УДК 512.56+512.64

Костишин Е. М., Тертична О. М.

СИЛЬНО НЕРОЗКЛАДНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НАПІВГРУП

У статті вказано кількість абсолютно нерозкладних та сильно нерозкладних матричних зображень прямого добутку симетричних напівгруп другого ступеня над полем характеристики $p \neq 2$ та отримано повний їх опис.

Ключові слова: симетрична напівгрупа, матриця, абсолютно нерозкладне зображення, сильно нерозкладне зображення.

Вступ

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не такою мірою, як матричні зображення скінченних груп. Оскільки скінченна напівгрупа ізоморфна до деякої піднапівгрупи скінченної симетричної напівгрупи (напівгрупи всіх відображень скінченної множини в себе), то зрозуміло, що вивчення симетричних напівгруп є важливим не лише з точки зору самих напівгруп, а й з точки зору їх матричних зображень. Матричні зображення (а точніше, відповідні до них модулі) симетричних напівгруп над полем вивчалися у [2; 3]. Зокрема, в першій з них описано зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини з двох елементів над полем характеристики $p \neq 2$ (матричні зображення напівгрупи T_2 над полем характеристики 2 описано в [1]).

У цій статті вивчаються матричні зображення прямих добутків $T_2 \times T_2 \times \ldots \times T_2$ над полем k, яке тут вважається таким, що має характеристику $p \neq 2$.

Автори щиро вдячні професорові В. М. Бондаренку за детальне обговорення задачі та цінні поради.

Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2

Нехай T_2 — напівгрупа всіх перетворень множини $\{1, 2\}$ (яку називають симетричною напівгрупою ступеня 2). Вона складається з чотирьох елементів e, a, b, c:

$$e(1) = 1, e(2) = 2;\ a(1) = 2,\ a(2) = 1;$$

$$b(1) = 2,\ b(2) = 2;\ c(1) = 1,\ c(2) = 1.$$

Візьмемо за твірні елементи напівгрупи T_2 елементи e, a, b (це система твірних, бо $c = ba$). Оскільки

$$a^2 = e,\ b^2 = b,\ ab = b,\ ba = c,\ c^2 = c,$$

$$ac = c,\ bc = c,\ ca = b,\ cb = b,$$

то легко побачити (після підстановки ba замість c), що для твірних e, a, b визначальними є такі співвідношення:

1) $e^2 = e,\ ea = ae = a,\ eb = be = b;$

2) $a^2 = e,\ b^2 = b;$

3) $ab = b.$

Матричне зображення порядку n напівгрупи T_2 над полем k — це (згідно з загальним визначенням матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм $S : T_2 \to M_n(k)$ напівгрупи T_2 у напівгрупу $M_n(k)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем k. Зауважимо, що згідно з загальним визначення не передбачається, що ідемпотентна матриця $S(e)$ є одиничною (хоча, коли є бажання, можна так вважати, «втративши» при цьому всього лише одне нерозкладне зображення, яке має порядок 1 і кожному елементу напівгрупи співставляє нульову матрицю). Матричне зображення $S : T_2 \to M_n(k)$ однозначно задається трійкою матриць

$$R(S) = \{E = S(e), A = S(a), B = S(b)\},$$

які задовольняють такі рівності:

$$E^2 = E,\ EA = AE = A,\ EB = BE = B,$$

$$A^2 = E,\ B^2 = B,\ AB = B.$$

Ми будемо надалі ототожнювати матричне зображення S з відповідною йому трійкою матриць $R = R(S)$.

Скінченновимірні нерозкладні модулі над напівгруповою алгеброю kT_2 описано (з точністю до ізоморфізму) в [2]. Переформулюємо цей результат мовою матричних зображень самої напівгрупи T_2.

Теорема 1. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем k (характеристики $p \neq 2$) вичерпуються, з точністю до еквівалентності, такими зображеннями:*

0) $\quad e \to 0, \quad a \to 0, \quad b \to 0;$

1) $e \to 1, \quad a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $e \to 1, \quad a \to -1, \quad b \to 0;$

3) $e \to 1, \quad a \to 1, \quad b \to 1;$

4)
$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вказані в теоремі нерозкладні зображення позначатимемо відповідно через R_0, R_1, R_2, R_3, R_4.

Абсолютно нерозкладні матричні зображення напівгрупи $T(m)$

Напівгрупу

$$T_2^m = T_2^{(1)} \times T_2^{(2)} \times \ldots \times T_2^{(m)},$$

де $T_2^{(1)} = T_2^{(2)} = \ldots = T_2^{(m)} = T_2$, позначатимемо через $T(m)$ (m — натуральне число). Твірні виду e, a, b напівгрупи $T_2^{(i)}$ позначатимемо через $e^{(i)}, a^{(i)}, b^{(i)}$.

Матричне зображення порядку n напівгрупи $T(m)$ над полем k — це гомоморфізм $S : T(m) \to M_n(k)$ напівгрупи $T(m)$ у напівгрупу $M_n(k)$ (усіх квадратних матриць порядку n над полем k). Воно однозначно задається набором матриць

$$R(S) = \{E^{(i)} = S(e^{(i)}),\ A^{(i)} = S(a^{(i)}),$$
$$B^{(i)} = S(b^{(i)}) \mid i = 1, \ldots, m\},$$

які задовольняють такі рівності:

$$(E^{(i)})^2 = E^{(i)},\ E^{(i)}A^{(i)} = A^{(i)}E^{(i)} = A^{(i)},$$
$$E^{(i)}B^{(i)} = B^{(i)}E^{(i)} = B^{(i)},$$
$$(A^{(i)})^2 = E^{(i)},\ (B^{(i)})^2 = B^{(i)},\ A^{(i)}B^{(i)} = B^{(i)},$$
$$E^{(i)}E^{(j)} = E^{(j)}E^{(i)},\ E^{(i)}A^{(j)} = A^{(j)}E^{(i)}$$
$$E^{(i)}B^{(j)} = B^{(j)}E^{(i)},\ A^{(i)}B^{(j)} = B^{(j)}A^{(i)},$$

де $1 \le i, j \le m$, $i < j$. Надалі ототожнюватимемо матричне зображення S з відповідним йому набором матриць $R = R(S)$.

Обмеження матричного зображення R напівгрупи $T(m)$ на співмножник $T_2^{(i)}$ позначатимемо через $R^{(i)}$.

Матричне зображення напівгрупи $T(m)$ над полем k називається абсолютно нерозкладним, якщо його обмеження на кожну напівгрупу $T_2^{(i)}$ є нерозкладним, і сильно нерозкладним, якщо його обмеження хоча б на одну напівгрупу $T_2^{(i)}$ є нерозкладним (ці поняття запропонував В. М. Бондаренко).

У цьому параграфі опишемо всі абсолютно нерозкладні зображення напівгрупи $T(m)$ та підрахуємо їх кількість. Випадок сильно нерозкладних зображень буде розглянуто у наступному параграфі.

Теорема 2. *Довільне абсолютно нерозкладне матричне зображення R напівгрупи $T(m)$ над полем k має такий вигляд:*

$$R^{(1)} = R_{p_1}, R^{(2)} = R_{p_2}, \ldots, R^{(m)} = R_{p_m},$$

де $0 \le p_1, p_2, \ldots, p_m \le 3$ (зображення R існує для довільних $p_1, p_2, \ldots, p_m$).

Наслідок 1. *Усі абсолютно нерозкладні зображення напівгрупи $T(m)$ над полем k є незвідними порядку* 1.

Зауважимо, що обернене твердження очевидне.

Наслідок 2. *Кількість абсолютно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ над полем k (та кількість їх класів еквівалентності) дорівнює 4^m.*

Для доведення теореми 2 нам знадобиться така лема.

Лема 1. *Нехай A та B — матриці виду*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а Y — така матриця, що

a) $AY = YA$,

b) $BY = YB$.

Тоді матриця Y є скалярною.

Доведення. Матриця Y має, очевидно, розмір 2×2:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки в матрицях AY та YA на місці $(1, 2)$ стоять відповідно елементи y_{12} та $-y_{12}$, а на місці $(2, 1)$ — елементи $-y_{21}$ та y_{21}, то $y_{12} = 0$ і $y_{21} = 0$ (бо характеристика поля k не дорівнює двом). Далі, в матрицях BY та YB на місці $(1, 2)$ стоять відповідно елементи $y_{12} + y_{22}$ та y_{11}, а оскільки $y_{12} = 0$, то маємо $y_{22} = y_{11}$. Отже, матриця Y скалярна.

Переходимо тепер безпосередньо до доведення теореми 2.

Для $m = 1$ теорема випливає із теореми 1. Вважатимемо, що $m > 1$.

Усі вказані в умові теореми матричні зображення є одновимірними, а тому й абсолютно нерозкладними. При цьому очевидно, що ними вичерпуються усі одновимірні зображення напівгрупи $T(m)$.

Покажемо, що інших абсолютно нерозкладних зображень немає, а це й доведе теорему. Припустімо супротивне. Нехай R — деяке абсолютно нерозкладне зображення порядку $n > 1$. Із теореми 1 і визначення абсолютно нерозкладних зображень випливає, що зображення R двовимірне, а обмеження $R^{(1)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(1)}$ еквівалентне зображенню R_4. Без обмеження загальності можна вважати, що $R^{(1)} = R_4$ (оскільки зображення R можна замінити довільним еквівалентним йому зображенням). Покладемо

$$A^{(1)} = R(a^{(1)}), \;\; B^{(1)} = R(b^{(1)}),$$

$$A^{(2)} = R(a^{(2)}), \;\; B^{(2)} = R(b^{(2)}).$$

Оскільки в напівгрупі $T(m)$ елементи піднапівгруп $T_2^{(1)}$ та $T_2^{(2)}$ попарно комутують, то

$$A^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}A^{(1)},$$

$$B^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}B^{(1)},$$

$$A^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}A^{(1)},$$

$$B^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}B^{(1)}.$$

Отже, якщо покласти $A = A^{(1)}$, $B = B^{(1)}$ та $Y = A^{(2)}$ (відповідно $Y = B^{(2)}$), то із твердження леми 1 маємо, що матриця $A^{(2)}$ (відповідно $B^{(2)}$) є скалярною, а звідси обмеження $R^{(2)}$ зображення R на піднапівгрупу $T_2^{(2)}$ є розкладним зображенням, що суперечить абсолютній нерозкладності зображення R.

Теорему 2 доведено.

Сильно нерозкладні матричні зображення напівгрупи $T(m)$

Нагадаємо, що k позначає довільне поле характеристики $p \neq 2$.

У цьому параграфі ми доведемо таку теорему.

Теорема 3. *Сильно нерозкладні матричні зображення напівгрупи $T(m)$ над полем k вичерпуються (з точністю до еквівалентності) такими зображеннями R:*

I) $R^{(1)} = R_{p_1}$, $R^{(2)} = R_{p_2}, \dots, R^{(m)} = R_{p_m}$, *де* $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_m \leq 3$*;*

II) $R^{(s)} = R_4$ *для деякого* $1 \leq s \leq m$ *і* $R^{(i)} = R_{p_i} \oplus R_{p_i}$ *для всіх* $i \neq s$, *де* $0 \leq p_1, \dots, p_{s-1}, p_{s+1} \dots, p_m \leq 3$.

При цьому усі вказані матричні зображення попарно нееквівалентні.

Доведення. Нехай R — сильно нерозкладне зображення напівгрупи $T(m)$. Із теореми 1 і визначення сильно нерозкладних зображень випливає, що зображення R одновимірне або двовимірне. Якщо R одновимірне, то воно абсолютно нерозкладне і згідно з результатами попереднього параграфа маємо випадок I).

Нехай тепер R двовимірне. Покажемо, що в цьому випадку зображення R еквівалентне одному із зображень, вказаних у II). Випадок $m = 1$ випливає із теореми 1. Якщо ж $m > 1$, то (знову ж таки згідно з визначенням сильно нерозкладних зображень) обмеження $R^{(s)}$ зображення R на деяку напівгрупу $T_2^{(s)}$ еквівалентне зображенню R_4. Можна вважати, що $R^{(s)} = R_4$ (інакше замінимо R на еквівалентне йому зображення, обмеження якого на $T_2^{(s)}$ дорівнює R_4). Оскільки довільний елемент $z \in T(m) \setminus T_2^{(s)}$ комутує з довільним елементом $y \in T_2^{(s)}$, то комутують і відповідні їм матриці R_z і R_y зображення R, а отже, за лемою 1 для $A = R(a^{(s)})$, $B = R(b^{(s)})$ і $Y = R_z$ маємо, що матриця R_z є скалярною. І, таким чином, маємо випадок II).

Легко побачити, що всі вказані в I) та II) матричні зображення попарно нееквівалентні.

Теорему доведено.

Наслідок 3. *Кількість класів еквівалентності сильно нерозкладних матричних зображень напівгрупи $T(m)$ над полем k, що не є абсолютно нерозкладними, дорівнює $m4^{m-1}$.*

Наслідок 4. *Кількість класів еквівалентності всіх сильно нерозкладних матричних зображень напівгрупи $T(m)$ над полем k дорівнює $4^m + m4^{m-1} = (m+4)4^{m-1}$.*

Обчислимо тепер кількість сильно нерозкладних зображень напівгрупи $T(m)$ над полем k (як із урахуванням абсолютно нерозкладних зображень, так і без них); на відміну від випадку абсолютно нерозкладних зображень (див. попередній параграф) ця кількість відрізняється, очевидно, від кількості класів еквівалентності сильно нерозкладних зображень (яка вказана у наслідках 3 і 4). Оскільки вона є нескінченною для нескінченного поля, то основним при цьому є випадок, коли поле k скінченне.

Теорема 4. *Нехай k — скінченне поле із p^n елементів, $p \neq 2$.*

1) *Кількість усіх сильно нерозкладних матричних зображень напівгрупи $T(m)$ над полем k, що не є абсолютно нерозкладними, дорівнює $mp^n(p^{2n}-1)4^{m-1}$.*

2) *Кількість усіх сильно нерозкладних матричних зображень напівгрупи $T(m)$ над полем k дорівнює $mp^n(p^{2n}-1)4^{m-1} + 4^m$.*

Твердження 2 випливає із твердження 1 (з урахуванням наслідку 2), а твердження 1, у свою чергу, випливає вочевидь із теореми 3 та наступної леми (для поля k, вказаного в умові теореми 4).

Лема 2. *Кількість усіх нерозкладних матричних зображень порядку* 2 *напівгрупи* $T(1) = T_2$ *над полем* k *дорівнює* $p^n(p^{2n} - 1)$.

Доведення. Із теореми 1 маємо, що будь-яке зображення порядку 2 напівгрупи T_2 задається трійкою матриць E_2, $CR_4(a)C^{-1}$, $CR_4(b)C^{-1}$. Два таких зображення, побудовані для оборотних матриць C та D, є, очевидно, рівними тоді і лише тоді, коли матриця CD^{-1} комутує з матрицями $R_4(a)$ та $R_4(b)$. За лемою 1 це означає, що матриця CD^{-1} скалярна. Отже, кількість усіх нерозкладних матричних зображень порядку 2 напівгрупи T_2 над полем k дорівнює кількості оборотних матриць порядку 2 над полем із $q = p^n$ елементів ($p \neq 2$), поділеній на кількість скалярних оборотних матриць (над тим самим полем). Перше із вказаних чисел дорівнює добутку числа $q^2 - 1$ (кількість ненульових перших рядків матриці) на число $q^2 - q$ (кількість других рядків матриці, що не є кратними фіксованому першому рядку), а друге із вказаних чисел дорівнює $q - 1$. Отже, шукана кількість дорівнює $(q^2 - 1)(q^2 - q)/(q - 1) = q(q^2 - 1)$, що і треба було довести.

Висновки

Отже, ми довели, що абсолютно нерозкладні матричні зображення прямих добутків симетричних напівгруп другого ступеня над полем характеристики $p \neq 2$ є одновимірними, а їх сильно нерозкладні зображення, що не є абсолютно нерозкладними, — є двовимірними. Ми описали ці зображення та вказали їх кількість.

Список літератури

1. Бондаренко В. М. Модулярні зображення напівгрупи T_2 / В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. — 2011. — Вип. 22. — С. 26–34.
2. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа / И. С. Понизовский // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1987. — Vol. 160. — С. 229–238.
3. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 / Ringel C. // Semigroup Forum. — 2000. — № 3. — P. 429–434.

E. Kostyshyn, O. Tertychna

STRONGLY INDECOMPOSABLE MATRIX REPRESENTATIONS FOR ONE CLASS OF FINITE SEMIGROUPS

It is calculated the number of absolutely indecomposable and strongly indecomposable matrix representations of a direct product of symmetric semigroups of degree two over a field of characteristic p $\neq 2$, and all such representations are decsribed.

Keywords: symmetric semigroup, matrix, absolutely indecomposable representation, strongly indecomposable representation.

Матеріал надійшов 02.02.2013