.	30.04.2026			
8.	Попередній захист квалі- фікаційної роботи.	15.05.2026			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	01.06.2026			

Зміст

1	Анотація	4
2	Вступ	5
2.1	Актуальність	5
2.2	Мета, завдання дослідження	5
2.3	Використання інструментів штучного інтелекту	6
3	Дослідження краєвої задачі для зв'язаних систем рівнянь Рік-кати	7
3.1	Постановка задачі	7
3.2	Інтерпритація поставленої задачі	8
3.3	Породжуюча задача при $\varepsilon = 0$	9
3.4	Векторизація системи та використання добутку Кронекера	11
3.5	Керування	12
3.5.1	Константне керування	13
3.5.2	Афінне керування	15
3.6	Нелінійна умова розв'язності	18
4	Чисельне моделювання та програмна реалізація	20
4.1	Константне керування	20
4.2	Афінне керування	21
4.3	Обчислення матричних інтегралів на основі блокових представ- лень	23
5	Висновки	27
A	Додаток	29

1 Анотація

У роботі розглядається крайова задача керування для зв'язаних систем матричних диференціальних рівнянь типу Ріккати вигляду

$$\begin{cases} \frac{dX_i(t)}{dt} = A_{i1}X_i(t, \varepsilon) + X_i(t, \varepsilon)A_{i2} + \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(t, \varepsilon)C_k X_k(t, \varepsilon) + B_i u_i(t, \varepsilon), \\ H_{i1}X_i(0, \varepsilon) - H_{i2}X_i(T, \varepsilon) = \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

При $\varepsilon = 0$ система зводиться до лінійної крайової задачі для матричних рівнянь типу Сильвестра з керуванням

$$\begin{cases} \frac{dX_i(t,0)}{dt} = A_{i1}X_i(t, 0) + X_i(t, 0)A_{i2} + B_i u_i(t), \\ H_{i1}X_i(0, 0) - H_{i2}X_i(T, 0) = \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

У роботі отримано необхідні умови існування розв'язків $X_i(t, \varepsilon)$ слабконелінійної крайової задачі (3), які при $\varepsilon = 0$ переходять у розв'язки породжуючої системи (2). Встановлено умови розв'язності відповідної лінійної задачі та описано структуру множини розв'язків.

Результати проілюстровано чисельним моделюванням у середовищі Python, зокрема побудовано траєкторії розв'язків породжуючої крайової задачі.

2 Вступ

2.1 Актуальність

Матричні диференціальні рівняння типу Ріккаті та Сильвестра відіграють важливу роль у сучасній прикладній математиці, теорії керування, математичному моделюванні та робототехніці. Такі рівняння виникають у задачах керування, нейронних мережах, дослідження динамічних систем, а також у задачах, пов'язаних із взаємодією декількох підсистем.

Особливий інтерес становлять зв'язані системи матричних рівнянь, оскільки вони дозволяють описувати складні багатокомпонентні процеси з нелінійною взаємодією між окремими елементами системи. Подібні моделі використовуються при дослідженні робототехнічних систем, мережевих структур, колективної динаміки та багатозв'язних процесів керування.

Дослідження крайових задач для зв'язаних систем рівнянь типу Ріккаті є складною задачею через наявність нелінійних членів та взаємозалежності між підсистемами. Одним із підходів до аналізу таких систем є дослідження породжуючої лінійної задачі, що виникає при малих значеннях параметра нелінійності. Це дозволяє отримати умови розв'язності, побудувати аналітичні вирази для розв'язків та дослідити властивості системи.

Актуальність роботи зумовлена необхідністю дослідження умов розв'язності крайових задач для зв'язаних систем матричних рівнянь типу Ріккаті, а також побудови підходів до аналізу відповідних задач керування.

2.2 Мета, завдання дослідження

Метою роботи є дослідження умов розв'язності крайових задач для зв'язаних систем матричних рівнянь типу Ріккаті та побудова розв'язків відповідної породжуючої системи рівнянь типу Сильвестра.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі завдання:

- дослідити зв'язану систему матричних рівнянь типу Ріккаті;
- розглянути породжуючу лінійну систему при $\varepsilon = 0$;

- отримати умови розв’язності крайової задачі для системи рівнянь типу Сильвестра;
- дослідити випадки константного та афінного керування;
- застосувати операцію векторизації та добуток Кронекера для спрощення системи;
- побудувати аналітичні вирази для розв’язків;
- отримати необхідні умови розв’язності слабконелінійної крайової задачі;
- провести чисельне моделювання та візуалізацію отриманих результатів засобами Python.

2.3 Використання інструментів штучного інтелекту

У межах даної роботи інструменти штучного інтелекту (ChatGPT-4 (OpenAI)) використовувалися для допомоги в редагуванні тексту, покращенні викладу математичних пояснень та уточненні формулювань.

3 Дослідження крайової задачі для зв'язаних систем рівнянь Ріккаті

3.1 Постановка задачі

У роботі розглядається крайова задача керування для зв'язаних систем матричних диференціальних рівнянь типу Ріккаті вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial X_i(t, \varepsilon)}{\partial t} = A_{i1}X_i(t, \varepsilon) + X_i(t, \varepsilon)A_{i2} + \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(t, \varepsilon)C_kX_k(t, \varepsilon) + B_i u_i(t, \varepsilon) \\ H_{i1}X_i(0, \varepsilon) - H_{i2}X_i(T, \varepsilon) = \Lambda_i \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

Тут

$$X_i(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

— матричні функції стану системи,

$$u_i(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

— матричні функції керування,

$$A_{i1}, A_{i2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$C_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Lambda_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

$$H_{i1}, H_{i2} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Параметр

$$\varepsilon \in \mathbb{R}$$

характеризує силу нелінійної взаємодії між підсистемами.

Крайова умова лінійно пов'язує стани системи на початку та в кінці проміжку часу.

Потрібно дослідити умови розв'язності задачі (3)

3.2 Інтерпритація поставленої задачі

Розглянута система описує динаміку декількох взаємопов'язаних підсистем, поведінка яких задається матричними диференціальними рівняннями типу Ріккати.

Кожна підсистема характеризується матричною функцією стану

$$X_i(t, \varepsilon),$$

яка змінюється з часом під впливом внутрішньої динаміки, взаємодії з іншими підсистемами та зовнішнього керування.

Член

$$A_{i1}X_i + X_iA_{i2}$$

описує власну еволюцію окремої системи без врахування взаємодії між підсистемами.

Нелінійний доданок

$$\varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k C_k X_k$$

відповідає за зв'язок між різними підсистемами. Параметр

$$\varepsilon$$

характеризує силу взаємодії: при малих значеннях вплив між системами є слабким.

Член

$$B_i u_i(t, \varepsilon)$$

задає керуючий вплив на систему. За допомогою вибору функції керування можна змінювати поведінку системи та досягати потрібного кінцевого стану.

Крайова умова

$$H_{i1}X_i(0) - H_{i2}X_i(T) = \Lambda_i$$

накладає обмеження на стани системи на початку та в кінці часового проміжку.

Особливий інтерес становить випадок

$$H_{i1} = H_{i2} = H_i,$$

для якого крайова умова набуває вигляду

$$H_iX_i(0) - H_iX_i(T) = \Lambda_i.$$

У цьому випадку умова задає обмеження на різницю між початковим та кінцевим станами системи. Іншими словами, вимагається, щоб стан системи за час T змінився на наперед задану величину Λ_i після відповідного перетворення оператором H_i .

3.3 Породжуюча задача при $\varepsilon = 0$

Параметр ε характеризує інтенсивність нелінійної взаємодії між підсистемами. При $\varepsilon \rightarrow 0$ ця взаємодія є малим збуренням відносно основної динаміки системи.

Тому природним є розгляд породжуючої системи, яка відповідає випадку $\varepsilon = 0$. У цьому випадку нелінійні зв'язки між підсистемами зникають, і система розпадається на сукупність незалежних крайових задач, які описуються лінійними матричними диференціальними рівняннями типу Сильвестра.

Отримана лінійна задача надалі використовується як базова для дослідження існування та структури розв'язків вихідної нелінійної системи.

Позначимо

$$X_{i0}(t) = X_i(t, 0)$$

$$u_{i0}(t) = u_i(t, 0)$$

тоді отримаємо породжуючу задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial X_{i0}(t)}{\partial t} = A_{i1}X_{i0}(t) + X_{i0}A_{i2} + B_i u_{i0}(t) \\ H_{i1}X_{i0}(0) - H_{i2}X_{i0}(T) = \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Загальний розв'язок відповідного рівняння типу Сильвестра має вигляд

$$X_{i0}(t, D_i) = K_{0i}^t[D_i] + \int_0^t K_{\tau i}^t[B_i u_{i0}(\tau)] d\tau \quad (4)$$

де оператор

$$K_{\tau i}^t[D_i] = e^{(t-\tau)A_{i1}} D_i e^{(t-\tau)A_{i2}}$$

Підставимо (4) в крайову умову, отримаємо

$$\Lambda_i = H_{i1}D_i - H_{i2}K_{0i}^T[D_i] - H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T[B_i u_{i0}(\tau)] d\tau$$

Тоді задача зводиться до операторного рівняння

$$\mathcal{L}_i D_i := H_{i1}D_i - H_{i2}K_{0i}^T[D_i] = \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T[B_i u_i(\tau)] d\tau$$

Для цього рівняння умова розв'язності має вигляд

$$P_{N(\mathcal{L}_i^*)} \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T[B_i u_{i0}(\tau)] d\tau \right\} = 0 \quad (5)$$

При виконанні умови розв'язності отримаємо

$$D_i = \mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T[B_i u_{i0}(\tau)] d\tau \right\} + P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} X_{i0}(t, E_i) = & K_{0i}^t \left[\mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T[B_i u_{i0}(\tau)] d\tau \right\} \right] \\ & + \int_0^t K_{\tau i}^t [B_i u_{i0}(\tau)] d\tau + K_{0i}^t [P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i] \quad (7) \end{aligned}$$

Отриманий вираз містить псевдообернений оператор та ортогональні проєкції на ядро операторів. Оскільки оператор $\mathcal{L}_i$ має складну структуру, аналітичне обчислення відповідних величин є суттєво ускладненим. Тому надалі використаємо інший підхід, заснований на векторизації матриць та застосуванні добутку Кронекера.

3.4 Векторизація системи та використання добутку Кронекера

Відомо що для рівняння Сильвестра

$$AX + XB = C$$

ми можемо векторизувати його за допомогою добутку Кронекера

$$(I_m \otimes A + B^T \otimes I_n) \text{vec } X = \text{vec } C$$

Використаємо цю ідею для розв'язку нашої задачі

Введемо такі змінні

$$\begin{aligned} A_i &:= I \otimes A_{i1} + A_{i2}^T \otimes I, & A_i &\in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} \\ x_{i0}(t) &:= \text{vec } X_{i0}(t), & x_{i0}(t) &\in \mathbb{R}^{n^2} \\ \tilde{B}_i &:= I \otimes B_i, & \tilde{B}_i &\in \mathbb{R}^{n^2 \times nm} \\ \tilde{u}_i(t) &:= \text{vec } u_{i0}(t), & \tilde{u}_i(t) &\in \mathbb{R}^{nm} \\ \tilde{H}_{i1} &:= I \otimes H_{i1}, & \tilde{H}_{i1} &\in \mathbb{R}^{np \times n^2} \\ \tilde{H}_{i2} &:= I \otimes H_{i2}, & \tilde{H}_{i2} &\in \mathbb{R}^{np \times n^2} \\ \lambda_i &:= \text{vec } \Lambda_i, & \lambda_i &\in \mathbb{R}^{np} \end{aligned}$$

Тоді наша краєва задача буде мати вигляд

$$\begin{cases} x'_{i0}(t) = A_i x_{i0} + \tilde{B}_i \tilde{u}_i(t) \\ \tilde{H}_{i1} x_{i0}(0) - \tilde{H}_{i2} x_{i0}(T) = \lambda_i \end{cases}$$

Як бачимо ця задача зводиться до лінійної динамічної системи
Загальний розв'язок має вигляд

$$x_i(t) = e^{A_i t} d_i + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_i(\tau) d\tau \quad (8)$$

Підставимо загальний розв'язок у крайову умову

$$\tilde{H}_{i1} d_i - \tilde{H}_{i2} e^{A_i T} d_i - \tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_i(\tau) d\tau = \lambda_i$$

$$\left(\tilde{H}_{i1} - \tilde{H}_{i2} e^{A_i T} \right) d_i = \tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_i(\tau) d\tau + \lambda_i$$

Ми отримали матричне рівняння яке розв'язується тривіально

$$Q_i = \tilde{H}_{i1} - \tilde{H}_{i2} e^{A_i T}$$

Умова розв'язності

$$P_{N(Q_i^*)} \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_i(\tau) d\tau + \lambda_i \right) = 0 \quad (9)$$

$$\boxed{P_{N(Q_i^*)} \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_i(\tau) d\tau \right) = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i} \quad (10)$$

Розв'язок

$$\boxed{d_i = Q^+ \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_i(t) d\tau + \lambda_i \right) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}} \quad (11)$$

3.5 Керування

В даній роботі було розглянуто два типи керування:

- Константне $u_{i0}(t) = u_{ic}$
- Афінне $u_{i0}(t) = u_{it}t + u_{ic}$

Векторизуємо керування для подальшого використанні у векторизованій крайовій задачі

Константне керування $u_{i0}(t) = u_{ic}$ векторизується тривіально, тому введемо

$$\tilde{u}_{ic} := \tilde{u}_i(t) = \text{vec } u_{i0}(t) = \text{vec } u_{ic}$$

Афінне керування $u_{i0}(t) = u_{it}t + u_{ic}$ векторизується просто

$$\text{vec}(u_{it}t + u_{ic}) = \text{vec } u_{it}t + \text{vec } u_{ic} = t \text{vec } u_{it} + \text{vec } u_{ic}$$

Введемо змінні

$$\tilde{u}_{it} = \text{vec } u_{it}$$

$$\tilde{u}_{ic} = \text{vec } u_{ic}$$

тоді векторизоване керування можна записати як

$$\text{vec}(u_{it}t + u_{ic}) = \tilde{u}_{it}t + \tilde{u}_{ic}$$

3.5.1 Константне керування

Розв'язок крайової задачі виду Сильвестра

З пункту 3.3 ми знаємо умову розв'язання та розв'язок.

Підставивши керування $u_i(t, \varepsilon) = u_{ic}$ в умову розв'язання (5) отримаємо

$$P_{N(\mathcal{L}_i^*)} \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i u_{ic}] d\tau \right\} = 0$$

Щоб отримати розв'язок підставляємо $u_{i0}(t) = u_{ic}$ в (6) та (7) відповідно

$$D_i = \mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i u_{ic}] d\tau \right\} + P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n})$$

$$\begin{aligned} X_{i0}(t, E_i) = & K_{0i}^t \left[\mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i u_{ic}] d\tau \right\} \right] \\ & + \int_0^t K_{\tau i}^t [B_i u_{ic}] d\tau + K_{0i}^t [P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i] \quad (12) \end{aligned}$$

Розв'язок векторизованої краєвої задачі

Для отримання умови розв'язання для константного керування керування підставимо керування $\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{ic}$

$$P_{N(Q_i^*)} \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_{ic} d\tau \right) = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i$$

Наразі у даній формі ми можемо використати лише числові методи для обрахунку даного інтегралу, тому винесемо $\tilde{u}_{ic}$ за межі інтегралу

$$P_{N(Q_i^*)} \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i d\tau \tilde{u}_{ic} \right) = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i$$

Позначимо

$$M_{ic} := \tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i d\tau$$

Цей інтеграл ми можемо обрахувати використовуючи метод описаний в [1]

Тоді умову розв'язності можна записати як

$$\boxed{P_{N(Q_i^*)} M_{ic} \tilde{u}_{ic} = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i}$$

Звідси можемо визначити умову розв'язності

$$P_{N((P_{N(Q_i^*)} M_{ic})^*)} (-P_{N(Q_i^*)} \lambda_i) = 0$$

Маємо можливість прибрати мінус, і отримати фінальну умову розв'язності

$$\boxed{P_{N((P_{N(Q_i^*)} M_{ic})^*)} P_{N(Q_i^*)} \lambda_i = 0}$$

Тепер можемо знайти керування

$$\boxed{\tilde{u}_{ic} = (P_{N(Q_i^*)} M_{ic})^+ (-P_{N(Q_i^*)} \lambda_i) + P_{N(P_{Q_i^*} M_{ic})} C_{ui} \quad C_{ui} \in \mathbb{R}^{nm}}$$

Для того щоб знайти розв'язок векторизованої краєвої задачі підставимо $\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{ic}$ в (11)

$$d_i = Q^+ \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_{ic} d\tau + \lambda_i \right) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Винесемо $\tilde{u}_{ic}$ за межі інтеграла

$$d_i = Q^+ \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i d\tau \tilde{u}_{ic} + \lambda_i \right) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Тоді можемо записати

$$d_i = Q^+ (M_{ic} \tilde{u}_{ic} + \lambda_i) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Підставимо керування $\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{ic}$ в (8)

$$x_i(t) = e^{A_i t} d_i + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_{ic} d\tau$$

Винесемо $\tilde{u}_{ic}$ за інтеграл

$$x_i(t) = e^{A_i t} d_i + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \tilde{B}_i d\tau \tilde{u}_{ic}$$

3.5.2 Афінне керування

Розв'язок крайової задачі виду Сильвестра

Підставивши керування $u_i(t, \varepsilon) = u_{it}t + u_{ic}$ в умову розв'язання (5) отримаємо

$$P_{N(\mathcal{L}_i^*)} \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i(u_{it}\tau + u_{ic})] d\tau \right\} = 0$$

Маємо змогу розкласти інтеграл на два простіших інтеграли

$$P_{N(\mathcal{L}_i^*)} \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T \tau K_{\tau i}^T [B_i u_{it}] d\tau + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i u_{ic}] d\tau \right\} = 0$$

Щоб отримати розв'язок підставляємо $u_{i0} = u_{it}t + u_{ic}$ в (6) та (7) відповідно

$$D_i = \mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i(u_{it}\tau + u_{ic})] d\tau \right\} + P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times n})$$

Розкладемо інтеграл на два інтеграли відповідно

$$D_i = \mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T \tau K_{\tau i}^T [B_i u_{it}] d\tau + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i u_{ic}] d\tau \right\} + P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i$$

$$X_{i0}(t, E_i) = K_{0i}^t \left[\mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i(u_{it}\tau + u_{ic})] d\tau \right\} \right] \\ + \int_0^t K_{\tau i}^t [B_i(u_{it}t + u_{ic})] d\tau + K_{0i}^t [P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i] \quad (13)$$

Так же само розкладаємо обидва інтеграли кожен на два

$$X_{i0}(t, E_i) = K_{0i}^t \left[\mathcal{L}_i^+ \left\{ \Lambda_i + H_{i2} \int_0^T \tau K_{\tau i}^T [B_i u_{it}] d\tau + H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_i u_{ic}] d\tau \right\} \right] \\ + \int_0^t \tau K_{\tau i}^t [B_i u_{it}] d\tau + \int_0^t K_{\tau i}^t [B_i u_{ic}] d\tau + K_{0i}^t [P_{N(\mathcal{L}_i)} E_i] \quad (14)$$

Розв'язок векторизованої краєвої задачі

Для отримання умови розв'язання для афінного керування підставимо керування $\tilde{u}_{it}t + \tilde{u}_{ic}$ в умову розв'язності (10)

$$P_{N(Q_i^*)} \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i(\tilde{u}_{it}\tau + \tilde{u}_{ic}) d\tau \right) = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i$$

на даний момент наш ми не можемо обрахувати наш інтеграл чисельно, тому розпишемо інтеграл

$$\int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i(\tilde{u}_{it}\tau + \tilde{u}_{ic}) d\tau = \quad (15)$$

$$\int_0^T \tau e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_{it} d\tau + \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tilde{u}_{ic} d\tau = \quad (16)$$

$$\int_0^T \tau e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i d\tau \tilde{u}_{it} + \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i d\tau \tilde{u}_{ic} \quad (17)$$

другий інтеграл можемо обрахувати відповідно до методу в [1]

Перший інтеграл ми можемо обрахувати схожим способом

Позначимо

$$M_{it} = \tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i \tau d\tau$$

Тоді умову розв'язності має вигляд

$$P_{N(Q_i^*)} (M_{it} \tilde{u}_{it} + M_{ic} \tilde{u}_{ic}) = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i$$

Що можна записати як

$$P_{N(Q_i^*)} \begin{bmatrix} M_{it} & M_{ic} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{it} \\ \tilde{u}_{ic} \end{bmatrix} = -P_{N(Q_i^*)} \lambda_i$$

Умова розв'язності даного матричного рівняння

$$P_N \left(\left(P_{N(Q_i^*)} \begin{bmatrix} M_{it} & M_{ic} \end{bmatrix} \right)^* \right) = 0$$

тоді керування має вигляд

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{it} \\ \tilde{u}_{ic} \end{bmatrix} = \left(P_{N(Q_i^*)} \begin{bmatrix} M_{it} & M_{ic} \end{bmatrix} \right)^+ (-P_{N(Q_i^*)} \lambda_i) + P_N \left(P_{N(Q_i^*)} \begin{bmatrix} M_{it} & M_{ic} \end{bmatrix} \right) C_{ui} \quad C_{ui} \in \mathbb{R}^{2nm}$$

Для того щоб знайти розв'язок векторизованої краєвої задачі підставимо

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{it}t + \tilde{u}_{ic} \text{ в (11)}$$

$$d_i = Q^+ \left(\tilde{H}_{i2} \int_0^T e^{A_i(T-\tau)} \tilde{B}_i(\tilde{u}_{it}\tau + \tilde{u}_{ic}) d\tau + \lambda_i \right) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Можемо спростити вигляд аналогічно до попередніх пунктів

$$d_i = Q^+ (M_{it}\tilde{u}_{it}\tau + M_{ic}\tilde{u}_{ic} + \lambda_i) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Перепишемо в матричному вигляді

$$d_i = Q^+ \left(\begin{bmatrix} M_{it} & M_{ic} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{it} \\ \tilde{u}_{ic} \end{bmatrix} + \lambda_i \right) + P_{N(Q)} C_{di} \quad C_{di} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Підставимо керування $\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{it}t + \tilde{u}_{ic}$ в (8)

$$x_i(t) = e^{A_i t} d_i + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \tilde{B}_i(\tilde{u}_{it}\tau + \tilde{u}_{ic}) d\tau$$

Аналогічно до попередніх пунктів розкладемо інтеграл, отримаємо

$$x_i(t) = e^{A_i t} d_i + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \tilde{B}_i \tau d\tau \tilde{u}_{it} + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \tilde{B}_i d\tau \tilde{u}_{ic}$$

3.6 Нелінійна умова розв'язності

Після знаходження керування $u_i(t)$ та d_i у породжуючій задачі ($\varepsilon = 0$) ми отримуємо простір розв'язків нашої системи.

Тепер ми хочемо обмежити ці розв'язки щоб вони задовольняли не тільки породжуючу задачу, а й нелінійну задачу також.

Нагадаємо що початкова система має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial X_i(t, \varepsilon)}{\partial t} = A_{i1}X_i(t, \varepsilon) + X_i(t, \varepsilon)A_{i2} + \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(t, \varepsilon)C_kX_k(t, \varepsilon) + B_iu_i(t, \varepsilon) \\ H_{i1}X_i(0, \varepsilon) - H_{i2}X_i(T, \varepsilon) = \Lambda_i \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

У диференційного рівняння розв'язки мають вигляд

$$X_i(t, D_i) = K_{0i}^t[D_i] + \int_0^t K_{\tau i}^t \left[B_iu_i(\tau) + \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(\tau, \varepsilon)C_kX_k(\tau, \varepsilon) \right] d\tau$$

Розкладемо на два інтеграли і винесемо ε за межі інтегралу

$$X_i(t, D_i) = K_{0i}^t[D_i] + \int_0^t K_{\tau i}^t [B_iu_i(\tau)] d\tau + \varepsilon \int_0^t K_{\tau i}^t \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(\tau, \varepsilon)C_kX_k(\tau, \varepsilon) \right] d\tau$$

Підставляючи цей вираз у крайову умову, отримуємо

$$\begin{aligned} \Lambda_i = H_{i1}D_i - H_{i2}K_{0i}^T[D_i] - H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T [B_iu_i(\tau)] d\tau \\ - \varepsilon H_{i2} \int_0^T K_{\tau i}^T \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(\tau, \varepsilon)C_kX_k(\tau, \varepsilon) \right] d\tau \end{aligned}$$

Перші три доданки вже були досліджені у породжуючій задачі та задовольняють умову розв'язності. Таким чином єдиним додатковим внеском є нелінійний член.

Оскільки параметри u_i та D_i (вес $D_i = d_i$) були знайдені незалежно від параметра ε , то для того щоб отримані розв'язки залишались допустимими при будь-яких малих значеннях ε , необхідно вимагати, щоб нелінійна частина не порушувала виконання крайової умови. Отже має виконуватись

$$H_{i2} \int_0^T e^{A_{i1}(T-\tau)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n X_k(\tau, \varepsilon) C_k X_k(\tau, \varepsilon) e^{A_{i2}(T-\tau)} d\tau = 0$$

Використовуючи лінійність інтеграла та суми, отримаємо

$$H_{i2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \int_0^T e^{A_{i1}(T-\tau)} X_k(\tau, \varepsilon) C_k X_k(\tau, \varepsilon) e^{A_{i2}(T-\tau)} d\tau = 0$$

Позначимо функціонал

$$\Phi_i(C_{ui}, C_{di}) := H_{i2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \int_0^T e^{A_{i1}(T-\tau)} X_k(\tau, 0) C_k X_k(\tau, 0) e^{A_{i2}(T-\tau)} d\tau$$

Таким чином достатня умова розв'язності набуває вигляду

$$\boxed{\Phi_i(C_{ui}, C_{di}) = 0}$$

Відомо з [2] що дана умова також є достатньою якщо відповідний розв'язок є простим коренем функціонала Φ_i .

4 Чисельне моделювання та програмна реалізація

У даному розділі наведено результати чисельного моделювання породжуючої задачі для зв'язаних систем рівнянь Ріккати.

Основною метою є візуалізація траєкторій системи та перевірка отриманих аналітичних розв'язків для різних типів керування.

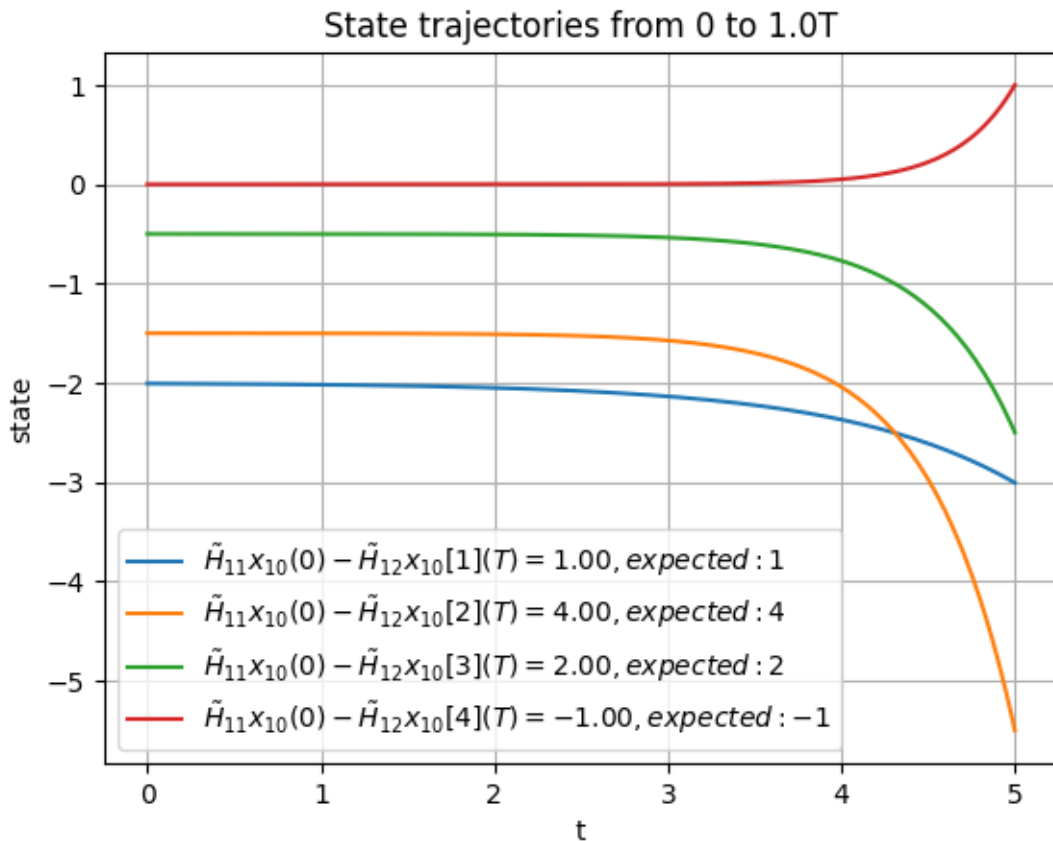
Чисельне інтегрування здійснювалось за допомогою стандартних методів розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь.

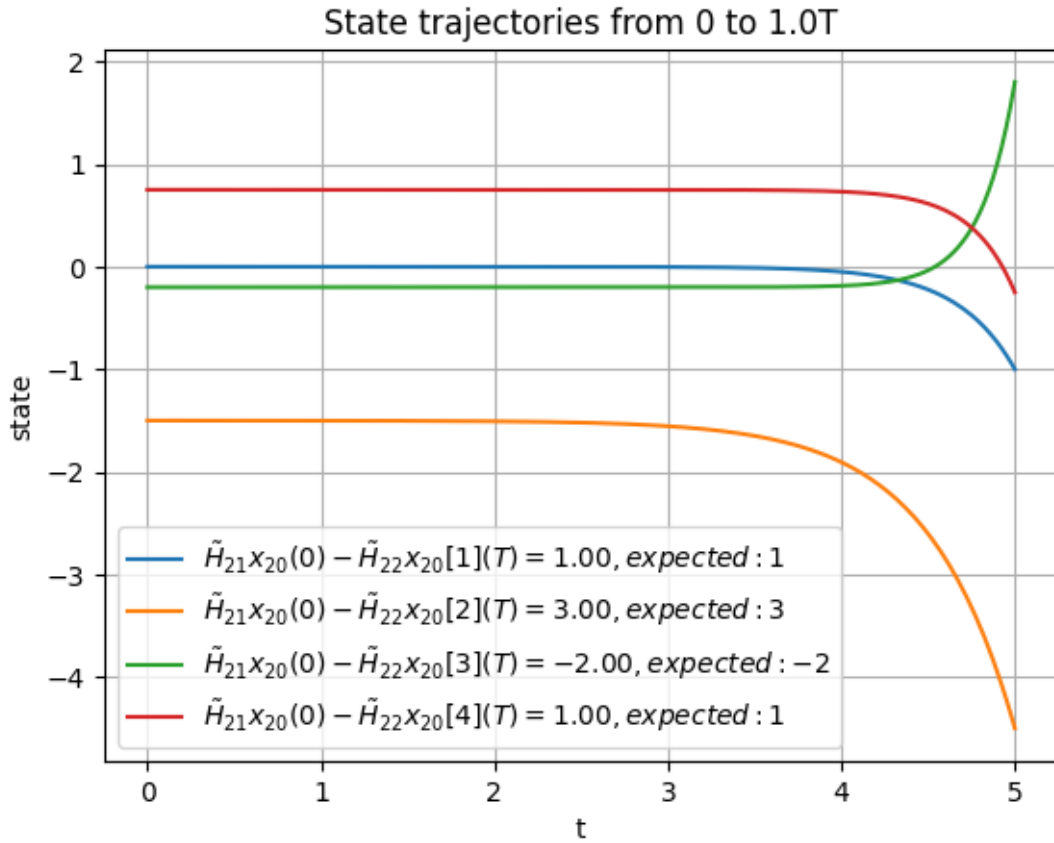
Розглянуто два типи керування: константне та афінне.

4.1 Константне керування

Для випадку константного керування $u_i(t) = u_{ic}$ отримано траєкторії станів двох підсистем.

На рисунках наведено відповідну еволюцію компонент системи, яка демонструє стабільну поведінку, що узгоджується з аналітичним розв'язком породжуючої задачі.



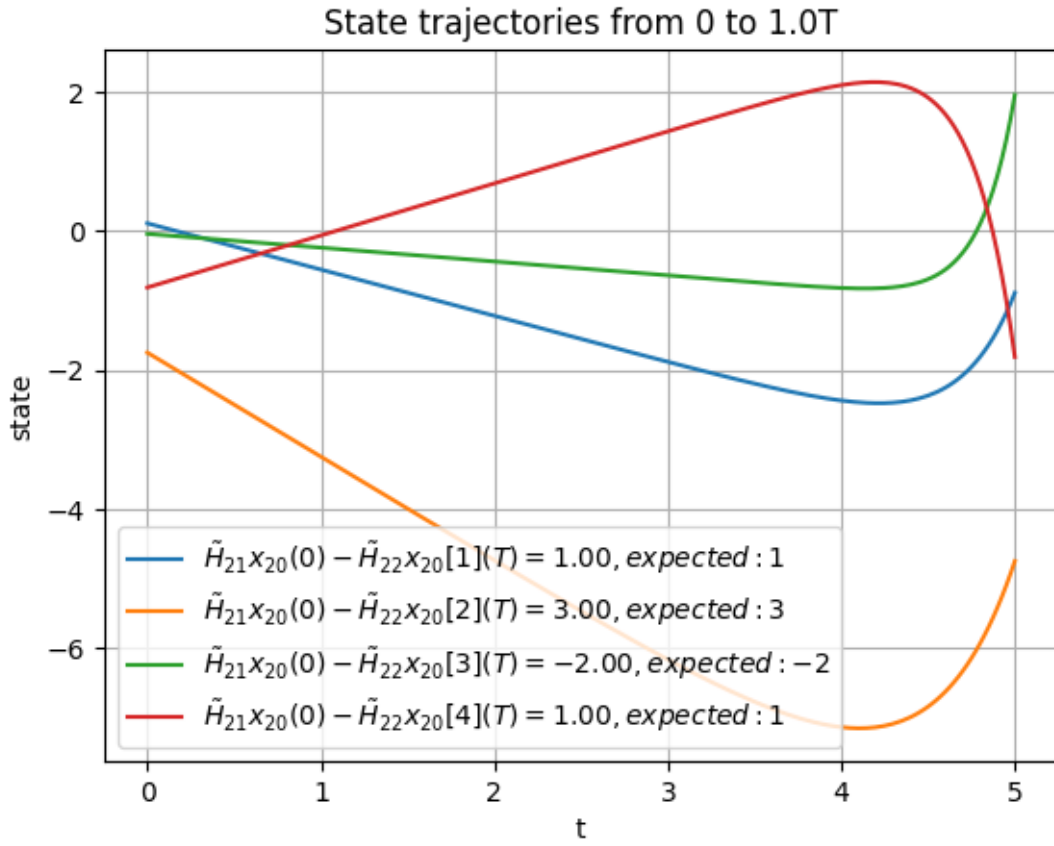
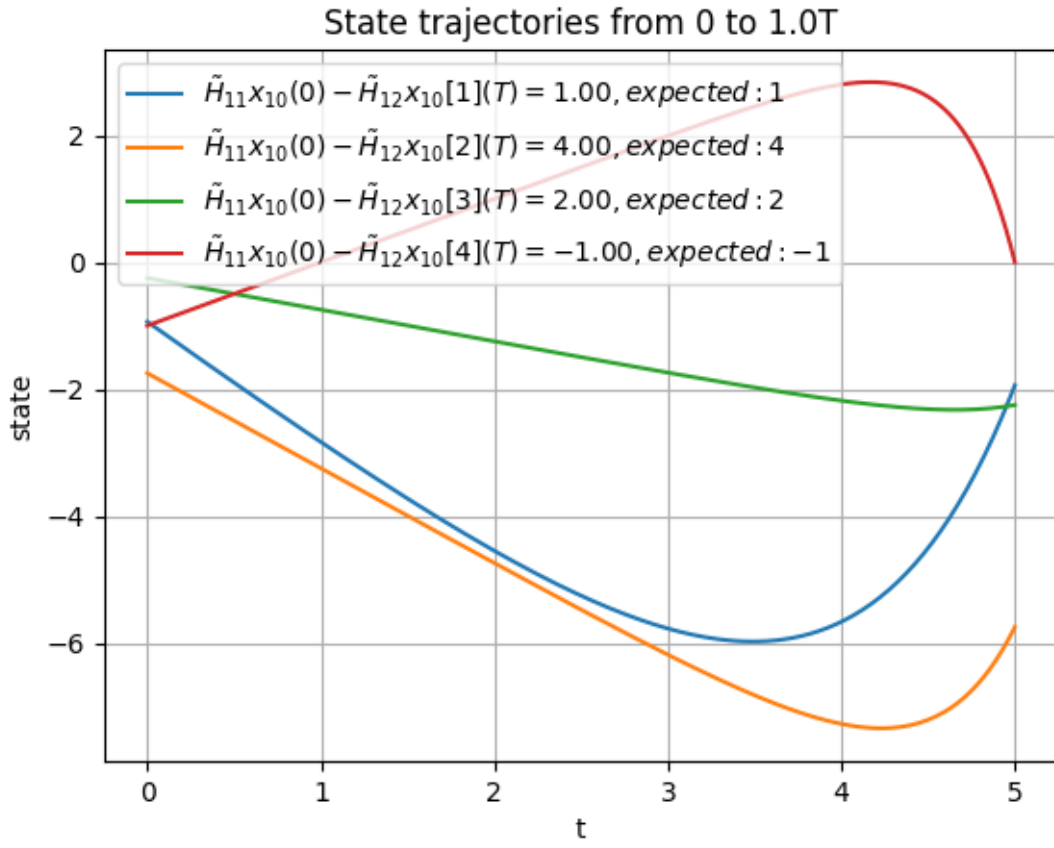


4.2 Афінне керування

Для афінного керування $u_i(t) = u_{it}t + u_{ic}$ спостерігається більш складна динаміка системи, що пов'язано з лінійною залежністю керування від часу.

Отримані траєкторії демонструють вплив часової компоненти керування на поведінку системи.

Отримані результати підтверджують узгодженість аналітичних та чисельних розв'язків та демонструють вплив типу керування на динаміку зв'язаних систем.



4.3 Обчислення матричних інтегралів на основі блокових представлень

У чисельній реалізації ключову складність становить обчислення інтегралів від матричних експонент. Зокрема, інтеграли виду

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (18)$$

та

$$\int_0^T \tau e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (19)$$

не мають простого аналітичного вигляду у загальному випадку та потребують ефективних обчислювальних процедур.

Обчислення інтегралу (18) описано в [1] за допомогою блокових матриць

$$\exp \left[\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \begin{pmatrix} e^{At} & \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Таким чином, інтеграл безпосередньо отримується як верхній правий блок матричної експоненти.

Для обчислення інтегралу (19), який містить додатковий множник τ , використовується розширена блочна система більшого розміру. Розглянемо матрицю

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & I & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Тоді справедлива структура

$$\exp(\mathcal{A}t) = \begin{pmatrix} e^{At} & te^{At} & t \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau - \int_0^t \tau e^{A(t-\tau)} B d\tau \\ 0 & e^{At} & \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (21)$$

Звідси ми можемо знайти $\int_0^t \tau e^{A(t-\tau)} B d\tau$ можемо знайти віднявши від середньої правої частини помноженої на t верхню праву частину

$$\int_0^t \tau e^{A(t-\tau)} B d\tau = t \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau - \left(t \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau - \int_0^t \tau e^{A(t-\tau)} B d\tau \right)$$

Доведемо що $\exp(\mathcal{A}t)$ має саме такий вигляд

Позначимо

$$\exp(\mathcal{A}t) = \begin{pmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \\ 0 & U(t) & V(t) \\ 0 & 0 & W(t) \end{pmatrix},$$

Маємо диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{A} e^{\mathcal{A}t}$$

Перепишемо як

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\mathcal{A}t} &= \begin{pmatrix} A & I & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \\ 0 & U(t) & V(t) \\ 0 & 0 & W(t) \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{dt} e^{\mathcal{A}t} &= \begin{pmatrix} AX(t) & AY(t) + I \cdot U(t) & AZ(t) + I \cdot V(t) \\ 0 & AU(t) & AV(t) + BW(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Оскільки

$$\exp(\mathcal{A} \cdot 0) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

Маємо початкові умови

$$X(0) = U(0) = W(0) = I, \quad Y(0) = Z(0) = V(0) = 0$$

Оскільки елементи $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$ вже встановлені раніше, сфокусуємося на доведенні $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$

Визначимо кожен з елементів матриці

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) \implies X(t) = e^{At}$$

$$Y'(t) = AY(t) + I \cdot U(t) = AY(t) + e^{At}$$

$$Y(t) = te^{At}$$

$$Z'(t) = AZ(t) + I \cdot V(t) = AZ(t) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau$$

Методом варіації сталої визначаємо що

$$Z(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} V(s) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} \int_0^s e^{A(s-\tau)} B d\tau ds$$

Отримуємо подвійний інтеграл

$$Z(t) = \int_0^t \int_0^s e^{A(t-s)} e^{A(s-\tau)} B d\tau ds.$$

Змінимо порядок інтегрування. Область інтегрування

$$0 \leq \tau \leq s \leq t$$

еквівалентна області

$$0 \leq \tau \leq t, \quad \tau \leq s \leq t.$$

Тоді

$$Z(t) = \int_0^t \int_\tau^t e^{A(t-s)} e^{A(s-\tau)} B ds d\tau.$$

Оскільки

$$e^{A(t-s)} e^{A(s-\tau)} = e^{A(t-\tau)},$$

одержимо

$$Z(t) = \int_0^t \int_\tau^t e^{A(t-\tau)} B ds d\tau.$$

Оскільки підінтегральний вираз не залежить від s , внутрішній інтеграл дорівнює

$$\int_{\tau}^t ds = t - \tau.$$

Тому остаточно

$$Z(t) = \int_0^t (t - \tau) e^{A(t-\tau)} B d\tau = t \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau - \int_0^t \tau e^{A(t-\tau)} B d\tau$$

5 Висновки

У роботі було досліджено задачу керування та крайових умов для систем лінійних матричних диференціальних рівнянь типу Сильвестра з малим нелінійним збуренням, що описує взаємодію підсистем.

Розглянуто породжуючу задачу при $\varepsilon = 0$, для якої отримано аналітичний опис розв'язків через матричні експоненти та відповідні інтегральні представлення. На основі цього побудовано загальний вигляд розв'язку та сформульовано крайову задачу у вигляді операторного рівняння.

Отримано умови розв'язності у термінах проєкцій на ядро спряженого оператора, що дозволяє описати множину допустимих керувань та початкових даних через псевдообернені оператори. Показано, що розв'язок має структуру з довільною компонентною в ядрі відповідного оператора, що відображає невизначеність задачі.

Для подальшого аналізу здійснено векторизацію системи та використано добуток Кронекера, що дозволило звести матричну систему до стандартної форми лінійної динамічної системи у просторі $\mathbb{R}^{n^2}$. Це суттєво спростило аналіз структури операторів та чисельну реалізацію.

Окрему увагу приділено нелінійній частині задачі. Показано, що при малих значеннях параметра ε розв'язність вихідної системи зводиться до виконання додаткової функціональної умови, яка обмежує допустимі розв'язки породжуючої задачі. Отримано відповідний функціонал та сформульовано умову його анулювання як достатню умову узгодженості.

У практичній частині реалізовано чисельні методи обчислення матричних інтегралів на основі розширених блокових матриць та експоненти матриці. Побудовано алгоритми для обчислення інтегралів першого та другого моментів, що дозволило ефективно реалізувати отримані аналітичні формули.

Проведено чисельне моделювання, у межах якого досліджено поведінку керувань для різних режимів системи. Отримані результати підтверджують коректність аналітичної побудови та узгодженість чисельної реалізації з теоретичними висновками. Для константного та афінного керування побудовано відповідні траєкторії, які задовольняють крайові умови породжуючої задачі.

Отримані результати демонструють ефективність використаного підходу

для аналізу слабко нелінійних взаємодіючих систем та можуть бути використані як базис для подальшого дослідження задач оптимального керування та стійкості.

А Додаток

Вихідний код, що реалізує чисельні методи, моделювання та побудову графіків, представлено у відкритому репозиторії:

`https://github.com/5misha5/riccati-boundary-problems-control`

Репозиторій містить:

- реалізацію алгоритмів обчислення матричних інтегралів;
- чисельну реалізацію крайової задачі;
- код побудови графіків керувань та траєкторій;
- допоміжні функції для векторизації та роботи з матрицями Кронекера.

Усі обчислювальні експерименти, наведені в роботі, відтворюються за допомогою коду з даного репозиторію.

Література

- [1] C. Van Loan, “Computing integrals involving the matrix exponential,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 23, no. 3, pp. 395–404, 1978.
- [2] O. A. Boichuk and O. O. Pokutnyi, “Normally-resolvable boundary-value problems for the operator-differential equations,” p. 192, 2022.