КОНСТРУКЦІЯ ЗНАКОВОГО РЕБЕРНОГО ГРАФА

Б.-Я.В. ДЕХТЯР, С.О. КОЗЕРЕНКО

Для орграфа $D = (V(D), A(D))$, його реберним орграфом [1] називається орграф $L(D)$ із множиною вершин $V(L(D)) = A(D)$ і множиною дуг $A(L(D)) = \{(\alpha, \beta) : h(\alpha) = t(\beta)\}$ (тут для дуги $\alpha = (u, v)$ ми позначаємо $h(\alpha) = v$ і $t(\alpha) = v$). Таким чином, вершинами реберного орграфа є дуги D, а дугами – пари дуг, які йдуть "одна в одну". Схожим чином визначається й реберний граф $L(G)$ для неорієнтованих графів G. Виявляється, що на неорієнтованих графах графовий оператор L майже ін'єктивний [2]. А саме, має місце відома теорема Вітні: маючи реберний граф, ми можемо однозначно відновити початковий граф (із точністю до ізоморфізму), за винятком пари графів K_3, $K_{1,3}$. З іншого боку, реберний оператор L на орієнтованих графах не має такої властивости.

У цій роботі ми введемо нову конструкцію, яка разом із реберним орграфом дозволить однозначно відновити початковий орграф. Спочатку нам знадобиться поняття знакового графа. Для графа G знаковою функцією називається довільне відображення вигляду $s : E(G) \to \{+, -\}$, що переводить ребра G у знаки $+$ та $-$. Знаковий граф – це пара (G, s), де s є знаковою функцією на G.

Маючи орграф D, назвемо його знаковим реберним графом $Cs(D)$ впорядковану пару (G, s), де G – це неорієнтований граф із множиною вершин $V(G) = A(D)$ і множиною ребер $E(G) = \{\alpha\beta : h(\alpha) = h(\beta)$ або $t(\alpha) = t(\beta)\}$, а знакова функція $s : E(G) \to \{+, -\}$ діє за правилом: $s(\alpha\beta) = +$, якщо $h(\alpha) = h(\beta)$. Таким чином, вершинами знакового графа $Cs(D)$ є дуги D, його ребра відповідають парам дуг зі спільним початком чи спільним кінцем; s же є знакова функція на G така, що ребро $\alpha\beta$ є позитивним, якщо кінці цих дуг співпадають (і негативним, якщо дуги мають однаковий початок).

Правильним розфарбуванням на вершинах графа називатимемо таке розфарбування його вершин у два кольори, за якого кожній парі суміжних вершин приписуються різні кольори. Графом клік $K(G)$ називається граф перетинів множин вершин усіх клік (максимальних повних підграфів) у графі G. Перший наш результат є характеризація знакового реберного графа.

Теорема 1. *Нехай G є неорієнтований граф, а $s : E(G) \to \{+, -\}$ є знакова функція на ребрах G. Тоді $(G, s) = Cs(D)$ для деякого орграфа D тоді й тільки тоді, коли:*

(1) *кожна кліка G містить ребра одного знаку;*
(2) *s породжує правильне розфарбування на вершинах $K(G)$.*

Зауважимо, що наведена теорема має такий наслідок: якщо для графа G існують знакова функція s та орграф D такі, що $(G, s) = Cs(D)$, то G є реберний граф двочасткового графа.

Нехай L є реберний орграф, $Cs = (G, s)$ є знаковий реберний граф (граф, що задоволяє умови теореми 1) і $|V(L)| = |V(G)|$. Тоді бієкція $\phi : V(L) \to V(G)$ називається допустимою, якщо існує орграф D, для якого виконуються наступні умови:

- $L(D) \simeq L$; назвемо відповідний ізоморфізм $\psi_L : V(L(D)) \to V(L)$.
- $Cs(D) \simeq Cs$; назвемо відповідний ізоморфізм $\psi_{Cs} : V(G) \to V(Cs)$.
- $\phi \circ \psi_L = \psi_{Cs}$.

Зауважимо, що області визначення функцій $\phi \circ \psi_L$ та ψ_{Cs} однакові й дорівнюють $A(D) = V(L(D)) = V(G)$.

Теорема 2. *Для реберного орграфа L і знакового реберного графа $Cs = (G, s)$ бієкція $\phi : V(L) \to V(G)$ є допустимою тоді й тільки тоді, коли:*

- *для всіх $u \in V(L)$: $\phi(N_L^+(u))$ є негативна кліка в Cs, а $\phi(N_L^-(u))$ є позитивна кліка;*
- *Якщо K є позитивна (негативна) кліка в Cs, то для всіх $u, v \in \phi^{-1}(V(K))$ виконано $N_L^+(u) = N_L^+(v)$ $(N_L^-(u) = N_L^-(v))$.*

Твердження 1. *Нехай L є реберний орграф, $Cs = (G, s)$ є знаковий реберний граф, а $\phi : V(L) \to V(G)$ є допустима бієкція між ними. Тоді існує єдиний орграф D із $L \simeq L(D)$ та $Cs \simeq Cs(D)$.*

Література

[1] F. Harary and R. Z. Norman, *Some properties of line digraphs* // Rend. Circ. Mat. Palermo **9** (1960), 161–168.

[2] H. Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs* // Amer. J. Math. **54(1)** (1932), 150–168.

Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна
Email address: b.dekhtiar@ukma.edu.ua

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Інститут математики НАН України
Київська школа економіки, Київ, Україна
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net