

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота

освітній ступінь — магістр

на тему: **«КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ Т-ДЕРЕВ
КОКСЕТЕРА ВІДНОСНО ЗНАЧЕННЯ ІНДЕКСУ»**

Виконала: студентка 2-го року
навчання,

Спеціальності

113 Прикладна математика

Семенко Єліна Олександрівна

Керівник Тимошкевич Л. М.

кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена

з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

“ ____ ” _____ 2025 р.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук

_____ *Чорней Р.К.*
(підпис)

“ _____ ” _____ 2025 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для дипломної роботи

студентці 2-го року навчання, факультету інформатики

Семенко Еліні Олександрівні

Тема: «Класифікація злічених T-дерев Коксетера відносно значення індексу»

Зміст роботи:

1. Анотація
2. Вступ
3. Основні теоретичні відомості
4. Індокси злічених графів Коксетера
5. Класифікація обраних класів злічених графів Коксетера
6. Висновки
7. Список використаних джерел
8. Додатки

Дата видачі “ _____ ” _____ 2025 р. Науковий керівник _____
(підпис)

Завдання отримала _____
(підпис)

Календарний план виконання дипломної роботи

План узгоджено “_____” _____ 2025 р.

№ п/п	Етап виконання роботи	Термін виконання етапу	Примітка	Підпис наукового керівника
1.	Узгодження теми дипломної роботи	10.10.2024		
2.	Розробка плану та структури роботи	19.11.2024		
3.	Ознайомлення з науковою літературою, визначення ключових понять та означень	01.12.2024		
4.	Аналіз існуючих наукових підходів та отриманих результатів за темою	15.02.2025		
5.	Дослідження значень індексів обраних класів графів	11.03.2025		
6.	Робота над текстовим оформленням результатів	15.04.2025		
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи	29.05.2025		

Науковий керівник *Тимошкевич Л. М.* _____
(підпис)

Студентка *Семенко Е. О.* _____
(підпис)

Зміст

Анотація	4
Вступ	5
1 Основні теоретичні відомості	7
1.1 Основні означення	7
1.2 Графи Коксетера	8
1.3 Операції на злічених графах Коксетера	13
1.4 Характеристичні многочлени деяких класів графів Коксетера .	14
2 Індeksi злічених графів Коксетера	18
2.1 Твердження про індекс злічених графів	18
2.2 Формули Швенка для зважених графів	19
2.3 Індeksi графів, що складаються зі скінченного графа та нескін- ченного ланцюга	20
3 Класифікація обраних класів злічених графів Коксетера	22
3.1 Твердження про класифікацію графів Коксетера $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$	22
3.2 Твердження про класифікацію графів Коксетера $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$	26
3.3 Твердження про класифікацію T-дерев Коксетера з позначкою 4 на нескінченному ланцюгу	27
3.4 Теорема про класифікацію злічених T-дерев Коксетера зі зна- ченням індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$	28
Висновки	36
Список використаних джерел	37
Додатки	39
Додаток А. Наукова публікація (тези доповіді)	39

Анотація

У даній роботі досліджується спектральна теорія зліченних графів Коксетера, зокрема, значення індексів окремих їхніх класів. Розглянуто графи Коксетера з підпорядкованими Т-деревами. Проведено огляд літературних джерел, проаналізовано методи обчислення індексів таких графів. Досліджено значення індексів деяких класів зліченних графів Коксетера, а саме $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$, $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$ та Т-дерев Коксетера з позначкою 4 на нескінченному ланцюгу, а також сформульовано та доведено теорему про повну класифікацію графів Коксетера з підпорядкованими Т-деревами зі значенням індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

Ключові слова: спектральна теорія графів, графи Коксетера, індекс графа, Т-дерева, класифікація графів, матриця суміжності.

This thesis explores the spectral theory of infinite countable Coxeter graphs, focusing on the index values of selected classes, specifically Coxeter T-trees. Methods of index computation are reviewed in order to support the spectral analysis of the considered graph classes. The index values of certain classes of countable Coxeter graphs are assessed, including $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$, $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$, and Coxeter T-trees with label 4 on an infinite path. Theorem on the complete classification of Coxeter T-trees indices of which lie within the interval $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$ is presented and proved.

Keywords: spectral graph theory, Coxeter graphs, graph index, T-trees, graph classification, adjacency matrix.

Вступ

Актуальність. Теорія графів є одним з основних напрямів дискретної математики, що широко застосовується в задачах передачі інформації [1], оптимізації та моделювання мереж [2, 3]. Спектральна теорія графів, у межах якої досліджується зв'язок між структурою графа та властивостями асоційованих з ним матриць (зокрема, матриці суміжності), знаходить застосування як у теоретичних дослідженнях, так і в прикладних задачах [4]. Аналіз спектральних характеристик дозволяє отримувати інформацію про топологію графа; значення індексу графа істотно обмежує його можливу структуру — для деяких значень існують повні класифікації відповідних графів [5, 6, 7].

Графи Коксетера становлять окремий клас графів, тісно пов'язаний із теорією представлень. Вони відіграють важливу роль в описі та дослідженні груп Коксетера, напівпростих алгебр Лі та груп породжених відбиттям [8, 9, 10]. Графи Коксетера вивчаються не лише як представлення математичних об'єктів, а й як самостійні структури [11, 12]. Актуальність їх дослідження зумовлена специфічними спектральними властивостями цих графів, які дозволяють розширити існуючі класифікаційні підходи в спектральній теорії та поглибити розуміння зв'язку між структурою графа й характеристиками його спектра.

Об'єкт. Об'єктом дослідження є спектральна теорія злічених графів Коксетера.

Предмет. Предметом дослідження є індекси злічених графів Коксетера.

Мета. Метою даної роботи є дослідження значень індексів обраних класів графів Коксетера, формулювання та доведення теореми про повну класифікацію графів Коксетера з підпорядкованими T-деревами зі значенням індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

Наукове завдання. Мета роботи зумовила наступне наукове завдання:

1. Аналіз літератури зі спектральної теорії графів Коксетера;
2. Дослідження методів знаходження індексів графів Коксетера;
3. Дослідження значень індексів обраних класів графів Коксетера та формулювання класифікаційної теореми для T-дерев Коксетера.

Наукова новизна. Наукова новизна даної роботи полягає в дослідженні індексів окремих класів графів та доведенні теореми про їх класифікацію за значенням індексу. Отримані результати розширюють наявні в літературі відомості про зв'язок між структурою графа та його спектром.

Практичне значення. Практичне значення даної роботи полягає в перспективах застосування отриманих результатів у подальших дослідженнях спектральної теорії графів, класифікаційних задачах алгебри та теорії представлень.

Метод. У роботі використано методи спектральної теорії графів. Застосовано структурно-аналітичний підхід до оцінки значень індексів графів Коксетера та методи класифікації графів на основі їхніх спектральних властивостей.

Апробація. Отримані в роботі результати було представлено на XIII Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків (Додаток А) та опубліковано в збірці тез конференції [13].

Структура роботи. Робота складається з трьох розділів:

Перший розділ присвячено висвітленню основних теоретичних відомостей. Наведено основні означення теорії графів та спектральної теорії графів.

Другий розділ присвячено огляду основних теорем та тверджень, що використовуються при дослідженні значень індексів злічених графів Коксетера.

Третій розділ присвячений дослідженню значень індексів обраних класів графів Коксетера та класифікації T-дерев Коксетера зі значенням індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

1 Основні теоретичні відомості

У даному розділі викладено основні поняття та означення теорії графів, необхідні для формального опису графів Коксетера та дослідження їхніх спектральних характеристик. Визначено графи Коксетера, їхню матрицю суміжності та її властивості. Розглянуто узагальнення цих конструкцій для злічених графів. Надано також означення T -графа — окремого класу злічених графів Коксетера, класифікацію якого за значенням індексу здійснено у наступних розділах цієї роботи.

1.1 Основні означення

Означення 1.1. *Граф* — це впорядкована пара множин $G = (V, E)$, де

- $V \neq \emptyset$ — скінченна непорожня множина вершин графа G ;
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ — підмножина множини всіх неупорядкованих пар різних елементів множини вершин V , відома як множина ребер графа G .

Означення 1.2. Дві вершини $u, v \in V$ графа $G = (V, E)$ називаються *суміжними*, якщо між ними існує ребро: $\{u, v\} \in E$.

Означення 1.3. Вершина $v \in V$ і ребро $e \in E$ графа $G = (V, E)$ називаються *інцидентними*, якщо вершина v є одним з кінців цього ребра. Відповідно, якщо $e = \{u, v\}$, $u, v \in V$, то вершини u і v інцидентні ребру e .

Зауваження 1.1. Ребро e , інцидентне вершинам u та v будемо позначати: $e = (u, v)$.

Означення 1.4. *Степінь вершини* $v \in V$ графа $G = (V, E)$ визначається як потужність множини ребер, інцидентних цій вершині і позначається як $\deg(v)$.

Означення 1.5. Вершина $v \in V$ графа $G = (V, E)$ називається *ізолюваною*, якщо її степінь дорівнює нулю: $\deg(v) = 0$.

Означення 1.6. Вершина $v \in V$ графа $G = (V, E)$ називається *висячою* (або *листом*), якщо її степінь дорівнює одиниці: $\deg(v) = 1$.

Означення 1.7. *Максимальним степенем графа* $G = (V, E)$ називається найбільше значення степеня серед усіх вершин графа:

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\}.$$

Означення 1.8. *Мінімальним степенем графа* $G = (V, E)$ називається найменше значення степеня серед усіх вершин графа:

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\}.$$

Означення 1.9. *Порядком графа* $G = (V, E)$ називається кількість вершин у графі: $|V|$.

Означення 1.10. *Підграфом графа* $G = (V, E)$ є граф, усі вершини якого належать до множини вершин $V(G)$ і всі ребра якого належать до множини ребер $E(G)$.

1.2 Графи Коксетера

Означення 1.11. *Граф Коксетера* — це позначений неорієнтований граф $G = (V, E, f)$, де

- $V \neq \emptyset$ — непорожня множина вершин;
- $E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ — множина ребер;
- f — позначальна функція:

$$f: E(G) \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\} \cup \{\infty\}.$$

Граф Коксетера \mathbf{G} також визначається як пара (G, f) , де $G = (V, E)$ — це підпорядкований граф, f — позначальна функція.

Зауваження 1.2. Граф Коксетера $\mathbf{G} = (G, f)$ подається як зображення підпорядкованого неорієнтованого графа $G = (V, E)$, в якому кожному ребру e поставлена у відповідність позначка $f(e)$.

- Ребра з позначкою 3 є *непозначеними* і ця позначка не вказується на зображенні.
- Ребра з позначкою ≥ 4 називаються *позначеними* і їхня позначка вказується на зображенні.

Означення 1.12. Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ — граф Коксетера. Граф $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ вважається підграфом графа \mathbf{G} , якщо G_1 підграф G , і для будь-якого ребра e графа G_1 виконується нерівність: $f_1(e) \leq f(e)$.

Позначається як $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}$.

Означення 1.13. Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ — граф Коксетера з порядком $n = |\mathbf{G}|$. *Матриця суміжності* графа Коксетера $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — це квадратна $n \times n$ матриця, де елементи a_{ij} визначаються наступним чином:

- $a_{ij} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$, якщо $f(i, j) = k$, де $k \geq 3$ — мітка ребра між вершинами i і j ;
- $a_{ij} = 2$, якщо $f(i, j) = \infty$;
- $a_{ij} = 0$, якщо вершини i і j не з'єднані ребром.

Властивості матриці суміжності

Симетричність. Матриця $A(\mathbf{G})$ завжди симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх i і j , адже ребро та відповідно значення його мітки для двох суміжних вершин є однаковим.

Дійсність. Усі елементи матриці — дійсні числа, оскільки $2 \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ — це дійсне число для будь-якого $k \geq 3$.

Нулі на головній діагоналі. $a_{ii} = 0$ для будь-якої вершини i , оскільки вершина не має зв'язку сама з собою в графі Коксетера.

Спектральні властивості. Як симетрична і дійсна, матриця $A(\mathbf{G})$ має дійсні власні значення, що дозволяє застосовувати до неї методи спектральної теорії графів.

Варіативність. Вигляд матриці суміжності залежить від порядку, в якому розглядаються вершини.

Зауваження 1.3. Якщо граф $\mathbf{G} = (G, f)$ скінченний та $|V| < \infty$, то матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ є квадратною матрицею порядку $|V|$.

Означення 1.14. *Спектр матриці* — це множина усіх власних значень матриці.

Означення 1.15. *Спектр графа \mathbf{G}* — це мультимножина власних значень його матриці суміжності $A(\mathbf{G})$. Позначається як $\sigma(\mathbf{G})$ та є інваріантним, адже не залежить від порядку, в якому вершини графа представлені в матриці суміжності.

Зауваження 1.4. Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ скінченного графа \mathbf{G} симетрична, то його спектр складається лише з дійсних чисел.

Означення 1.16. *Індексом графа* називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ матриці суміжності $A(\mathbf{G})$ графа \mathbf{G} .

Означення 1.17. *Характеристичним многочленом* матриці суміжності називають $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

Означення 1.18. Квадратна матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ називається *розкладною*, якщо існує перестановка її рядків і відповідних стовпців, тобто існує перестановча матриця P , така що матриця PAP^{\top} має блочну форму:

$$PAP^{\top} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

де A_{11} і A_{22} — квадратні підматриці.

У протилежному випадку матриця A називається *нерозкладною*.

Теорема 1.1. [6, 12] (*Фробеніуса*) Нерозкладна невід’ємна матриця A завжди має додатне власне значення r , що задовольняє такі властивості:

- r є простим коренем характеристичного рівняння;
- модулі всіх інших власних значень не перевищують r ;
- власному значенню r відповідає власний вектор з додатними компонентами.

Окрім цього, якщо матриця A має k власних значень, за модулем рівних r , то:

- всі ці k значень різні між собою;
- вони є коренями рівняння $\lambda^k - x^k = 0$;
- спектр матриці A (представлений як множина точок на комплексній площині) є інваріантним відносно повороту на кут $2\frac{\pi}{k}$.

Якщо $k > 1$, то перестановкою рядків і відповідною перестановкою стовпчиків матрицю A можна привести до так званої циклічної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

У цьому випадку матриця A називається *імпримітивною*, а число k — її *індексом імпримітивності*.

Якщо $k = 1$, то матриця A називається *примітивною*.

Твердження 1.1. [6, 12] Матриця суміжності графа є нерозкладною тоді та тільки тоді, коли граф є зв'язним.

Теорема 1.2. [12] (*Фробеніуса для матриці суміжності*) Нехай \mathbf{G} — зв'язний скінченний граф, а $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — власні значення зваженого графа $\mathbf{G} = (G, f)$, впорядковані за незростанням. Тоді виконуються такі властивості:

1. Індекс графа $\lambda_{\mathbf{G}}$ — додатне число: $\lambda_{\mathbf{G}} > 0$;
2. Модуль будь-якого власного значення не перевищує значення індексу графа: $\forall i, |\lambda_i| \leq \lambda_{\mathbf{G}}$;
3. Алгебраїчна кратність власного значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ дорівнює 1, а отже, і геометрична кратність також дорівнює 1;
4. Існує власний вектор з додатними координатами, що відповідає $\lambda_{\mathbf{G}}$ (такий вектор називається *вектором Перрона–Фробеніуса*);
5. Якщо $(-\lambda_{\mathbf{G}})$ — власне значення, то його алгебраїчна (і геометрична) кратність також дорівнює 1.

Означення 1.19. *Зліченим графом Коксетера* називають граф, для якого множина вершин V є зліченною.

Зауваження 1.5. Матриця суміжності злічених графів є нескінченною вправо та вниз.

Означення 1.20. Нехай $\text{Fin}(\mathbf{G})$ — це множина всіх скінченних підграфів графа \mathbf{G} . *Спектром зліченного графа \mathbf{G}* називають об'єднання спектрів його скінченних підграфів $\text{Fin}(\mathbf{G})$, тобто

$$\sigma(\mathbf{G}) = \bigcup_{\Gamma \in \text{Fin}(\mathbf{G})} \sigma(\Gamma).$$

Означення 1.21. *Індексом зліченного графа* називають додатне число або символ ∞ , визначені рівністю

$$\text{ind } \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in \text{Fin}(\mathbf{G})} \text{ind } \Gamma.$$

Означення 1.22. *T-дерево (або T-граф)* — це зв'язний граф-дерево, що містить єдину вершину степеня якої дорівнює 3, а степені усіх інших вершин менше за 3 (рис. 1.1).

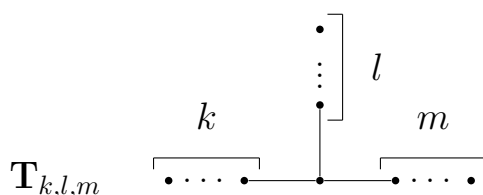


Рис. 1.1

1.3 Операції на злічених графах Коксетера

Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ — зв'язний граф Коксетера. Визначено наступні операції:

1. *Операція видалення вершини* [12]. У графі G оберемо вершину x . Розглянемо граф $G_1 = (V_1, E_1)$, де визначено множину вершин $V_1 = V \setminus \{x\}$, множину ребер, яку отримано шляхом видалення з E ребер, що інцидентні вершині x та функцію f_1 , яка є обмеженням функції f на множину ребер E_1 .

Тоді граф Коксетера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ — граф Коксетера, отриманий з графа \mathbf{G} видаленням вершини x та позначається $\mathbf{G} - x$.

2. *Операція видалення ребра* [12]. У графі G оберемо ребро e . Розглянемо граф $G_1 = (V_1, E_1)$, де визначено множину вершин $V_1 = V$ незмінною, множину ребер $E_1 = E \setminus \{e\}$ та функцію f_1 , яка є обмеженням функції f на множину ребер E_1 .

Тоді граф Коксетера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ — граф Коксетера, отриманий з графа \mathbf{G} видаленням ребра e та позначається $\mathbf{G} - e$.

3. *Операція зменшення мітки на ребрі* [12]. У графі G оберемо ребро e . Розглянемо функцію f_1 , яка тотожно рівна функції f на множині ребер $E_1 = E \setminus \{e\}$, а на ребрі e визначається як $f_1(e) < f(e)$.

Тоді граф Коксетера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ — граф Коксетера, отриманий з графа \mathbf{G} зменшенням мітки на ребрі e .

4. *Операція підрозбиття ребра або додавання вершини на внутрішнє ребро* [12]. Введена на незважених графах (всі позначки на ребрах дорівнюють 3). У графі G оберемо ребро $e = (x, y)$. Розглянемо граф $G_1 = (V_1, E_1)$, де визначено множину вершин $V_1 = V \cup z$, множину ребер $E_1 = (E \setminus \{e\}) \cup x, z \cup z, y$.

Тоді граф Коксетера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ — граф Коксетера, отриманий з графа \mathbf{G} підрозбиттям ребра e або додаванням вершини z на внутрішнє ребро e .

Означення 1.23. *Підграф графа \mathbf{G}* в термінах операцій над графами — граф, отриманий шляхом застосування операцій видалення вершини, ребра або зменшення мітки на ребрі графа \mathbf{G} .

1.4 Характеристичні многочлени деяких класів графів Коксетера

Зауваження 1.6. Характеристичний многочлен графа A_n (рис. 1.2) будемо позначати $P_{A_n}(\lambda) = P_n(\lambda)$.

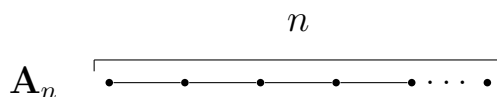


Рис. 1.2

Твердження 1.2. [12, 14] Характеристичний многочлен графа A_n задовольняє рекурентному співвідношенню

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1} - P_{n-2}(\lambda),$$

де $P_1(\lambda) = \lambda$ та $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

Лема 1.1. [12] Характеристичний многочлен графа A_n дорівнює

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}} \right), \text{ де } \mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Лема 1.2. [12] Характеристичний многочлен графа дорівнює добутку характеристичних многочленів його компонент зв'язності.

Лема 1.3. [12] *(Про значення характеристичного многочлена графа, що містить висячу вершину)* Нехай x — висяча вершина графа \mathbf{G} (рис. 1.3) та y — вершина суміжна з x . Ребро, інцидентне вершинам x та y , має позначку k .

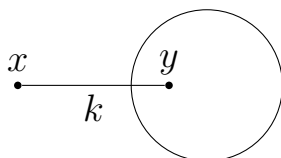


Рис. 1.3

Характеристичний многочлен графа \mathbf{G} дорівнює

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-x}(\lambda) - 4 \cos^2 \frac{\pi}{k} P_{\mathbf{G}-x-y}(\lambda).$$

Лема 1.4. [12] Характеристичний многочлен графа D_n ($n \geq 4$) (рис. 1.4) дорівнює

$$P_{D_n} = \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\mu^{n-1} + \frac{1}{\mu^{n-1}} \right), \text{ де } \mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

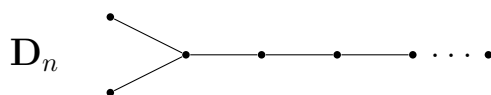


Рис. 1.4

Лема 1.5. [12] Характеристичний многочлен графа \mathbf{G} з підпорядкованим зірчатим графом $K_{1,n}$ (рис. 1.5) дорівнює

$$P_{K_{1,n}} = \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^{n+1} - n\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^{n-1}, \text{ де } \mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

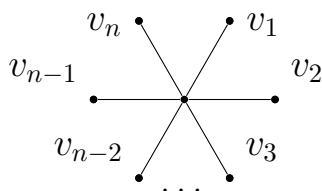


Рис. 1.5

Лема 1.6. [14] Характеристичний многочлен графа \mathbf{G} (рис. 1.6) дорівнює

$$P_{\mathbf{G}} = P_{\tilde{C}_{k+1}} = \mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}} - \mu^{k-1} - \frac{1}{\mu^{k-1}}, \text{ де } \mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

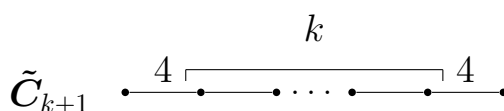


Рис. 1.6

Лема 1.7. За лемами 1.1 та 1.3 характеристичний многочлен графа \mathbf{G} (рис. 1.7) дорівнює

$$P_{\mathbf{G}} = P_{n+1,5} = \left(\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}\right)(\mu^{n+2} - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)(\mu^n - \frac{1}{\mu^n}) - \frac{1}{\mu^{n+2}}).$$

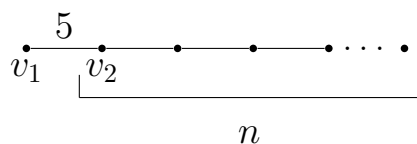


Рис. 1.7

Означення та властивості графів Коксетера, наведені у даному розділі, становлять теоретичне підґрунтя для подальшого дослідження. Описані операції над зліченими графами Коксетера застосовуються для оцінки значення індексу відповідних графів. Наведені твердження, що стосуються характеристичних многочленів окремих класів графів Коксетера — A_n , D_n , зірчастих графів і графів зі спеціальною структурою, забезпечують засоби подальшого аналізу спектральних властивостей графів у наступних розділах роботи.

2 Індекси злічених графів Коксетера

У даному розділі розглянуто властивості індексів злічених графів Коксетера. Наведено твердження, що характеризують зміну індексу при зміні структури графа, а також співвідношення для обчислення характеристичних многочленів зважених графів. Окремо розглянуто алгоритм обчислення індексу графа, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга.

2.1 Твердження про індекс злічених графів

Твердження 2.1. [12, 15] Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф. При видаленні вершини, або ребра графа \mathbf{G} , індекс не збільшується. При зменшенні мітки на ребрі графа \mathbf{G} , індекс строго зменшується.

Твердження 2.2. [12, 15] Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф. При підрозбитті внутрішнього ребра графа \mathbf{G} , індекс графа $\text{ind } \mathbf{G}$ не збільшується.

Наслідок 2.1. [12, 15] Нехай $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ — злічені графи, причому $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$. Тоді виконується нерівність $\text{ind } \mathbf{G}_1 \leq \text{ind } \mathbf{G}_2$.

Твердження 2.3. [12, 15] Індекс зліченого графа дорівнює супремуму індексів його компонент зв'язності.

Твердження 2.4. [12, 15] Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність його скінчених підграфів, що задовольняє умовам:

1. $\mathbf{G}_n \subset \mathbf{G}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n = \mathbf{G}$.

Тоді $\text{ind } \mathbf{G} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n$.

Наслідок 2.2. [12, 15] Нехай $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2$ — злічені зв'язні графи, $\{\mathbf{G}_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \{\mathbf{G}_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовності скінчених підграфів $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2$ відповідно. Нехай при цьому виконуються умови:

1. \mathbf{G}_n^1 ізоморфний $\mathbf{G}_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\mathbf{G}_n^1 \subset \mathbf{G}_{n+1}^1, \mathbf{G}_n^2 \subset \mathbf{G}_{n+1}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n^1 = \mathbf{G}^1, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n^2 = \mathbf{G}^2.$

Тоді $\text{ind } \mathbf{G}_n^1 = \text{ind } \mathbf{G}_n^2.$

2.2 Формули Швенка для зважених графів

Теорема 2.1. [12] Нехай v — вершина графа \mathbf{G} , через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v . Тоді

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - \sum_{u \sim v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(\lambda).$$

Наслідок 2.3. [12] (*Розклад за висячою вершиною*) Якщо v — вершина графа \mathbf{G} та u — вершина суміжна з v , то

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda).$$

Теорема 2.2. [12] Нехай uv — ребро графа G , через $C(uv)$ позначимо множину циклів, що містять uv . Тоді

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = P_{\mathbf{G}-uv}(\lambda) - w(uv)^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{Z \in C(uv)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(\lambda).$$

Наслідок 2.4. [12] (*Розклад за мостом*) Нехай ребро $e = (v_1, v_2)$ — міст графа \mathbf{G} , який при видаленні ребра e розпадається на графи \mathbf{G}_1 та \mathbf{G}_2 , при цьому вважатимемо, що $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$. Характеристичний многочлен графа \mathbf{G} можна знайти за формулою

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = P_{\mathbf{G}_1}(\lambda) P_{\mathbf{G}_2}(\lambda) - w(e)^2 P_{\mathbf{G}_1 - v_1}(\lambda) P_{\mathbf{G}_2 - v_2}(\lambda).$$

2.3 Індеси графів, що складаються зі скінченного графа та нескінченного ланцюга

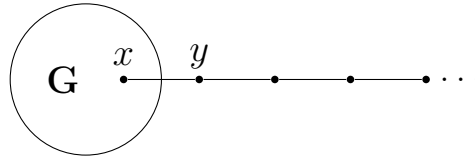


Рис. 2.1

Граф такого виду можна задати зліченною кількістю пар (\mathbf{G}, x) .

Теорема 2.3. [12, 15] Нехай злічений граф (\mathbf{G}, x) складається зі скінченного графа G і нескінченного ланцюга (рис. 2.1).

Тоді виконуються наступні умови:

- Якщо $(\mathbf{G}, x) \in \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{B}_\infty, \mathbf{C}_\infty\}$, то $ind(\mathbf{G}, x) = 2$;
- Якщо $(\mathbf{G}, x) \notin \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{B}_\infty, \mathbf{C}_\infty\}$, то $ind(\mathbf{G}, x) > 2$, та визначається як максимальний корінь рівняння

$$\frac{P_{\mathbf{G}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}}(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Наслідок 2.5. [12] Нехай \mathbf{G} — граф, що складається зі скінченного графа \mathbf{G}_{fin} та нескінченного ланцюга. Індекс графа \mathbf{G} може бути обчислений шляхом виконання наступної послідовності дій:

1. Знайти характеристичні многочлени графів \mathbf{G}_{fin} і $\mathbf{G}_{fin} - x$: $P_{\mathbf{G}_{fin}}(\lambda)$, $P_{\mathbf{G}_{fin}-x}(\lambda)$.

Підставити знайдені много члени у наступне рівняння: $\frac{P_{\mathbf{G}_{fin}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}_{fin}}(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$;

2. Ввести заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$. Тоді $\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \mu$.
Підставити значення у рівняння $\frac{P_{\mathbf{G}_{fin}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}_{fin}}(\lambda)} = \mu$. Отримано рівняння з одним невідомим μ ;

3. Знайти максимальне значення μ в рівнянні $\frac{P_{\mathbf{G}_{fin-x}}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}_{fin}}(\lambda)} = \mu$;
4. Знайти λ , підставивши μ у введenu заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$. Це значення λ і є шуканим індексом графа \mathbf{G} .

Лема 2.1. [12] Нехай \mathbf{G} — скінченний граф, x — його вершина.

Тоді $\frac{P_{\mathbf{G}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}}(\lambda)}$ монотонно спадає при $\lambda > \text{ind } \mathbf{G}$.

У даному розділі викладено твердження, що описують характер зміни індексів злічених графів Коксетера при структурних перетвореннях, а також наведено співвідношення для обчислення характеристичних многочленів зважених графів. Окремо розглянуто графи, які складаються зі скінченного графа та нескінченного ланцюга, і наведено алгоритм обчислення їхніх індексів. Представлені в розділі положення формують основу для подальшого дослідження та обчислення індексів обраних класів графів Коксетера.

3 Класифікація обраних класів злічених графів Коксетера

У даному розділі проведено класифікацію обраних класів злічених графів Коксетера, індекси яких належать проміжку $(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}]$. Зокрема, сформульовано та доведено твердження про оцінку значення індексів для класів $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$, $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$ та Т-дерев Коксетера з позначкою 4 на нескінченному ланцюгу. На основі одержаних тверджень та результатів, отриманих в роботах [7, 16], сформульовано та доведено теорему про повну класифікацію графів Коксетера з підпорядкованими Т-деревами зі значенням індексу у заданому проміжку.

3.1 Твердження про класифікацію графів Коксетера $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$

Твердження 3.1. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$ -графом (рис. 3.1), тоді

- $\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \iff l + 3 \leq k$ або $l = 1$ і $k = 3$.
- $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$ для всіх інших випадків значень k та l .

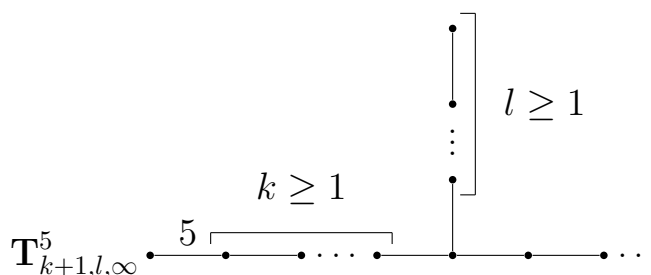


Рис. 3.1

Доведення. Зважаючи на те, що $\frac{P_{\mathbf{G}-x}}{P_{\mathbf{G}}} = \mu$ (теорема 2.3) та характеристичний многочлен незв'язного графа можна представити як добуток характеристичних многочленів його компонент зв'язності (лема 1.4) оберемо вершину зі степенем 3 як x , відповідно значення характеристичного многочлена графа

$G - x$ рівне $P_{G-x} = P_{k+1,5} \cdot P_l$.

Запишемо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{P_{G-x}}{P_G} &= \frac{P_{k+1,5} \cdot P_l}{P_{l+k+2,5}} = \frac{P_{k+1,5} \cdot \left(\frac{\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}}\right)}{P_{l+k+2,5}} = \mu; \\ \left(\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}\right)^2 &\left(\frac{(\mu^{k+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}) - \frac{1}{\mu^{k+2}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}})}{(\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}})(\mu^{k+l+3} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\mu^{k+l+1} - \frac{1}{\mu^{k+l+1}}) - \frac{1}{\mu^{k+l+3}})}\right) = \mu; \\ \left(\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}\right) &(\mu^{k+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}) - \frac{1}{\mu^{k+2}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}}) = \\ &= \mu(\mu^{k+l+3} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\mu^{k+l+1} - \frac{1}{\mu^{k+l+1}}) - \frac{1}{\mu^{k+l+3}}); \\ \left(\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}\right) &(\mu^{k+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\mu^k - \frac{1}{\mu^k}) - \frac{1}{\mu^{k+2}})(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}}) = \\ &= \mu(\mu^{k+l+3} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\mu^{k+l+1} - \frac{1}{\mu^{k+l+1}}) - \frac{1}{\mu^{k+l+3}}); \\ \mu^{2k+2l+4} - \mu^{2k+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} &\mu^{2k+2l+2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2k} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2l+2} - \mu^{2l} = \\ = \mu^{2k+2l+6} - \mu^{2k+2l+4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} &\mu^{2k+2l+4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2k+2l+2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2 - 1; \\ \mu^{2k+2l+6} - \frac{5+\sqrt{5}}{2} &\mu^{2k+2l+4} + (1+\sqrt{5})\mu^{2k+2l+2} + \mu^{2k+2} - \\ - \frac{1+\sqrt{5}}{2} &\mu^{2k} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2l+2} + \mu^{2l} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Отже, маємо рівносильне рівняння

$$\begin{aligned} Q(\mu) &= \mu^{2k+2l+6} - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\mu^{2k+2l+4} + (1+\sqrt{5})\mu^{2k+2l+2} + \mu^{2k+2} - \\ &- \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2k} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^{2l+2} + \mu^{2l} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu^2 - 1. \end{aligned}$$

При $\mu = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
 Q(\sqrt{2}) &= 2^{k+l+3} - \frac{5 + \sqrt{5}}{2} 2^{k+l+2} + (1 + \sqrt{5}) 2^{k+l+1} + 2^{k+1} - \\
 &\quad - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} 2^k - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} 2^{l+1} + 2^l + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} 2 - 1 = \\
 &= 2^{k+l+1} (4 - 5 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}) + 2^k \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) - 2^l \sqrt{5} + \sqrt{5} = \\
 &= 2^{k-1} (3 - \sqrt{5}) - 2^l \sqrt{5} + \sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Розглянемо можливі значення k та l .

1. $k - 1 \leq l$:

$$\begin{aligned}
 Q(\sqrt{2}) &\leq 2^l (3 - 2\sqrt{5}) + \sqrt{5} \leq 6 - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} < 0 \\
 \implies &\text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} > \sqrt{2} \\
 \implies &\lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

2. $k - 1 > l$:

• $k = l + 2$:

$$Q(\sqrt{2}) = 2^{l+1} (3 - \sqrt{5}) - 2^l \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2^l (6 - 3\sqrt{5}) + \sqrt{5}.$$

• $l = 1$:

$$Q(\sqrt{2}) = 2(6 - 3\sqrt{5}) + \sqrt{5} > 0.$$

Для $\forall \mu \geq \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
 Q(\mu) &= \mu^{14} - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \mu^{12} + (1 + \sqrt{5}) \mu^{10} + \mu^8 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \mu^6 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \mu^4 + \mu^2 + \\
 &\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \mu^2 - 1.
 \end{aligned}$$

Домножимо многочлен на 2 та проведемо оцінку його значення відносно 0.

$$\begin{aligned}
 &(\mu - 1)^2 (\mu + 1)^2 (\mu^{10} + \mu^8 - 2\mu^6 + \mu^2 (\mu^8 - \sqrt{5}\mu^6 + \sqrt{5}\mu^2 - \mu^2 + \sqrt{5} - 1) - 2) \\
 &\vee 0.
 \end{aligned}$$

Порівняємо доданки отриманого многочлена з 0:

$$(a) \mu^{10} + \mu^8 - 2\mu^6 > 0;$$

$$(б) \mu^2(\mu^8 - \sqrt{5}\mu^6 + \sqrt{5}\mu^2 - \mu^2 + \sqrt{5} - 1) - 2 = \mu^2((\mu^2 - 2)(\mu^6 + (2 - \sqrt{5})\mu^4 + (4 - 2\sqrt{5})\mu^2 + 7 - 3\sqrt{5}) + 13 - 5\sqrt{5}) - 2 > 0.$$

$$\text{Отже, } Q(\mu) > 0, \forall \mu \geq \sqrt{2}$$

$$\implies \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} < \sqrt{2}$$

$$\implies \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{G} < \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

• $l \geq 2$:

$$Q(\sqrt{2}) \leq 4(6 - 3\sqrt{5}) + \sqrt{5} < 0$$

$$\implies \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} > \sqrt{2}$$

$$\implies \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

• $k \geq l + 3$:

Проаналізуємо значення многочлена $Q(\mu)$ для $\forall \mu \geq \sqrt{2}$.

Домножимо значення многочлена на 2 та введемо заміну $x = \mu^2$.

$$Q(x) = 2x^{k+l+3} - (5 + \sqrt{5})x^{k+l+2} + 2(1 + \sqrt{5})x^{k+l+1} + 2x^{k+1} - (1 + \sqrt{5})x^k - (1 + \sqrt{5})x^{l+1} + 2x^l + (1 + \sqrt{5})x - 2.$$

Нехай $k = l + 3$, тоді

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^{2l+6} - (5 + \sqrt{5})x^{2l+5} + 2(1 + \sqrt{5})x^{2l+4} + 2x^{l+4} - (1 + \sqrt{5})x^{l+3} - \\ &(1 + \sqrt{5})x^{l+1} + 2x^l + (1 + \sqrt{5})x - 2 = \\ &x^{2l+4}(x - 2)(2x - 1 - \sqrt{5}) + x^l((x - 2)(2x^3 + (3 - \sqrt{5})x^2 + 2(3 - \sqrt{5})x + \\ &11 - 5\sqrt{5}) + 24 - 10\sqrt{5}) + (1 + \sqrt{5})x - 2. \end{aligned}$$

Порівняємо доданки отриманого многочлена з 0:

$$(а) x^{2l+4}(x - 2)(2x - 1 - \sqrt{5}) > 0;$$

$$(б) x^l(x - 2)(2x^3 + (3 - \sqrt{5})x^2 + 2(3 - \sqrt{5})x + 11 - 5\sqrt{5}) > 0;$$

$$(в) x^l(24 - 10\sqrt{5}) > 0;$$

$$(г) (1 + \sqrt{5})x - 2 > 0.$$

Отже, $Q(x) > 0$ при $k = l + 3$, $\forall x \geq 2$.

Для $k \geq l + 3$:

$$(а) 2x^{k+l+3} - (5 + \sqrt{5})x^{k+l+2} + 2(1 + \sqrt{5})x^{k+l+1} = x^{k+l+1}(x - 2)(2x - 1 - \sqrt{5}) > 0;$$

$$\begin{aligned}
(б) \quad & 2x^{k+1} - (1 + \sqrt{5})x^k = x^k(2x - 1 - \sqrt{5}) \geq 2x^{l+4} - (1 + \sqrt{5})x^{l+3} \\
& \implies 2x^{k+1} - (1 + \sqrt{5})x^k - (1 + \sqrt{5})x^{l+1} + 2x^l \geq 2x^{l+4} - (1 + \sqrt{5})x^{l+3} - \\
& (1 + \sqrt{5})x^{l+1} + 2x^l > 0;
\end{aligned}$$

$$(в) \quad (1 + \sqrt{5})x - 2 > 0.$$

$$\implies Q(\mu) > 0 \text{ при } k \geq l + 3, \forall \mu > \sqrt{2}$$

$$\implies \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} < \sqrt{2}$$

$$\implies \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{G} < \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

□

3.2 Твердження про класифікацію графів Коксетера $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$

Твердження 3.2. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$ -графом (рис. 3.2), тоді

$$\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}, \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

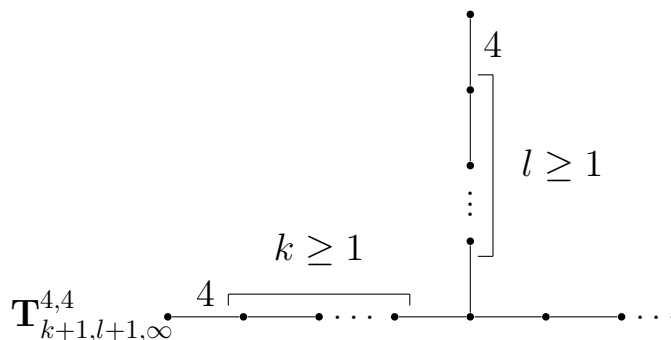


Рис. 3.2

Доведення. Зважаючи на те, що $\frac{P_{\mathbf{G}-x}}{P_{\mathbf{G}}} = \mu$ (теорема 2.3) та характеристичний многочлен незв'язного графа можна представити як добуток характеристичних многочленів його компонент зв'язності (лема 1.4) оберемо вершину зі степенем 3 як x , відповідно значення характеристичного многочлена графа $\mathbf{G} - x$ рівне $P_{\mathbf{G}-x} = P_{k+1,4} \cdot P_{l+1,4}$.

Запишемо рівняння

$$\frac{P_{\mathbf{G}-x}}{P_{\mathbf{G}}} = \frac{P_{k+1,4} \cdot P_{l+1,4}}{\mu^{k+l+3} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}} - \mu^{k+l+1} - \frac{1}{\mu^{k+l+1}}} = \frac{(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^{l+1} + \frac{1}{\mu^{l+1}})}{\mu^{k+l+3} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}} - \mu^{k+l+1} - \frac{1}{\mu^{k+l+1}}} = \mu;$$

$$(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}})(\mu^{l+1} + \frac{1}{\mu^{l+1}}) = \mu^{k+l+4} + \frac{1}{\mu^{k+l+2}} - \mu^{k+l+2} - \frac{1}{\mu^{k+l}};$$

$$\mu^{2k+2l+4} + \mu^{2l+2} + \mu^{2k+2} + 1 = \mu^{2k+2l+6} + 1 - \mu^{2k+2l+4} - \mu^2;$$

$$\mu^{2k+2l+4} - 2\mu^{2k+2l+2} - \mu^{2l} - \mu^{2k} - 1 = 0.$$

Отже, маємо рівносильне рівняння

$$Q(\mu) = \mu^{2k+2l+4} - 2\mu^{2k+2l+2} - \mu^{2l} - \mu^{2k} - 1.$$

При $\mu = \sqrt{2}$:

$$Q(\sqrt{2}) = -2^l - 2^k - 1 < 0$$

$$\implies Q(\sqrt{2}) < 0, \forall k, l \in \mathbb{N}$$

$$\implies \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} < \sqrt{2}$$

$$\implies \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}. \quad \square$$

3.3 Твердження про класифікацію Т-дерев Коксетера з позначкою 4 на нескінченному ланцюгу

Твердження 3.3. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим Т-графом з 4 на нескінченному ланцюгу (рис. 3.3), тоді $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}, \forall k \in \mathbb{N}$.

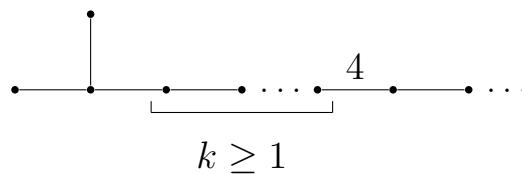


Рис. 3.3

Доведення. Розглянемо граф такого виду, довжини інших двох ланцюгів якого дорівнюють одиниці. Оберемо вершину справа від ребра з позначкою 4 як x . Зважаючи на те, що $\frac{P_{G-x}}{P_G} = \mu$ (теорема 2.3), та використовуючи розклад за висячою вершиною (наслідок 2.2), запишемо наступне рівняння

$$\frac{(\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}})}{(\mu + \frac{1}{\mu})((\mu + \frac{1}{\mu})(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}) - 2(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}}))} = \mu;$$

$$\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}} = (\mu^2 + 1)(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}) - 2(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}});$$

$$\mu^{2k+4} - 2\mu^{2k+2} - 1 = 0.$$

Отже, маємо рівносильне рівняння

$$Q(\mu) = \mu^{2k+4} - 2\mu^{2k+2} - 1.$$

При $\mu = \sqrt{2}$:

$$Q(\sqrt{2}) = -1 < 0$$

$$\implies Q(\sqrt{2}) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\implies \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} < \sqrt{2}$$

$$\implies \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

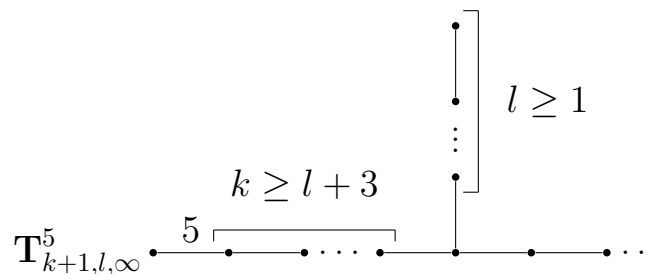
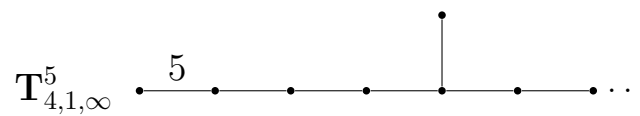
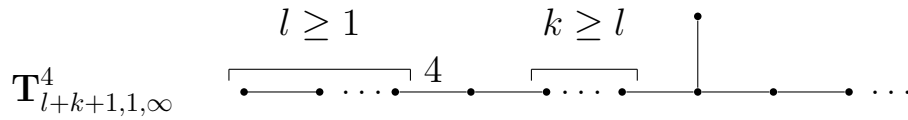
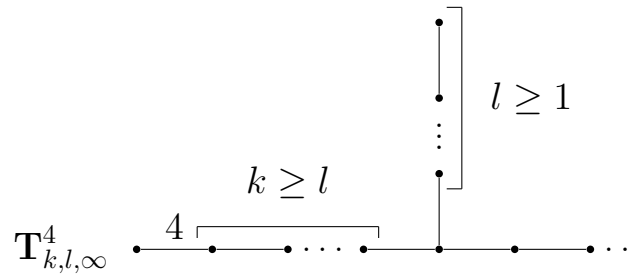
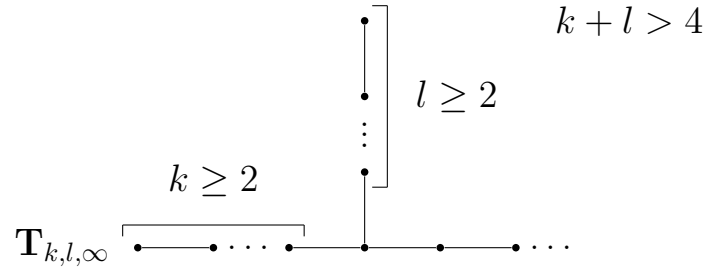
Застосувавши твердження про значення індексу підграфа (2.1) маємо, що для всіх графів \mathbf{G} з підпорядкованим Γ -графом з 4 на нескінченному ланцюгу виконується твердження $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$. \square

3.4 Теорема про класифікацію злічених Γ -дерев Кохсетера зі значенням індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

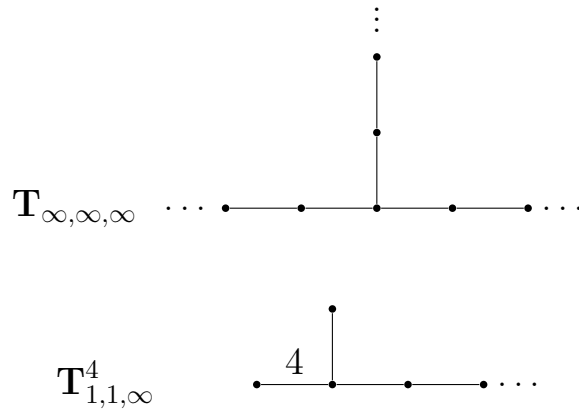
Спираючись на результати, отримані в даній роботі, та твердження, отримані в роботах [7, 16], можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.1. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим T -деревом, тоді

1. Якщо $\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$, то \mathbf{G} — граф виду:



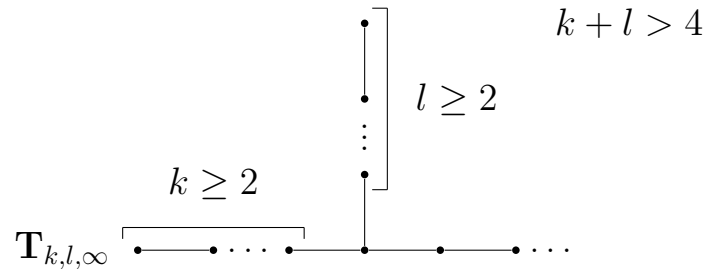
2. Якщо $\text{ind } \mathbf{G} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, то \mathbf{G} — граф виду:



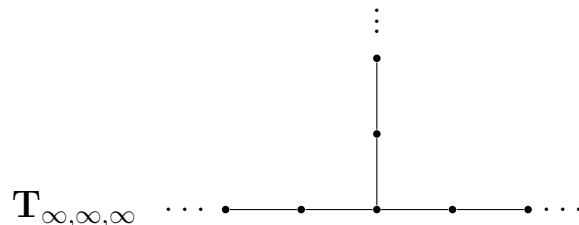
Доведення. Розглянемо можливі типи злічених зв'язних T-дерев Коксетера.

1. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим незваженим T-графом.

Згідно з теоремою 6 [7], $\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} — граф виду:



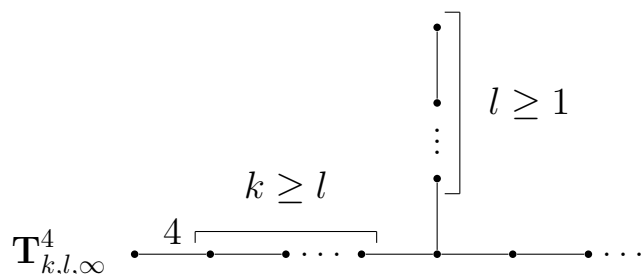
та $\text{ind } \mathbf{G} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} — граф виду:



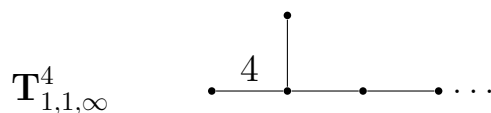
2. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим T-графом з єдиною позначкою на ребрі, інцидентному висячій вершині, на скінченному ланцюгу.

- Нехай позначка дорівнює 4.

Згідно з твердженням про класифікацію графів Коксетера з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^4$ [16], $\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} — граф виду:

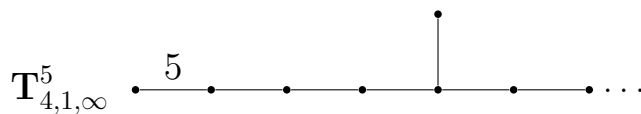


та згідно з теоремою 7 [7], $\text{ind } \mathbf{G} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} — граф виду:

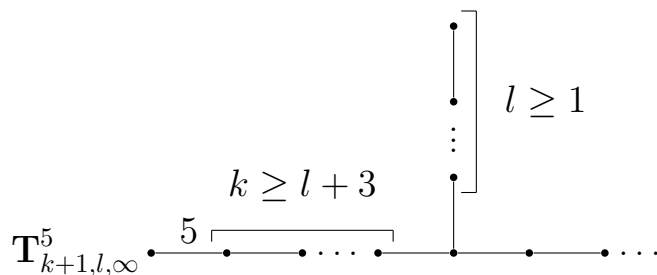


- Нехай позначка дорівнює 5.

Згідно з твердженням про класифікацію графів Коксетера з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$, одержаним в даній роботі, $\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} — граф виду:



або \mathbf{G} — граф виду:



Для всіх інших значень k та l , $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

- Позначка не може бути більше або рівною 6.

Для графа \mathbf{G} з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,1,\infty}^6$ (рис. 3.4), $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$ [12].

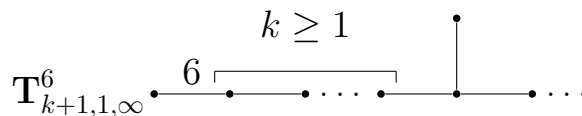


Рис. 3.4

Застосувавши твердження про значення індексу підграфа (2.1) маємо, що для всіх графів Коксетера \mathbf{G} з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^6$, підграфом якого є граф $\mathbf{T}_{k+1,1,\infty}^6$, виконується нерівність $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

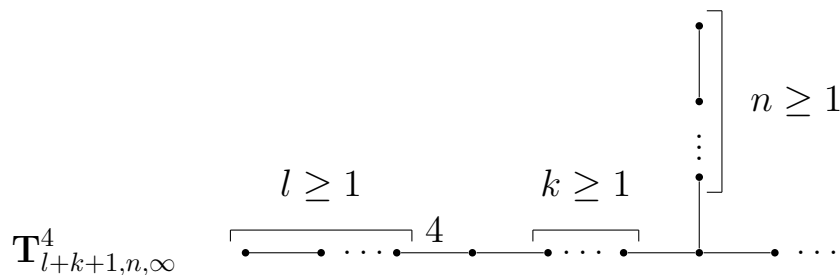
За твердженням 3 відомо, що при збільшенні мітки на ребрі, індекс графа не зменшується. Отже, індекс графа Коксетера \mathbf{G} з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^x$, де $x > 6$, буде не меншим за індекс графа Коксетера \mathbf{G} з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^6$.

Відповідно, якщо \mathbf{G} — граф Коксетера з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^x$, то $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}, \forall x > 5$.

3. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим \mathbf{T} -графом з єдиною позначкою на ребрі, не інцидентному висячій вершині, на скінченному ланцюгу.

Згідно з твердженням 4.4 [7], $\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2} \right]$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} не має позначок більших за 4 на ребрі, не інцидентному висячій вершині.

Нехай \mathbf{G} має позначку 4 на ребрі, не інцидентному висячій вершині. Розглянемо граф такого виду:



Згідно з твердженням про класифікацію графів Коксетера з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+l+1,1,\infty}^4$ [16],

$\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2} \right]$ тоді та тільки тоді, коли $l \geq 1, k \geq l$.

Згідно з твердженням про класифікацію графів Коксетера з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+l+1,2,\infty}^4$ [16],

$\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2} \right]$ тоді та тільки тоді, коли $l = 1, k \geq l$.

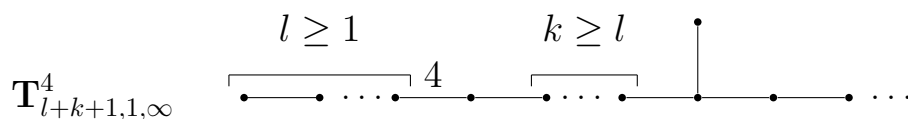
Якщо $l \geq 2$, то $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Застосувавши твердження про значення індексу підграфа (2.1) маємо, що для всіх графів \mathbf{G} з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+l+1,n,\infty}^4$, підграфом якого є граф $\mathbf{T}_{k+l+1,2,\infty}^4$, де $k \geq 2$, виконується твердження $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Загальний випадок при $l = 1$ розглянуто в п. 2 даної теореми.

Отже, якщо граф Коксетера \mathbf{G} має позначку 4 на ребрі, не інцидентному висячій вершині, то

$\text{ind } \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2} \right]$ тоді та тільки тоді, коли \mathbf{G} — граф виду:



4. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим T-графом з позначкою на нескінченному ланцюгу.

Згідно з твердженням про класифікацію T-дерев Коксетера з позначкою 4 на нескінченному ланцюгу (3.3), $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

За твердженням 3 відомо, що при збільшенні мітки на ребрі, індекс графа

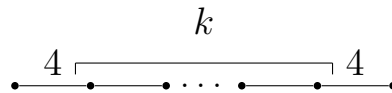
не зменшується.

Отже, $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$ для будь-якого можливого значення мітки.

5. Нехай \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим \mathbf{T} -графом, що містить більше, ніж одну позначку.

- Нехай ці позначки знаходяться на одному скінченному ланцюгу.

Розглянемо наступний граф:



Індекс такого графа більший за $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ [7].

За твердженням 3 відомо, що при збільшенні мітки на ребрі, індекс графа не зменшується. Отже, за значень міток більших за 4, значення індексу буде так само більше за $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Застосувавши твердження про значення індексу підграфа (2.1) маємо, що для всіх графів \mathbf{G} з підпорядкованим графом такого виду $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

- Нехай ці позначки знаходяться на різних скінченних ланцюгах.

Згідно з твердженням про класифікацію графів Коксетера з підпорядкованим графом $\mathbf{T}_{k+1, l+1, \infty}^{4,4}$, одержаним в даній роботі, індекс такого графа більший за $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

За твердженням 3 відомо, що при збільшенні мітки на ребрі, індекс графа не зменшується. Отже, за значень міток більших за 4, значення індексу буде так само більше за $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Застосувавши твердження про значення індексу підграфа (2.1) маємо, що для всіх графів \mathbf{G} з підпорядкованим графом такого виду $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

- Якщо хоча б одна з цих позначок знаходиться на нескінченному ланцюгу, то $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$ за п. 4 даної теореми.

Отже, якщо \mathbf{G} — злічений зв'язний граф Коксетера з підпорядкованим T -графом, що містить більше, ніж одну позначку, $\text{ind } \mathbf{G} > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

□

Висновки

У даній роботі було представлено огляд ключових означень та тверджень спектральної теорії графів Коксетера, а також методів визначення індексів окремих класів графів. У роботі було досліджено спектральні властивості злічених графів Коксетера, зокрема, оцінено значення індексів для окремих класів таких графів, серед яких $\mathbf{T}_{k+1,l,\infty}^5$, $\mathbf{T}_{k+1,l+1,\infty}^{4,4}$ та T-графи Коксетера з позначкою 4 на нескінченному ланцюгу. Було сформульовано та доведено теорему про повну класифікацію графів Коксетера з підпорядкованими T-графами, індекси яких належать проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

Отримані результати дають змогу точніше описати спектральні характеристики відповідних графів та дозволяють встановити зв'язок між значенням індексу та топологією графа. Результати дослідження можуть бути використані в задачах класифікації графів, у теоретичних і прикладних аспектах теорії представлень, та інших галузях, де застосовується аналіз структур з відомими спектральними властивостями.

Розширення знань про індекси графів Коксетера та наявних теорем, що стосуються їхніх спектральних характеристик, сприяє подальшому розвитку спектральної теорії графів та її застосувань у сучасній дискретній математиці.

Список використаних джерел

- [1] Prasanna, N.L., Sravanthi, K. and Sudhakar, N., 2014. Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science & Technology*, 7(1), pp.139–145.
- [2] Mitchell, J.S., 2000. Geometric Shortest Paths and Network Optimization. *Handbook of computational geometry*, 334, pp.633-702.
- [3] Alon, N., Awerbuch, B., Azar, Y., Buchbinder, N. and Naor, J., 2006. A general approach to online network optimization problems. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 2(4), pp.640-660.
- [4] Cvetkovic, D. M.,. 2009 Applications of graph spectra, Cvetkovic D. M., Gutman I., *Zbornik radova*, 13(21).
- [5] Woo R., Neumaier A. *On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by $\frac{3}{2}\sqrt{2}$* , *Graphs and Combinatorics* — 2007. — Vol. 23, № 6. — Pp. 713-726.
- [6] Tymoshkevych, L., 2014. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications, *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки*, (1), с.27–33.
- [7] Тимошкевич Л.М., Когут М.В., 2022. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, *Могилянський математичний журнал*, (5), с.19-25.
- [8] Amram, M., Shwartz, R., Teicher, M., 2010. Coxeter covers of the classical Coxeter groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 20(08), pp.1041-1062.

- [9] Goodman, F.M., de La Harpe, P. and Jones, V.F., 2012. Coxeter graphs and towers of algebras. Springer Science & Business Media, 14.
- [10] Geneste, O., Paris, L., 2018. Coxeter groups, symmetries, and rooted representations. *Communications in Algebra*, 46(5), pp.1996-2002.
- [11] Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М., 2014. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченими деревами Кокстера. *Український математичний журнал*, 66(9), с.1185–1192.
- [12] Тимошкевич Л.М., 2015. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка.
- [13] Семенко Е. О., Тимошкевич Л.М., 2025. Класифікація злічених графів Кокстера $\mathbf{T}_{k,l,\infty}^5$ зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$, XIII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Збірка тез конференції, с.133-134.
- [14] Когут М.В., 2022. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу, Кваліфікаційна робота, Національний університет "Києво-Могилянська академія".
- [15] Коротко А.С., Тимошкевич Л.М., 2013. Аналог теореми Сміта для злічених графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України, (12), с.19–24.
- [16] Лучка К. Р., 2024. Класифікація деяких сімейств злічених графів Кокстера відносно значення індексу, Кваліфікаційна робота, Національний університет "Києво-Могилянська академія".

Додатки

Додаток А. Наукова публікація (тези доповіді)

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ ГРАФІВ КОКСЕТЕРА $T_{k,l,\infty}^5$ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ ІНДЕКСУ У ПРОМІЖКУ $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

Е.О. СЕМЕНКО, Л.М. ТИМОШКЕВИЧ

Спектральна теорія графів Коксетера має застосування у класифікаційних теоремах алгебри, зокрема, напівпростих алгебр Лі, скінченних груп Коксетера, та теорії представлень [1], [2]. Обмеження на індекс графа істотно впливають на його структуру, метричні властивості, в певних випадках можна навести повний перелік графів, що задовольняють цим обмеженням. У роботі [2] знайдено всі злічені зв'язні графи Коксетера, індекси яких не перевищують $\sqrt{\sqrt{5}+2}$. У статті [3] досліджувалися скінченні графи з індексами у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$. Актуальною є задача класифікації злічених графів Коксетера зі значеннями індексу в зазначеному проміжку. Дослідження цієї задачі та доведення низки властивостей відповідних графів наведено в роботах [2], [4], [5].

Графом Коксетера \mathbf{G} називається впорядкована пара (G, f) , де G — простий неорієнтований граф, а f — відображення

$$f: E(G) \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\} \cup \{\infty\}.$$

Граф Коксетера \mathbf{G} зручно зображати за допомогою діаграми графа G , де над кожним ребром $e \in E(G)$ написано позначку $f(e)$. Якщо $f(e) = 3$, така позначка зазвичай опускається.

З кожним скінченим графом Коксетера $\mathbf{G} = (G, f)$ та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до n , де n — порядок графа, пов'язують *матрицю суміжності* $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи a_{ij} якої визначаються наступним чином: $a_{ij} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$, якщо $f(i, j) = k$; $a_{ij} = 2$, якщо $f(i, j) = \infty$; $a_{ij} = 0$, якщо вершини i і j не суміжні.

Індексом скінченного графа Коксетера \mathbf{G} називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ матриці суміжності $A(\mathbf{G})$ графа \mathbf{G} .

Зліченим графом Коксетера \mathbf{G} називають граф зі зліченною множиною вершин.

Нехай $Fin(\mathbf{G})$ — це множина всіх скінчених підграфів графа \mathbf{G} . *Індексом зліченого графа Коксетера* \mathbf{G} називають додатне число або символ ∞ , визначені рівністю

$$ind \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G})} ind \Gamma.$$

Теорема 1. Нехай G – злічений зв’язний граф Кокстера $T_{k,l,\infty}^5$. Нерівність $\sqrt{\sqrt{5}+2} < \text{ind } G < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ виконується тоді та лише тоді, коли $l+3 \leq k$ або $l=1$ і $k=3$. Для всіх інших випадків значень k та l : $\text{ind } G > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

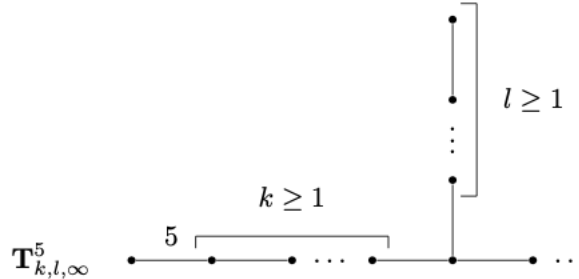


Рис. 1

Наведена теорема дозволяє частково завершити розпочате у роботах [2], [4], [5] дослідження та навести повний перелік злічених зв’язних графів Кокстера, які мають не більше однієї вершини степеня не менше за 3 та зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов’язаних зі зліченими деревами Кокстера, Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1185–1192.
- [2] Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера, Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. — 2015. — 160 с.
- [3] Woo R., Neumaier A. On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, Graphs and Combinatorics — 2007. — Vol. 23, № 6. — Pp. 713-726.
- [4] Тимошкевич Л.М., Когут М.В. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$, Могилянський математичний журнал. — 2022. — Том 5. — С.19-25.
- [5] Лучка К. Р., Тимошкевич Л. М. Класифікація злічених графів Кокстера $T_{2,n+m+1,\infty}^4$ зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$, XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Збірник тез конференції (м.Київ 9-11 травня 2024 р.) — С.105-107.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: e.semenko@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: l.tymoshkevych@ukma.edu.ua