Презентація на тему:

Моделювання соціальних процесів як марковських процесів прийняття рішень

ПМ-3, Дідик Тимур Валерійович

Марковські випадкові процеси

Випадковий процес називається *марковським процесом* якщо для кожного моменту часу t імовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить тільки від її стану в теперішньому та не залежить від того, як система прийшла в цей стан.

Марковський процес зазвичай задають графом переходів із стану в стан. Вони мають два варіанти: графи з *дискретним* та *неперервним* часом.

$\xi(t), t \geq 0$ називається марковським процесом зі станами $x_1, \dots, x_s$ (число станів S є скінченим $S < \infty, S \geq 2$), якщо $\xi(t)$ приймає значення стану $x_1, \dots, x_s$ $\forall t \geq 0$ $\forall x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ $(\forall n = 3,4, \dots)$ $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$

Марковські випадкові процеси

Марковські процеси можна поділити на класи в залежності від структури множини значень випадкового процесу X та множини часу T. Якщо множина X є дискретною, процес $\xi(t)$ називають *марковським ланцюгом*.

Якщо ж множина часу дискретна, то ми маємо справу з *марковським ланцюгом із дискретним часом*, якщо множина часу неперервна, то процес називається *ланцюгом Маркова з неперервним часом*.

Якщо обидві множини X та T є неперервними, то процес називається *неперервним марковським процесом*.

Класифікація станів ланцюга Маркова з дискретним часом

Стан $i \epsilon X$ ланцюга Маркова називається *несуттєвим*, якщо $\exists\ m, j$:

$$p_{ij}{}^{(m)} > 0, \forall n\ p_{ij}{}^{(n)} = 0$$

Тобто існує такий стан j, в котре можна потрапити з додатною імовірністю, але з котрого неможливо повернутись в i. $p_{ij}{}^{(m)}$ – імовірність переходу ланцюга Маркова із стану i в стан j за m кроків.

Стан j називається *досяжним* із стану i $(i \rightarrow j)$, якщо $\exists n > 0$, що $p_{ij}{}^{(n)} > 0$. Стани j та i називаються *сполучними* $(i \leftrightarrow j)$, якщо j досяжне з i та навпаки.

Класифікація станів ланцюга Маркова з дискретним часом

Множину суттєвих станів можна розбити на скінченне число паралельних множин $X_1, X_2, \ldots$, що складаються зі сполучних станів та характеризуються тим, що переходи між різними множинами неможливі.

Множини $X_1, X_2, \ldots$ називаються *замкненими класами* або *нерозкладними класами* сполучних станів ланцюга Маркова. Марковський ланцюг, який утворює один нерозкладний клас, називається *нерозкладним*.

Марковські випадкові поля

Нехай $\xi = \{\zeta_i | i \epsilon S\}, S = \{1, 2, \dots, N\}$ – багатовимірна випадкова величина, така, що кожна компонента ξ_j , що є одновимірною випадковою величиною, приймає значення x_j та визначена в своєму ймовірнісному просторі. Вважається, що $\forall j \ \xi_j$ є дискретними, визначені в одному ймовірнісному просторі та множина всіх значень зліченна. Введена таким чином величина ξ називається випадковим полем.

Марковські випадкові поля

Конкретна реалізація $X = (x_1, \dots, x_N)$ багатовимірної випадкової величини ξ називається *конфігурацією*.

ξ – *випадкове поле* зі значеннями на множині $A = \{1,2,\dots,a\}, \forall i\ \xi_i \epsilon A$, якщо X – якась конкретна конфігурація ξ, то ζ – множина всіх можливих конфігурацій:

$$\zeta = \{X = (x_1, \dots, x_N) | x_i \epsilon A\ \forall i \epsilon S\}$$

Марковські випадкові поля

Система сусідства – це множина $\partial = \{\partial_i | i \epsilon S\}$, де ∂_i – множина елементів з S, яке називається шаблоном сусідства для елемента i, таке що:

$$\begin{cases} i \notin \partial_i \\ i \in \partial_j \Leftrightarrow j \in \partial_i \end{cases}$$

Випадкове поле ξ називається *марковським випадковим полем* у відповідності до системи сусідства ∂ тоді і тільки тоді, коли $\forall i$:

$$\begin{cases} P(\xi = x) > 0 \; \forall x \epsilon \zeta, \\ P(\xi_i = x_i | \xi_j = x_j, j \epsilon S \backslash \{i\}) = P((\xi_i = x_i | \xi_j = x_j, j \epsilon \partial_i) \end{cases}$$

Марковські випадкові поля

Множина Y називається *клікою* тоді і тільки тоді, коли:

$$Y \subseteq y + \partial y, \forall y \in Y$$

Інакше кажучи, Y називається клікою тоді і тільки тоді, коли воно одноелементне (такі кліки ще називають тривіальними) або якщо кожен елемент Y є сусідом для кожного іншого елемента Y.

Марковські випадкові поля

Дискретний розподіл називається розподілом Гіббса, якщо:

$$P(\xi = x) = \frac{1}{z}\exp(-\sum_{c\epsilon C(\partial)} V_c(x_c))$$

де Z – нормуюча константа, така що:

$$Z = \sum_{x\epsilon\zeta}\exp(-\sum_{c\epsilon C(\partial)} V_c(x_c))$$

Теорема Хаммерслея - Кліфорда: ξ – марковське випадкове поле тоді і тільки тоді, коли $P(\xi = x)$ – розподіл Гіббса.

Марковські процеси в соціології

Математична модель голосування на виборах

1. Модель Мартіна та Мея (1970 рік). Кожен виборець з самого початку має імовірність $\frac{1}{2}$ щоб проголосувати «так», «ні» і т.д. (знаменник збільшується від кількості варіантів проголосувати), зовнішнє поле відсутнє. Потім відносна імовірність того, що виборець проголосує «так», може стрімко зрости за рахунок фактору $e^{D/2}$ для кожного сусіда нашого виборця, який проголосував «так». Але відносна імовірність того, що виборець проголосує «так», може і впасти за рахунок іншого фактору $e^{-D/2}$, який дійсний для кожного сусіда, який проголосував «ні».

Марковські процеси в соціології

2. Модель Смуклера (1971 рік). Ця модель є динамічною. Уявимо, що ми маємо деяку взаємодію у часі t. В часі $t + 1$ ми обираємо випадкового виборця. Він буде мати таку саму думку, як і більшість його сусідів (включаючи самого виборця), у момент часу t з імовірністю $1 - x$, де $0 \leq x \leq 1$.

Марковські процеси в соціолгії

3. Модель Кіндермана (1973 рік). Модель, в якій у момент часу $t + 1$ кожен виборець проголосує «так» з імовірністю

$$\frac{m^a}{m^a + m^b}$$

де m – це константа, a – число сусідів виборця, котрі проголосували «так» у час t, а b – число сусідів, що проголосували «ні».