

Міністерство освіти і науки України

Національний університет “Києво-Могилянська академія”

Факультет інформатики

Кафедра інформатики

Магістерська робота
освітній ступінь — магістр

на тему: **“Унікально-ексцентрично-точкові графи”**

Виконав: студент 2-го року навчання,
освітньо-наукової програми
“Комп’ютерні науки”, 122
Гак Артем Олегович

Керівник: Козеренко С.О.,
кандидат фіз.-мат. наук

Магістерська робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
“ _____ ” _____ 20__р.

Київ – 2024

Національний університет “Києво-Могилянська академія”

Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,

доц., к.ф.-м.н.

_____ С. С. Гороховський

(підпис)

“ _____ ” _____ 20__ р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на магістерську роботу

студенту 2-го курсу факультету інформатики

Гаку Артему Олеговичу

Тема: Унікально-ексцентрично-точкові графи

Зміст магістерської роботи:

- 1 Вступ
- 2 Основні поняття
- 3 Попередні результати
- 4 Основні теоретичні результати
- 5 Еволюційний пошук у.е.т.-графів
- 6 Результати еволюційного пошуку у.е.т.-графів
- 7 Висновки
- 8 Література

Дата видачі “ _____ ” _____ 20__ р. Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Тема: Унікально-ексцентрично-точкові графи.

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу магістерської роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми магістерської роботи.	01.08.2023	
2.	Ознайомлення з темою магістерської роботи.	01.09.2023	
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.09.2023	
4.	Робота з науковою літературою	15.10.2023	
5.	Характеризація у.е.т.-графів діаметра 3.	15.01.2024	
6.	Характеризація у.е.т.-графів діаметра 4.	15.02.2024	
7.	Програмування еволюційного алгоритму для пошуку у.е.т.-графів із заданими властивостями	01.03.2024	
8.	Робота над текстовим оформленням результатів.	01.04.2024	
9.	Попередній аналіз магістерської роботи. Виправлення помилок.	01.06.2024	
10.	Захист магістерської роботи.	12.06.2024	

	Зміст	4
1	Вступ	5
2	Основні поняття	7
2.1	Неорієнтовані графи	7
2.2	Орієнтовані графи	8
3	Попередні результати	11
4	Основні теоретичні результати	13
4.1	Орграфи ексцентриситетів у.е.т.-графів	13
4.2	У.е.т.-графи, які є графами блоків	17
4.3	У.е.т.-графи діаметра три	22
4.4	У.е.т.-графи діаметра чотири	25
5	Еволюційний пошук у.е.т.-графів	32
5.1	Загальний опис схеми алгоритму	33
5.2	Представлення графів	35
5.3	Функція здоров'я	37
5.4	Оператори мутації	38
5.5	Відбір	40
5.6	Початкова популяція	41
5.7	Загальний цикл еволюційного алгоритму	41
6	Результати еволюційного пошуку у.е.т.-графів	45
6.1	Таблиця результатів	45
6.2	Відкриті питання	45
7	Висновки	48
	Література	50
	Додатки	52

1 Вступ

Ми досліджуємо властивості ексцентричних орграфів унікально-ексцентрично-точкових графів (скорочено у.е.т.-графів). У.е.т.-графом називають зв'язний граф, кожна вершина якого має єдину ексцентричну вершину.

Дослідження унікально-ексцентрично-точкових графів бере свій початок з 1983 року, коли була опублікована перша стаття [13] з цієї теми. У цій статті особлива увага приділяється самоцентральному у.е.т.-графам, також доведена повна характеристика у.е.т.-графів діаметра 2. Для у.е.т.-графів діаметра 3 було надано лише характеристику у випадку самоцентральної графів.

У нашій роботі ми показуємо, що клас несамоцентральної у.е.т.-графів діаметра 3 також можна охарактеризувати, таким чином отримавши повну характеристику у.е.т.-графів діаметра 3. У загальному ж випадку клас у.е.т.-графів є непротим. Для того, щоб досягнути варіативності орграфів ексцентриситетів $ED(G)$, у.е.т.-графів G було використано еволюційний алгоритм (ЕА). Ми розробили програму, яка знаходить у.е.т.-графи із заданими властивостями, такими як: кількість компонент слабкої зв'язності різного типу, величина діаметра G , кількість вершин та ребер, довжина породжених шляхів у $ED(G)$. Проаналізувавши результати ЕА можна зробити висновок, що $ED(G)$ є різноманітними за структурою, але разом з тим можна знайти певні обмеження на структуру $ED(G)$ та довести це теоретично.

Було доведено обмеженість максимальної довжини породженого ланцюга $ED(G)$ діаметром G (див. Теорема 5), що дало можливість завершити характеристику у.е.т.-графів діаметра 3 (див. Підрозділ 4.3).

Окремо було поставлено питання зв'язку діаметра та типів компонент слабкої зв'язності $ED(G)$. Після емпіричних досліджень (ЕА) було сформовано і доведено гіпотезу, що $ED(G)$ у.е.т.-графа G діаметра 4 не може містити напівголюї компоненти слабкої зв'язності (див. Теорема 7). Це дало можливість повністю охарактеризувати у.е.т.-графи діаметра 4, що є основним теоретичним результатом нашої роботи (див. Підрозділ 4.4).

Також еволюційний алгоритм побудував у.е.т.-графи, що не є ізоморфні простому циклу, але $ED(G)$ яких складається лише з голих компонент та знаходження у.е.т.-графів (див. Рис. 28) та у.е.т.-графи, $ED(G)$ яких містить породжений ланцюг довжини 5 (див. Рис 29, 30). Написаний еволюційний алгоритм можна узагальнити та використовувати для дослідження інші комбінаторні задачі.

Клас унікально-ексцентрично-точкових графів може мати застосування в мультиагентних системах. Можна розглянути алгоритми пошуку лідера та консенсусу в у.е.т. системах, де кожен агент бачить єдиного іншого найкращого лідера. Тобто в такій системі жоден агент не вагається між кількома іншими при голосуванні.

Основні результати магістерської роботи були апробовані на двох конференціях та в статті. Перші теоретичні результати були викладені на *Xth All-Ukrainian Conference of Young Scientists in Physics and Mathematics* під назвою “*Eccentric digraphs of unique point eccentric graphs*” [5]. Особливості еволюційного алгоритму на результати пошуку у.е.т.-графів цим способом були викладені на *Shevchenkivska Vesna – 2023* під назвою “*Еволюційний пошук унікально-ексцентрично-точкових графів із заданими властивостями*” [7]. Основні теоретичні результати опубліковані в статті [6] “*Eccentric digraphs of unique point eccentric graphs*”, журналу *Discrete Mathematics*, що індексується Scopus, Q1.

2 Основні поняття

2.1 Неорієнтовані графи

Неорієнтований граф G — це впорядкована пара (V, E) , де V — множина вершин, E — множина пар (у випадку неорієнтованого графа — неупорядкованих) вершин з V , які називаються *ребрами*. В цій роботі, ми розглядаємо лише скінченні прості графи. Пара вершин графа u, v графа G називається *суміжними*, якщо $\{u, v\} \in E(G)$. Ребро $\{u, v\}$ будемо скорочено позначати, як uv .

Графи G і H називаються *ізоморфними*, якщо існує бієкція між їх множинами вершин $f : V(G) \rightarrow V(H)$ така, що будь-які дві вершини u і v графа G є суміжними в G тоді й тільки тоді, коли $f(u)$ і $f(v)$ є суміжними в H . Позначається $G \simeq H$. Граф H є *породженням підграфом* графа G , якщо $V(H) \subseteq V(G)$ та $\forall u, v \in V(H) : uv \in E(H) \Leftrightarrow uv \in E(G)$.

Околом $N(u)$ вершини u графа G називається множина вершин, суміжних із нею, тобто $N_G(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$. *Замкненим околом* вершини u графа G називається множина вершин $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. *Степінь вершини* u — це число $d_G(u) = |N_G(u)|$.

Зв'язний граф є *деревом*, якщо він не містить циклів. Вершина u графа G називається *висячою* або *листочком*, якщо $d_G(u) = 1$.

Дерево на n вершинах з не більш ніж 2 висячими вершинами називають *шляхом*, позначають P_n . Деревом на n вершинах, у якому не більше ніж 1 вершина є невисячою називатимемо *зіркою* $K_{1,n-1}$. Деревом на n вершинах, у якому рівно 2 вершини є невисячими називатимемо *бі-зіркою*.

Будемо використовувати K_n , $K_{m,n}$ та C_n на позначення повного графа на n вершинах, повного двочасткового графа із частинами потужностей m, n та простого циклу на n вершинах, відповідно.

Доповненням графа G називають граф \bar{G} , що має множину вершин $V(\bar{G}) = V(G)$ та множину ребер $E(\bar{G}) = \{uv : uv \notin E(G)\}$. *Об'єднанням* графів G, H називають граф $G \cup H$ із $V(G \cup H) = V(G) \sqcup V(H)$ та $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Для графа G та числа $m \in \mathbb{N}$, через mG позначається об'єднання m ізоморфних копій графа G . Для множини вершин $A \subset V(G)$, через $G[A]$ позначається підграф G породжений множиною A . Також, ми покладаємо $G - A = G[V(G) \setminus A]$ та $G - u = G - \{u\}$ для довільної вершини $u \in V(G)$.

Множина вершин $A \subset V(G)$ називається *домінантною*, якщо для кожної вершини $u \in V(G) \setminus A$ існує вершина $a \in A : au \in E(G)$.

Граф називається *зв'язним*, якщо між кожною парою його вершин існує шлях, який їх сполучає (інакше, він називається *незв'язним*). *Компонентою зв'язності* графа називається його максимальний (за включенням) зв'язний підграф.

На вершинах графа введемо G стандартну метрику d_G , де $d_G(u, v)$ дорівнює довжині (тобто кількості ребер) найкоротшого шляху між u та v у G . Для вершини $u \in V(G)$ та множини $A \subset V(G)$ зв'язного графа G , покладемо $d_G(u, A) = \min\{d_G(u, a) : a \in A\}$. *Метричним інтервалом* для пари вершин $u, v \in V(G)$ зв'язного графа G , будемо позначати множину вершин між ними, тобто $[u, v]_G = \{x \in V(G) : d_G(u, x) + d_G(x, v) = d_G(u, v)\}$.

Ексцентриситетом вершини u зв'язного графа G позначають число $\text{ecc}_G(u) = \max\{d_G(u, v) : v \in V(G)\}$. Вершина $v \in V(G)$ називається *ексцентричною вершиною* для вершини u у графі G , якщо $\text{ecc}_G(u) = d_G(u, v)$. *Радіусом* графа G позначимо число $\text{rad}(G) = \min\{\text{ecc}_G(u) : u \in V(G)\}$, *діаметром* G позначимо $\text{diam}(G) = \max\{\text{ecc}_G(u) : u \in V(G)\} = \max\{d_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$. Пара вершин u, v графа G називається *діаметральною*, якщо $d_G(u, v) = \text{diam}(G)$.

Центром зв'язного графа G називатимемо множину вершин $\{u : \text{ecc}(u) = \text{rad}(G)\}$. *Периферією* графа G називатимемо множину вершин $\{u : \text{ecc}(u) = \text{diam}(G)\}$. Граф G є *самоцентральним* графом, якщо його центр дорівнює всій множині вершин графа $V(G)$.

Вершина називається *точкою з'єднання*, якщо її видалення збільшує кількість компонент зв'язності. Тобто, для зв'язного графа G , вершина $u \in V(G)$ є *точкою з'єднання* в G тоді й тільки тоді, коли $G - u$ є незв'язним. Граф називається *двозв'язним*, якщо він не містить точок з'єднання. *Блоком графа* G називається його максимальний (за включенням) двозв'язний підграф. Граф називається *графом блоків*, якщо кожен його блок є повним підграфом. Наприклад, у дереві кожен блок є ребром K_2 , тому будь-яке дерево є графом блоків.

Наступний фундаментальний результат про центр графа буде використаний у характеристизації у.е.т. графів блоків (див. Теорема 5).

Твердження 1. [9] *Центр зв'язного графа лежить у блоці.*

2.2 Орієнтовані графи

Орієнтованим графом або, скорочено, *орграфом* називаємо впорядковану пару $D = (V, A)$, де $V = V(D)$ є множиною його *вершин*, а $A = A(D) \subset V \times V$ - множиною *дуг*. Існування дуги між парою вершин $(u, v) \in A(D)$

будемо також позначати, як $u \rightarrow v$. Дуга виду (u, u) називається *петлею* на вершині u . *Вихідний степінь* $d_D^+(u)$ вершини $u \in V(D)$ це кількість дуг виду $u \rightarrow v$, $v \in V(D)$. Подібно, *вхідний степінь* $d_D^-(u)$ вершини u це кількість дуг виду $v \rightarrow u$, $v \in V(D)$. *Вихідний окіл* вершини u це множина вершин $N_D^+(u) = \{v \in V(D) : u \rightarrow v\}$. *Вхідний окіл* вершини u це множина $N_D^-(u) = \{v \in V(D) : v \rightarrow u\}$. З означень слідує, що $d_D^+(u) = |N_D^+(u)|$ та $d_D^-(u) = |N_D^-(u)|$ для усіх $u \in V(D)$. Дві вершини $u, v \in V(D)$ називаються *суміжними*, якщо $u \rightarrow v$ або $v \rightarrow u$ в D .

Два орграфи D_1 та D_2 є *ізоморфними*, якщо між ними існує *ізоморфізм*, тобто бієктивна функція $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$, така що $u \rightarrow v$ в D_1 тоді й тільки тоді, коли $f(u) \rightarrow f(v)$ в D_2 . Будемо позначати це, як $D_1 \simeq D_2$.

Орграф D називається *слабко-зв'язним*, якщо відповідний неорієнтований граф (який можна отримати із D ігноруванням орієнтації ребер та петель) є зв'язним. Максимальний слабко-зв'язний підграф D називається *слабкою компонентою*.

Шляхом в орграфі D називають впорядкований набір вершин u_1, \dots, u_m , таку що $u_i \rightarrow u_{i+1}$ для всіх $1 \leq i \leq m-1$. Шлях називається *простим*, якщо всі його вершини (та дуги) є попарно різними. Простий шлях u_1, \dots, u_m називається *породженням*, якщо із $u_i \rightarrow u_j$ в D слідує $j = i + 1$.

m -циклом в орграфі D називатимемо D впорядковану множину m різних вершин u_1, \dots, u_m , де $u_i \rightarrow u_{i+1}$ та $u_m \rightarrow u_1$ в D . Звідси слідує, що 1-цикл це просто петля. 2-цикл часто позначають, як $u_1 \leftrightarrow u_2$.

Орграф D називають *функціональним*, якщо $d_D^+(u) = 1$ для кожної $u \in V(D)$. Із означення слідує, що існує бієкція між функціональними орграфами та функціями виду $f : V \rightarrow V$, де V - множина вершин орграфа. Щоб описати структуру функціональних орграфів, нам потрібно дати ще одне означення. *Вхідне дерево* є орграфом D , отриманим із (неорієнтованого) дерева X шляхом орієнтації кожного ребра X в напрямку якоїсь фіксованої вершини u (більш формально, $V(T) = V(X)$ та $A(T) = \{(x, y) : xy \in E(X) \text{ та } y \in [x, u]_X\}$). Відповідна вершина u називається *коренем* дерева T . Можна легко описати графову структуру скінченних функціональних орграфів. А саме, кожна слабка (слабко-зв'язна) компонента D' функціонального орграфа D містить єдиний цикл C , такий що кожна слабка компонента в $D' - A(C)$ є *вхідним деревом* T , а $V(C)$ є множиною коренів цих дерев T .

Інший тип функціональних орграфів, який буде часто виникати у нашій роботі будується таким чином: для пари невід'ємних цілих чисел $m, k \in \mathbb{Z}_+$,

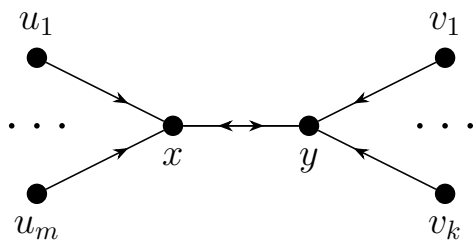


Рис. 1: Функціональний оргграф $D_{m,k}$.

позначатимемо $D_{m,k}$ оргграф, що має множину вершин

$$V(D_{m,k}) = \{x, y, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k\}$$

та множину дуг

$$A(D_{m,k}) = \{(x, y), (y, x)\} \cup \{(u_i, x), (v_j, y) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k\}$$

(див Рис. 1). Зауважимо, що $D_{0,0}$ позначає просто 2-цикл.

3 Попередні результати

Означення 1. Зв'язний граф G називається унікально ексцентрично точковим, або скорочено у.е.т.-графом, якщо його ексцентричний орграф $ED(G)$ є функціональним. Іншими словами, G є у.е.т.-графом, якщо кожна вершина G має єдину ексцентричну вершину в G .

Із означення слідує, що єдиним у.е.т.-графом G з $\text{diam}(G) = 1 \in K_2$. У.е.т.-графи діаметра два також можна легко охарактеризувати.

Теорема 1. [13] Зв'язний граф G є у.е.т.-графом із $\text{diam}(G) = 2$ тоді й тільки тоді, коли $\bar{G} \simeq mK_2$.

У першій (хронологічно) статті з цієї теми Parthasarathy and R. Nandakumar (1983) [13] довели, що кожен у.е.т.-граф G із $\text{diam}(G) = 3$ є або самоцентральним або *верхньо-діаметрально-критичним* (зв'язним графом із властивістю, що додавання будь-якого нового ребра зменшує діаметр). В нашій роботі ми узагальнюємо їхній результат до повної характеристизації G із $\text{diam}(G) = 3$ (див. Теорема 6).

Зауважимо, що клас у.е.т.-графів не є тривіальним. Наприклад, навіть самоцентральні у.е.т.-графи (також відомі як *парні графи* [4] або *діаметральні графи* [12]) є дуже цікавим окремим класом. Із цього класу у.е.т.-графів можна природньо виокремити кілька підкласів: збалансовані, гармонійні, симетрично-парні графи [4]. Проте, обмежившись до деяких класів, у.е.т.-графи можна гарно охарактеризувати.

Теорема 2. [13] Дерево T із $n \geq 2$ вершинами є у.е.т.-графом тоді й тільки тоді, коли T має рівно 2 центральні та 2 периферійні вершини.

Наступна лема є простим технічним результатом, який буде дуже часто використаний впродовж усієї цієї роботи.

Лема 1. [13] Нехай $uv \in E(G)$ є ребро у.е.т.-графа G . Якщо $\text{ecc}_G(u) \neq \text{ecc}_G(v)$, то u і v має одну й ту ж ексцентричну вершину у G .

Наступна характеристизація самоцентральних у.е.т.-графів була доведена в статті [13].

Теорема 3. [13] У.е.т.-граф є самоцентральним тоді й тільки тоді, коли кожна його вершина є ексцентричною (для деякої вершини цього графа).

У наступному розділі ми покажемо, що самоцентральні у.е.т.-графи також можна охарактеризувати в термінах їх ексцентричних оргграфів (див. Наслідок 1).

Також можна легко показати, що діаметр у.е.т.-графа G не може дорівнювати подвоєному радіусу цього графа. Цей простий результат буде використано в нашій характеристичній блокових у.е.т.-графів (див. Теорема 5).

Твердження 2. [13] *Для кожного у.е.т.-графа G виконується нерівність $\text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G) - 1$.*

4 Основні теоретичні результати

4.1 Орграфи ексцентриситетів у.е.т.-графів

Зі структури функціональних графів ми знаємо, що якщо G є у.е.т.-графом, то кожна слабка компонента його орграфа ексцентриситетів $ED(G)$ складається із єдиного циклу C та кількох вхідних дерев напрямлених до C . Наступне спостереження є відправною точкою у вивченні структури орграфів ексцентриситетів у.е.т.-графів.

Твердження 3. [5] *Ексцентричний орграф у.е.т.-графа з $n \geq 2$ вершинами може мати цикли тільки довжини 2.*

Доведення. Нехай G є у.е.т.-графом із $n \geq 2$ вершинами, а $u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_m \rightarrow u_1$ є циклом у $ED(G)$. Тоді $\text{ecc}_G(u_1) = d_G(u_1, u_2) \leq \text{ecc}_G(u_2) = d_G(u_2, u_3) \leq \dots \leq \text{ecc}_G(u_m) = d_G(u_m, u_1) \leq \text{ecc}_G(u_1) = \dots = \text{ecc}_G(u_m)$. А саме $\text{ecc}_G(u_1) = d_G(u_1, u_2) = d_G(u_m, u_1)$. За означенням у.е.т.-графа кожна вершина має єдину ексцентричну вершину, тому $u_2 = u_m$. Тому $m \leq 2$, але оскільки $n \geq 2$ маємо $m = 2$. \square

Твердження 3 дає критерій для характеристики у.е.т.-графів графів, які є самоцентральними в термінах їхніх орграфів ексцентриситетів.

Наслідок 1. *Нехай G є у.е.т.-графом із $n \geq 2$ вершинами. Тоді G є самоцентральним тоді й тільки тоді, коли кожна слабка компонента $ED(G)$ ізоморфна $D_{0,0}$.*

Доведення. \Rightarrow Якщо G є самоцентральним, тоді із Теорема 3 випливає, що кожна вершина G є ексцентричною для деякої іншої. Це означає, що функція $f : V(G) \rightarrow V(G)$, яка відповідає $ED(G)$, є сюр'єкцією. Оскільки G скінченний, то f є бієкцією, тобто кожна слабка компонента D' у $ED(G)$ є циклом. Із Твердження 3 випливає, що кожна D' є 2-циклом, отже $D' \simeq D_{0,0}$.

\Leftarrow Якщо кожна слабка компонента $ED(G)$ ізоморфна $D_{0,0}$, то кожна вершина G є ексцентричною. Тоді за Теоремою 3 G є самоцентральним. \square

Розіб'ємо слабкі компоненти ексцентричних орграфів на 3 типи. Отже, будемо називати слабку компоненту D' в $ED(G)$ (для у.е.т.-графа графа G):

- голою, якщо $D' \simeq D_{0,0}$;

- *напівголою*, якщо рівно одна із двох вершин 2-циклу в D' має вхідний степінь 1;
- *повною*, якщо D' не є ні голою, ні напівголою (тобто обидві вершини на 2-циклі мають вхідні степені більші за 1).

Твердження 4. *Якщо оргграф ексцентриситетів у.е.т.-графа з $n \geq 3$ вершинами має неповну слабку компоненту (голу або напівголу), то він має принаймні дві слабкі компоненти.*

Доведення. Нехай G є у.е.т.-графом із $n \geq 3$ вершинами, x, y є діаметральною парою в G . Оскільки, $n \geq 3$, G не може бути повним графом (із означення у.е.т.-графа), тому $\text{diam}(G) \geq 2$. Позначимо слабку компоненту $ED(G)$, яка містить x, y через D' . Зафіксуємо вершину $u \in [x, y]_G \cap N_G(x)$. Маємо $\text{ecc}_G(u) \geq d_G(u, y) = d_G(x, y) - 1 = \text{diam}(G) - 1$. Якщо $\text{ecc}_G(u) = \text{diam}(G)$, то $u \notin V(D')$ (оскільки кожна діаметральна пара є 2-циклом і лежить в окремій слабкій компоненті в $ED(G)$), тому $ED(G)$ має принаймні дві слабкі компоненти. У другому випадку маємо $\text{ecc}_G(u) = \text{diam}(G) - 1$, отже за Лемою 4.2 маємо дугу $u \rightarrow y$ в $ED(G)$. Схожим чином розглянемо вершину $v \in [x, y]_G \cap N_G(y)$. Якщо $\text{ecc}_G(v) = \text{diam}(G)$, то $ED(G)$ має принаймні дві слабкі компоненти. Якщо $\text{ecc}_G(v) = \text{diam}(G) - 1$, то $v \rightarrow x$ в $ED(G)$. В останньому випадку компонента D' є повною у $ED(G)$ (що суперечить припущенню). Отже, якщо $ED(G)$ має неповну компоненту, то він має принаймні дві слабкі компоненти. \square

Зауважимо, що повні компоненти оргграфа ексцентриситетів у.е.т.-графа можуть містити породжені шляхи довжини більшої за 1. На рисунку 2 зображено у.е.т.-граф G , чий оргграф ексцентриситетів $ED(G)$ має породжені шляхи довжин 2 (див. Рис. 3). Проте, діаметр графа G обмежують максимальні довжини таких породжених шляхів графа $ED(G)$.

Твердження 5. *Нехай G у.е.т.-граф із $\text{diam}(G) \geq 4$, тоді довжина найдовшого породженого шляху в $ED(G)$ не перевищує $\left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{2} \right\rfloor - 1$.*

Доведення. Нехай $u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_m$ є довільним найдовшим породженим шляхом у $ED(G)$. Тоді $(u_i, u_{i+1}) \notin A(ED(G))$ для всіх $0 \leq i \leq m - 1$. Також із Твердження 3 слідує, що остання вершина шляху u_m лежить на 2-циклі в $ED(G)$, нехай $u_m \leftrightarrow v$. Оскільки, G у.е.т.-графом, $\text{ecc}_G(u_{i+1}) > \text{ecc}_G(u_i)$ для всіх $0 \leq i \leq m - 1$. Тому, $\text{ecc}_G(u_0) \leq \text{ecc}_G(u_m) - m$.

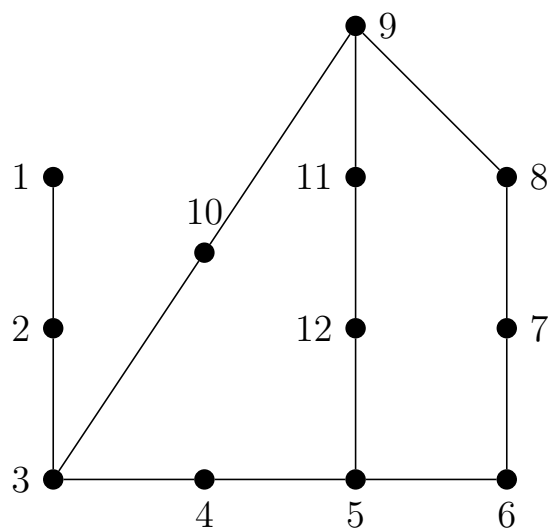


Рис. 2: У.е.т.-граф G .

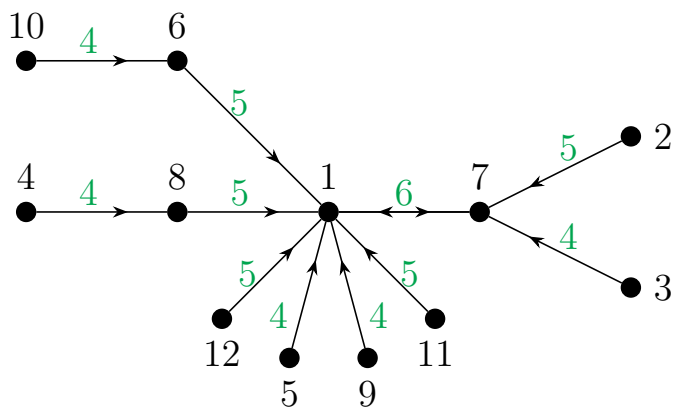


Рис. 3: Орграф ексцентриситетів $ED(G)$ для у.е.т.-графа G на Рис. 2. Зеленим кольором позначено відстані між парами вершин у графі G .

Для $m = 1$ твердження виконується. Нехай $m \geq 2$. У цьому випадку маємо $\text{ecc}_G(u_m) = d_G(u_m, v) \leq d_G(u_m, u_0) + d_G(u_0, v) \leq 2\text{ecc}_G(u_0) - 2 \leq 2(\text{ecc}_G(u_m) - m) - 2$, що веде за собою $m \leq \frac{\text{ecc}_G(u_m)}{2} - 1 \leq \left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{2} \right\rfloor - 1$. \square

Також зауважимо, що оцінка Твердження 5 є точною для у.е.т.-графів діаметра не більше 6. Наприклад, граф G із Рис. 2 має $\text{diam}(G) = 6$, та два найдовші породжені шляхи в $\text{ED}(G)$ рівні $\left\lfloor \frac{\text{diam}(G)}{2} \right\rfloor - 1 = 2$. Легко бачити, що для у.е.т.-графів G із $\text{diam}(G) = 3$ довжина найдовшого породженого шляху в $\text{ED}(G)$ не перевищує одиниці.

Як ми знаємо із Наслідка 1, у.е.т.-граф G є самоцентральним тоді й тільки тоді, коли кожна слабка компонента $\text{ED}(G)$ є голою. Звідси слідує, що такий граф G може мати тільки парну кількість вершин. Щобільше, ми доводимо наступний результат:

Твердження 6. *Кожний самоцентральний у.е.т.-граф G має принаймні $2\text{diam}(G)$ вершин. До того ж рівність $|V(G)| = 2\text{diam}(G)$ досягається, тоді й тільки тоді, коли $G \simeq K_2$ або $G \simeq C_m$ для деякого парного $m \geq 4$.*

Доведення. Зафіксуємо довільну діаметральну пару $x, y \in V(G)$ та деякий найкоротший шлях $x - u_1 - \dots - u_{\text{diam}(G)-1} - y$ між x та y в G . Для кожної $1 \leq i \leq \text{diam}(G) - 1$ зафіксуємо ексцентричну вершину v_i для вершини u_i в G . Зауважимо, що $v_i \neq x, y, u_j$ для всіх $1 \leq j \leq \text{diam}(G) - 1$ (адже G є самоцентральним). Оскільки кожна вершина u_i , $1 \leq i \leq \text{diam}(G) - 1$ є периферійною в G , то й кожна v_i є периферійною в G . Звідси $|V(G)| \geq 2\text{diam}(G)$.

Тепер доведемо другу частину твердження:

\Leftarrow Якщо $G \simeq K_2$, то умова очевидно виконується. Подібно якщо $G \simeq C_m$ для кожного парного $m \geq 4$, то G є симетричним парним графом (а отже самоцентральним у.е.т.-графом) із $\text{diam}(G) = \frac{m}{2}$.

\Rightarrow Якщо $\text{diam}(G) = 1$, то G є повним графом, тобто $G \simeq K_2$. Нехай $d = \text{diam}(G) \geq 2$. Із Наслідка 1 слідує, що $\text{ED}(G)$ має рівно d слабких компонент, кожна з яких є голою. Нам потрібно показати, що кожна вершина G має степінь 2. Від супротивного, припустимо, що це не так, тоді існує вершина $a_1 \in V(G)$ із $\deg_G(a_1) \neq 2$. Нехай $a_1 \leftrightarrow b_1$ є відповідною слабкою компонентою в $\text{ED}(G)$. Зафіксуємо найкоротший шлях $a_1 - a_2 - \dots - a_d - b_1$ між a_1 та b_1 в G . Для кожної $1 \leq i \leq d$ через b_i позначимо ексцентричну вершину для a_i в G (тобто, $a_i \leftrightarrow b_i$, $1 \leq i \leq d$ є слабкими компонентами в $\text{ED}(G)$).

Якщо $\deg_G(a_1) = 1$, тоді $\text{ecc}_G(a_1) = \text{ecc}_G(a_2) + 1$, маємо суперечність із тим, що G є самоцентральним.

Якщо ж $\deg_G(a_1) \geq 3$, то зафіксуємо дві різні суміжні вершини $b_i, b_j \in N_G(a_1) \setminus \{a_2\}$, нехай $i < j$. Зафіксуємо шлях $b_i - a_1 - \dots - a_i$ між b_i та a_i (тобто парою деякого 2-цикла в $ED(G)$). Тоді цей шлях має довжину $1 + i - 1 = i < j \leq d$, що є суперечністю.

Отже, G є (скінченим) зв'язним графом із $\deg_G(u) = 2$ для всіх $u \in V(G)$. Звідси слідує, що $G \simeq C_m$ для парного числа $m = 2 \text{diam}(G)$. \square

Зауважимо, що існують 2 самоцентральні у.е.т.-графи на 6 вершинах ($K_6 - 3K_2$ та C_6), та рівно 3 такі граfi на 8 вершинах ($K_8 - 4K_2$, C_8 , $K_{4,4} - 4K_2$). Комп'ютерний перебір показав, що кількість таких графів на 10 вершинах дорівнює 24.

4.2 У.е.т.-графи, які є графами блоків

Результати цього розділу були частково досліджені в роботі Владислава Гапоненка [8], але ми запропонували спрощене доведення Теорема 5. Також для повноти викладу теорії ми надаємо інші результати щодо у.е.т.-графів, які є графами блоків.

Спільні риси графів блоків та дерев прямо розкриваються в контексті у.е.т.-графів. Критерій для у.е.т.-дерев (див. Теорема 2) був доведений у статті [13]. Виявляється, що цей результат можна узагальнити для графів блоків. Для цього нам потрібно використати критерій метричної характеристики графів блоків та довести одну технічну лему.

Теорема 4. [11] *Зв'язний граф G є графом блоків тоді й тільки тоді, коли його метрика d_G задовольняє “умові 4 точок”: для будь-яких $x, y, z, t \in V(G)$ виконується*

$$d_G(x, y) + d_G(z, t) \leq \max\{d_G(x, z) + d_G(y, t), d_G(x, t) + d_G(y, z)\}.$$

Зауважимо, що дерева можна охарактеризувати, як граfi без трикутників, які задовольняють умові чотирьох точок.

Лема 2. *У зв'язному графі блоків кожна ексцентрична вершина є периферійною.*

Доведення. Нехай G є зв'язним графом блоків, v є ексцентричною вершиною для деякої вершини u в G . Зафіксуємо діаметральну пару x, y в G та

застосуємо Теорему 4 для вершин u, v, x, y :

$$\begin{aligned} \text{ecc}_G(u) + \text{diam}(G) &= d_G(u, v) + d_G(x, y) \\ &\leq \max\{d_G(u, x) + d_G(v, y), d_G(u, y) + d_G(v, x)\}. \end{aligned}$$

Якщо $d_G(u, x) + d_G(v, y) \leq d_G(u, y) + d_G(v, x)$, це веде за собою

$$\text{ecc}_G(u) + \text{diam}(G) \leq d_G(u, y) + d_G(v, x) \leq \text{ecc}_G(u) + \text{diam}(G)$$

$\text{ecc}_G(u) = d_G(u, y)$ та $d_G(v, x) = \text{diam}(G)$. Випадок $d_G(u, x) + d_G(v, y) \geq d_G(u, y) + d_G(v, x)$ розглядається аналогічно (тут $d_G(v, y) = \text{diam}(G)$). Отже, v є периферійною вершиною в G . \square

Тепер ми можемо довести головний результат цього розділу.

Теорема 5. *Зв'язний граф блоків із $n \geq 2$ вершин є у.е.т.-графом тоді й тільки тоді, коли він має рівно 2 центральні та рівно 2 периферійні вершини.*

Доведення. \Rightarrow Нехай G є у.е.т.-графом блоків із $n \geq 2$ вершинами. Якщо $\text{rad}(G) = 1$, то $\text{diam}(G) \leq 2$. У цьому випадку $G \simeq K_2$ (див Теорема 1). Тепер нехай $\text{rad}(G) \geq 2$. Щоб показати, що G має рівно 2 периферійні вершини, ми (від супротивного) припустимо, що x, y та a, b є двома різними діаметральними парами в G . Оскільки G є у.е.т.-графом $\{x, y\} \cap \{a, b\} = \emptyset$. За Теоремою 4 для вершин a, b, x, y , маємо:

$$2 \text{diam}(G) = d_G(a, b) + d_G(x, y) \leq \max\{d_G(a, x) + d_G(b, y), d_G(a, y) + d_G(b, x)\}.$$

Якщо $d_G(a, x) + d_G(b, y) \geq d_G(a, y) + d_G(b, x)$, то $2 \text{diam}(G) \leq d_G(a, x) + d_G(b, y)$. Тобто $d_G(a, x) = \text{diam}(G)$. Маємо суперечність - a та y є двома різними ексцентричними вершинами для x . Аналогічно, із $d_G(a, x) + d_G(b, y) \leq d_G(a, y) + d_G(b, x)$ слідує, що $d_G(b, x) = \text{diam}(G)$. Отримані суперечності доводять, що G має рівно дві периферійні вершини, нехай x, y . За Лемою 2, x та y є єдиними ексцентричними вершинами в G .

Тепер доведемо, що G має рівно 2 центральні вершини. Зафіксуємо центральну вершину $u \in V(G)$. Без втрати загальності, нехай x є ексцентричною вершиною до u . Також зафіксуємо вершину $v \in [u, x]_G \cap N_G(u)$. Маємо $d_G(x, u) = \text{rad}(G)$ and $d_G(x, v) = \text{rad}(G) - 1$ (тому з означення

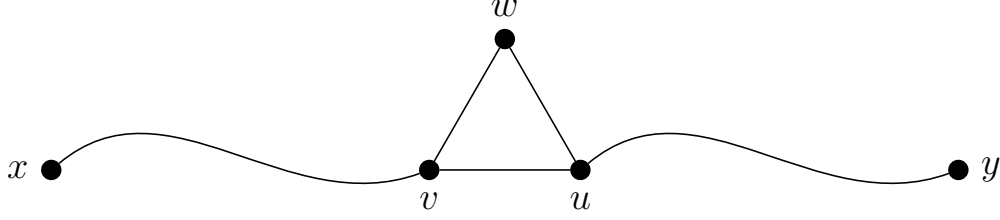


Рис. 4: Три центральні вершини u, v, w лежать в одному блоці.

радіуса $x \neq \text{ecc}(v)$). Нехай y є ексцентричною вершиною для v в G , тоді $d_G(y, v) = \text{ecc}_G(v) \geq \text{rad}(G)$. З іншого боку (оскільки u є центральною вершиною) $d_G(y, v) \leq d_G(y, u) + 1 \leq \text{rad}(G) - 1 + 1 = \text{rad}(G)$. Тому $d_G(y, v) = \text{rad}(G)$. Таким чином G має принаймні 2 центральні вершини.

Припустимо, що є інша центральна вершина $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Поєднавши Твердження 1 з означенням графа блоків отримуємо, що $wu, wv \in E(G)$ (див. Рис. 4). Без втрати загальності припустимо, що x є ексцентричною вершиною для w в G . Тоді $d_G(w, x) = \text{rad}(G)$, а $d_G(w, y) = \text{rad}(G) - 1$ (оскільки w суміжна із вершиною v , яка має $d_G(v, y) = \text{rad}(G)$).

Зафіксуємо вершину $t \in [w, y]_G \cap N_G(w)$. Маємо $d_G(t, y) = \text{rad}(G) - 2$ також $t \neq u, v$ оскільки $d_G(u, y) = \text{rad}(G) - 1$ та $d_G(v, y) = \text{rad}(G)$. Якщо $ut \in E(G)$, то вершини u, v, w, t породжують двозв'язний підграф у G , тобто v та t лежать в одному блоці. В цьому випадку $vt \in E(G)$. А тому $d_G(v, y) \leq d_G(v, t) + d_G(t, y) = 1 + \text{rad}(G) - 2 = \text{rad}(G) - 1$, що дає суперечність. Таким чином лишається останній варіант, коли $d_G(u, t) = 2$ (та існує шлях $u - w - t$). Використаємо Теорему 4 для вершин u, t, w, y , щоб отримати суперечність:

$$\begin{aligned} 1 + \text{rad}(G) &= d_G(u, t) + d_G(w, y) \\ &\leq \max\{d_G(u, w) + d_G(t, y), d_G(u, y) + d_G(t, w)\} \\ &= \max\{1 + \text{rad}(G) - 2, \text{rad}(G) - 1 + 1\} = \text{rad}(G). \end{aligned}$$

Отже, такий граф G справді має рівно 2 центральні вершини.

⇐ Нехай x, y - дві периферійні вершини, а вершина u - деяка центральна вершина. Використавши Лему 2 без втрати загальності нехай x є ексцентричною вершиною для u в графі G , $d(u, x) = \text{rad}(G)$. Зафіксуємо вершину $v \in [u, x]_G \cap N_G(u)$ та покажемо, що v є центральною вершиною. Справді $d(v, x) = \text{rad}(G) - 1$, та $\forall a \in V(G) \setminus \{x\} : d(v, a) \leq d(v, u) + d(u, a) \leq 1 + \text{rad}(G) - 1 = \text{rad}(G)$. За Лемою 2 вершина y є єдиною ексцентричною для v , $d(v, y) = \text{rad}(G)$. Зафіксуємо вершину $w \in [v, y]_G \cap N_G(v)$, то з аналогічних міркувань w - є центральною вершиною, але їх тільки 2, тому $w = u$,

а отже $d(u, y) = \text{rad}(G) - 1$, тобто u має єдину ексцентричну вершину x .

Таким чином ми показали, що дві центральні вершини u, v мають єдині ексцентричні, залишилось показати, що кожна інша (нецентральна) вершина має теж єдину ексцентричну.

Розіб'ємо множину вершин графа на диз'юнктне об'єднання 2 частин $V(G) = W \sqcup U$, де $W = \{a \mid u \text{ не лежить на найкоротшому шляхові } a - \dots - v\}$, $U = \{a \mid v \text{ не лежить на найкоротшому шляхові } a - \dots - u\}$. Це розбиття справді є диз'юнктним, бо якщо існує вершина $a : a \in W$ та $a \in U$, тоді дві центральні вершини u, v не є блоком, при видаленні ребра $u - v$ маємо шлях $u - \dots - a - \dots - v$, а отже суперечність із максимальністю двозв'язного підграфа в означенні блока. До того ж єдине ребро між частинами W, U - це ребро uv - з аналогічних міркувань (якщо існують $a \in W, b \in U : ab \in E(G)$: при видаленні ребра uv маємо шлях $v - \dots - a - b - \dots - u$).

Звідси випливає, що ребро uv належить будь-якому шляху $a - \dots - v - u - \dots - b$, $\forall a \in W, \forall b \in U$. Тоді $\forall a \in W : v \in$ будь-якому шляхові $a - \dots - v - u$, $\forall u \in U, \forall b \in U : u \in$ будь-якому шляхові $b - \dots - u - v$, $\forall v \in W, \forall s \in V(G) : d(s, u) \neq d(s, v)$, а саме $d(s, u) = d(s, v) \pm 1$, бо u, v - суміжні вершини.

Покажемо, що кожна вершина $a \in W \setminus \{v\}$ має єдину ексцентричну. За Лемою 2 у нас є лише 2 кандидати на ексцентричну вершину - це периферійні x, y , тобто достатньо показати, що $d(a, x) < d(a, y)$. Зауважимо, що за попередньою побудовою $x \in W, y \in U$. Тоді $d(a, x) \leq d(a, v) + d(v, x) = d(a, v) + \text{rad}(G) - 1 < d(a, v) + \text{rad}(G) = d(a, v) + d(v, y) = d(a, y)$.

Аналогічно (в силу симетрії) $a \in U \setminus \{u\}$ має єдину ексцентричну. Таким чином G є у.е.т.-графом. \square

З допомогою Теорема 5, ми можемо повністю описати ексцентричні орграфи графів блоків.

Твердження 7. *Нехай G є у.е.т.-графом блоків на $n \geq 2$ вершинах, тоді $\text{ED}(G) \simeq D_{m,k}$, де $m = k = 0$ або $m = k = 1$ або $m, k \geq 2$. Навпаки, для кожної такої пари m, k існує у.е.т.-граф блоків (навіть дерево) із $\text{ED}(G) \simeq D_{m,k}$.*

Доведення. За Лемою 2 та Теоремою 5 такий граф G має рівно 2 периферійні вершини (позначимо x, y), які є єдиними ексцентричними. Тому $\text{ED}(G) \simeq D_{m,k}$ для $m, k \geq 0$. Якщо G має дві вершини, то $G \simeq K_2$ та $\text{ED}(G) \simeq D_{0,0}$. Тепер нехай $n \geq 3$, тоді $m + k \neq 0$, також G не може бути повним графом, отже $\text{diam}(G) \geq 2$. Зафіксуємо дві вершини $u \in$

$[x, y]_G \cap N_G(x)$ та $v \in [x, y]_G \cap N_G(y)$. За Теоремою 5 та Лемою маємо, що $\text{ecc}_G(u) = \text{ecc}_G(v) = \text{diam}(G) - 1$ та $u \rightarrow y, v \rightarrow x$ в $\text{ED}(G)$. Отже, $m, k \geq 1$.

Наостанок припустимо, що $d_{\text{ED}(G)}^-(y) = 2$ (аналогічно розглядається випадок $d_{\text{ED}(G)}^-(x) = 2$). Зафіксуємо вершину $u \in [x, y]_G \cap N_G(x)$ та вершину $u' \in [x, y]_G$ із $d_G(x, u') = 2$. Якщо $u' = y$, то $\text{diam}(G) = 2$ та $\text{ecc}_G(u) = 1 = d_G(u, x) = d_G(u, y)$, що є суперечністю. Таким чином $u' \neq y$. Оскільки $x \rightarrow y, u \rightarrow y$ в $\text{ED}(G)$ та $d_{\text{ED}(G)}^-(y) = 2$, виконується $u' \rightarrow x$ (так як ми довели, що x, y єдині ексцентричні вершини графа G). Звідси слідує, що $d_G(u', y) < \text{ecc}_G(u') = d_G(u', x) = 2$, а отже $d_G(u', y) = 1$. Звідси випливає, що $\text{diam}(G) = d_G(x, y) = 3$. Якщо $n = 4$, то $G \simeq P_4$ та $\text{ED}(G) \simeq D_{1,1}$. Інакше можна отримати суперечність, тобто нехай існує вершина $z \in V(G) \setminus \{x, u, u', y\}$. Використавши зв'язність G , ми можемо припустити, що $N_G(z) \cap \{x, u, u', y\} \neq \emptyset$. Оскільки G є у.е.т.-графом, то $\text{ecc}_G(z) = 2$. Без втрати загальності будемо вважати, що x є ексцентричною вершиною для вершини z в G . Тоді $N_G(z) = V(G) \setminus \{x\}$. Але в цьому випадку вершини u, u', y, z породжують неповний двозв'язний підграф у графі G (див. Рис. 5). Отримана суперечність доводить, що $m = k = 0$ або $m = k = 1$ або $m, k \geq 2$.

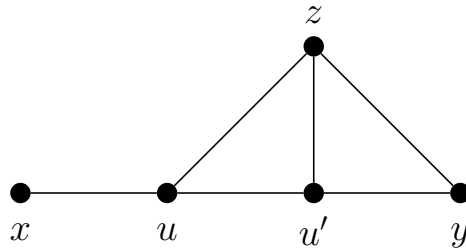


Рис. 5: Неповний двозв'язний підграф $G[\{u, u', y, z\}]$.

Тепер покажемо реалізованість кожного випадку. Нехай маємо пару невід'ємних цілих чисел m, k , що задовольняють якійсь із трьох умов. Якщо $m = k = 0$, то очевидно, що $\text{ED}(P_2) \simeq D_{0,0}$. Якщо ж $m = k = 1$ маємо $\text{ED}(P_4) \simeq D_{1,1}$. Наостанок, нехай $m, k \geq 2$. Покладемо

$$V(T) = \{x_1, \dots, x_6\} \cup \{u_1, \dots, u_{m-2}\} \cup \{v_1, \dots, v_{k-2}\},$$

$$E(T) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_j x_3 : 1 \leq j \leq m-2\} \cup \{v_l x_4 : 1 \leq l \leq k-2\}.$$

Легко побачити, що T є деревом із $\text{diam}(T) = 5$. Граф має єдину діаметральну пару x_1, x_6 (див. Рис. 6). Ексцентриситети вершин такі: $\text{ecc}_T(x_3) =$

$\text{ecc}_T(x_4) = 3$ та $\text{ecc}_T(w) = 4$ для всіх $w \in V(T) \setminus \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$. Вершина x є ексцентричною для вершин x_4, x_5, x_6 та v_1, \dots, v_{k-2} . Симетрично вершина y є ексцентричною для вершин x_1, x_2, x_3 та u_1, \dots, u_{m-2} . Отже, $\text{ED}(T) \simeq D_{m,k}$.

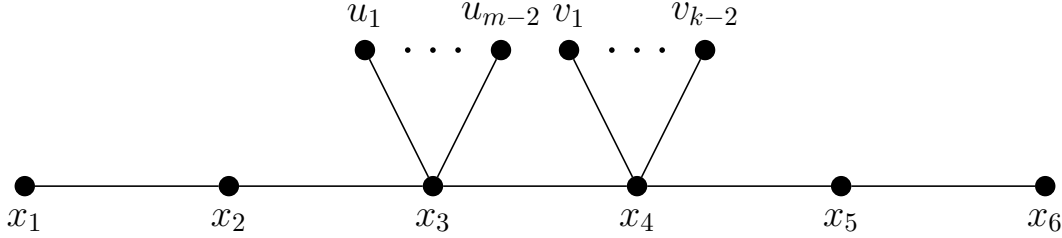


Рис. 6: Дерево T із $\text{ED}(T) \simeq D_{m,k}$ для $m, k \geq 2$.

□

4.3 У.е.т.-графі діаметра три

Пригадаємо, що у.е.т.-графі діаметра 2 характеризуються як повні графі із видаленим досконалим паросполученням (див. Теорема 1). Для у.е.т.-графів діаметра 3, була відома характеристика лише для самоцентрального графі [13]. Виявляється, що несамоцентрально у.е.т.-графі діаметра 3 теж мають чудову характеристику.

Теорема 6. *Нехай G зв'язний граф, який не є самоцентральним. Тоді G є у.е.т.-графом із $\text{diam}(G) = 3$ тоді й тільки тоді, коли його доповнення \overline{G} ізоморфне бі-зірці.*

Доведення. \Rightarrow Нехай x, y є діаметральною парою в G . Очевидно, що $N_G[x] \cap N_G[y] = \emptyset$ (бо $\text{diam}(G) = 3$). Оскільки G не є самоцентральним, то існує вершина $u \in V(G)$ із $\text{ecc}_G(u) = 2$. Якщо $x, y \in N_G(u)$, то $d_G(x, y) \leq 2$, що є суперечністю. Без втрати загальності припустимо, що $uy \notin E(G)$. Тоді $d_G(u, y) \geq 2 = \text{ecc}_G(u)$ implying $d_G(u, y) = 2$. Тоді вершина y є ексцентричною для вершини u в G . Це означає, що $N_G(u) = V(G) \setminus \{y\}$ (бо $\text{ecc}_G(u) = 2$ в у.е.т.-графі G , а отже відстань до всіх вершин крім ексцентричною дорівнює 1).

Тепер зафіксуємо вершину $v \in N_G(u) \cap N_G(y)$. Оскільки $N_G(u) = V(G) \setminus \{y\}$, то виконується $\text{ecc}_G(v) \leq 2$. Але $d_G(v, x) = 2$, оскільки у графі G лише 2 ексцентричні, а вершина y не може бути ексцентричною, бо це суміжна вершина до v , тоді $\text{ecc}_G(v) = 2$ та вершина x є ексцентричною для

v в G . Відповідно $N_G(v) = V(G) \setminus \{x\}$. Далі, оскільки для кожної вершини $z \in V(G) \setminus \{x, u, v, y\}$ ми маємо $uz, vz \in E(G)$, то $\text{ecc}_G(z) \leq 2$. Але $\text{diam}(G) = 3$, отже $\text{ecc}_G(z) = 2$ для всіх $z \in V(G) \setminus \{x, u, v, y\}$. Якщо $z \notin N_G(x) \cup N_G(y)$, тоді $d_G(z, x) = d_G(z, y) = 2 = \text{ecc}_G(z)$ - маємо суперечність із тим, що G є у.е.т.-графом. Таким чином множина $\{x, y\}$ є домінантною в G .

Оскільки для всіх $z \in V(G) \setminus \{x, y\}$ виконується, що $z \in N_G(x) \Delta N_G(y)$ (якби $z \in N_G(x) \cap N_G(y)$, то ми б отримали $d_G(x, y) \leq 2 = \text{diam}(G)$). Тоді ексцентрична вершина для кожної такої z - це або x або y . Це доводить, що $V(G) \setminus \{x, y\} \subset N_G(z)$. Інакше кажучи, підграф $G - \{x, y\}$ є повним у G . З цього випливає, що доповнення \overline{G} є бі-зіркою із двома центральними суміжними вершинами x, y , множина листків дорівнює $N_G(x) \cup N_G(y)$, and $N_{\overline{G}}(x) = N_G[y]$, $N_{\overline{G}}(y) = N_G[x]$.

\Leftarrow Нехай \overline{G} є бі-зіркою із двома центральними вершинами x та y . Тоді $N_G[x] \cap N_G[y] = \emptyset$, $\{x, y\}$ є домінантною множиною в G , а підграф $G - \{x, y\}$ є повним у G .

Оскільки $N_G[x] \cap N_G[y] = \emptyset$, то $d_G(x, y) \geq 3$. Але $G - \{x, y\}$ є повним підграфом в G , тому $d_G(x, y) = 3$. Тепер зафіксуємо дві вершини $u \in N_G(x)$ та $v \in N_G(y)$. Таким чином $u, v \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Для будь-якої вершини $z \in V(G) \setminus \{x, y\}$ виконується, що $d_G(x, z) \leq d_G(x, u) + d_G(u, z) \leq 2$, $u \in V(G) - \{x, y\}$. Аналогічно, $d_G(y, z) \leq 2$. З цього випливає, що $\text{diam}(G) = 3$ та x, y єдиною діаметральною парою в G . Також маємо, що $\text{ecc}_G(z) = 2$ для всіх $z \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Тоді для всіх таких z або x або y є ексцентричною вершиною в G . Наостанок x, y не можуть бути одночасно ексцентричними для деякої вершини z , оскільки $\{x, y\}$ є домінантною множиною в G (тобто кожна така z є суміжною або з x або із y , а до іншої вершини за попередньо доведеним має відстань 2). Отже, G є у.е.т.-графом. \square

Наслідок 2. [13] *У.е.т.-граф діаметра 3 є або самоцентральним або верхньо-діаметрально-критичним.*

Доведення. Якщо G є несамоцентральним у.е.т.-графом із $\text{diam}(G) = 3$, то за Теоремою 6 \overline{G} є бі-зіркою. З цього випливає, що будь-яке нове ребро $e \notin E(G)$ буде інцидентним до принаймні однієї із периферійних вершин G . Саме тому для довільного ребра $e \notin E(G)$ граф $G + e$ матиме діаметр два. \square

Наслідок 3. *Кількість неізоморфних несамоцентральних у.е.т.-графів G на n вершинах із $\text{diam}(G) = 3$ дорівнює $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.*

Доведення. Ми можемо порахувати кількість неізоморфних доповнень до таких графів G . За Теоремою 6 доповнення \overline{G} є бі-зіркою. Кількість неізоморфних бі-зірок на n вершинах дорівнює $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ (оскільки кожна така бі-зірка визначається нетривіальним розбиттям $(n-2)$ елементної множини на 2 частини). \square

За допомогою Наслідка 1 та Теорема 6 ми можемо повністю охарактеризувати ексцентричні орграфи у.е.т.-графів діаметра три. Для цього визначимо допоміжну унарну графову операцію із назвою *ексцентричне клонування*. Нехай H є зв'язним графом. Нехай H' є ізоморфною копією графа H із $V(H') = \{u' : u \in V(H)\}$ та $E(H') = \{u'v' : uv \in E(H)\}$. Тепер розглянемо граф G , отриманий із об'єднання $H \cup H'$ та додавання нових ребер виду uv' ($v' \in V(H')$), де u та v є суміжними в $ED(H)$. Граф G будемо називати *ексцентричним клоном* графа H . Наприклад, ексцентричний клон графа K_n ізоморфний $K_{2n} - nK_2$ (повний граф на $2n$ вершинах без досконалого паросполучення), а ексцентричний клон C_4 ізоморфний 3-кубу Q_3 .

Твердження 8. *Для орграфа D існує у.е.т.-граф G із $\text{diam}(G) = 3$ такий, що $ED(G) \simeq D$ тоді й тільки тоді, коли D складається $l \geq 3$ голих компонент або $D \simeq D_{m,k}$ для $m, k \geq 1$.*

Доведення. \Rightarrow Якщо G є самоцентральним, то за Наслідком 1 кожна компонента $ED(G)$ є голою. Також зрозуміло, що кількість слабких компонент в $ED(G)$ має $\frac{|V(G)|}{2} \geq \text{diam}(G) = 3$ слабкі компоненти. Тепер нехай G не є самоцентральним. Із доведення Теорема 6 слідує, що G має єдину діаметральну пару x, y , більш того ці дві вершини є єдиними ексцентричними в графі G . Таким чином $ED(G) \simeq D_{m,k}$ для $m, k \geq 0$, $m + k > 0$. Поєднавши це із Твердженням 4 (оскільки умова $\text{diam}(G) = 3$ веде за собою $|V(G)| \geq 3$), маємо $m, k \geq 1$.

\Leftarrow Спочатку розглянемо випадок, коли D складається із $l \geq 3$ голих компонент. Якщо $l = 3$, тоді $ED(C_6) \simeq D$. Далі нехай $l \geq 4$. Розглянемо граф $H \simeq K_{2,l-2}$ із $V(H) = \{x, y\} \cup \{a_i : 1 \leq i \leq l-2\}$ та $E(H) = \{xa_i, ya_i : 1 \leq i \leq l-2\}$. Нехай G є ексцентричним клоном H (на Рис. 7 зображено приклад ексцентричного клона $K_{2,3}$). Можна легко помітити, що $\text{ecc}_G(x) = d_G(x, x') = 3$. справді $d_G(x, a_i) = d_G(x, y') = 1$, $d_G(x, y) = 2$, $d_G(x, a'_i) = 2$ (оскільки існують шляхи $x - y' - a'_i$ та $a_i \notin N_G(x)$), $1 \leq i \leq l-2$, та $d_G(x, x') = 3$ (оскільки існує шлях $x - y' - a'_1 - x'$ між x та x' в G ; та $N_G(x) \cap N_G(x') = (\{a_i : 1 \leq i \leq l-2\} \cup \{y'\}) \cap (\{a'_i : 1 \leq i \leq l-2\} \cup \{y\}) = \emptyset$). Аналогічно, $\text{ecc}_G(x') = \text{ecc}_G(y) = \text{ecc}_G(y') = 3$. Тепер

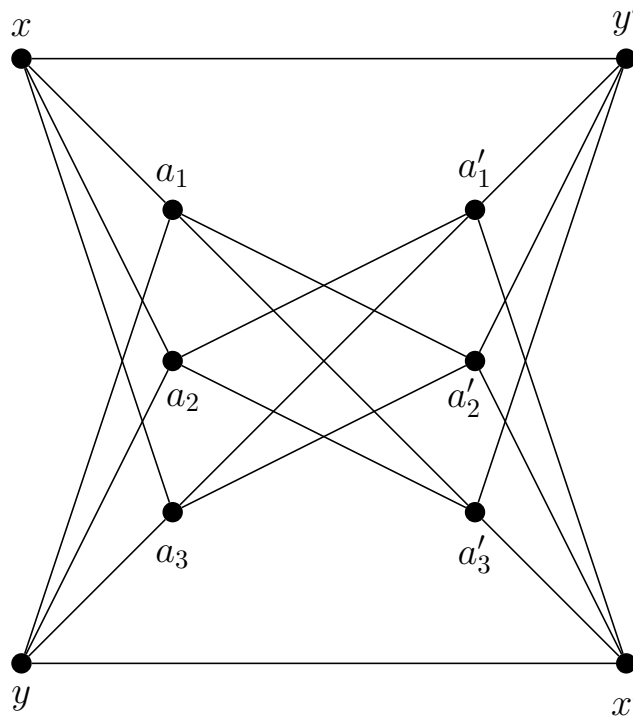


Рис. 7: Ексцентричний клон $K_{2,3}$.

для кожної $1 \leq i \leq l - 2$ ми маємо $\text{ecc}_G(a_i) = d_G(a_i, a'_i) = 3$. Справді, $d_G(a_i, x) = d_G(a_i, y) = d_G(a_i, a_j) = 1$ для всіх $1 \leq j \leq l - 2, j \neq i$. До того ж, $d_G(a_i, a_j) = d_G(a_i, x') = d_G(a_i, y') = 2$ для всіх $1 \leq j \leq l - 2, j \neq i$. Тому $d_G(a_i, a'_i) = 3$. Такі само можна показати, що $\text{ecc}_G(a'_i) = 3$ для всіх $1 \leq i \leq l - 2$. З цього випливає, що G є самоцентральним графом. До того ж G є у.е.т.-графом, оскільки $\text{ED}(G)$ є об'єднанням таких 2-циклів: $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y',$ та $a_i \leftrightarrow a'_i$ для $1 \leq i \leq l - 2$. Саме тому $\text{ED}(G) \simeq D$, оскільки він має рівно l голих слабких компонент.

Тепер нехай $D \simeq D_{m,k}$ для $m, k \geq 1$. Розглянемо повний граф $H \simeq K_{m+k}$. Зафіксуємо розбиття вершин $V(H) = A \sqcup B$, де $|A| = m, |B| = k$. Тепер додамо до H дві нові вершини x, y та нові ребра xa для всіх $a \in A$ та yb для всіх $b \in B$ (див. Рис. 8). Позначимо отриманий граф G . Очевидно, що доповнення \overline{G} є бі-зіркою. Тоді за Теоремою 6, G є у.е.т.-графом із $\text{diam}(G) = 3$. За побудовою G слідує, що $\text{ED}(G) \simeq D_{m,k}$. \square

4.4 У.е.т.-графи діаметра чотири

Питання характеристики несамоцентральних у.е.т.-графів G із $\text{diam}(G) = 4$ або хоча б знаходження критерію їх ексцентричним орграфам є значно

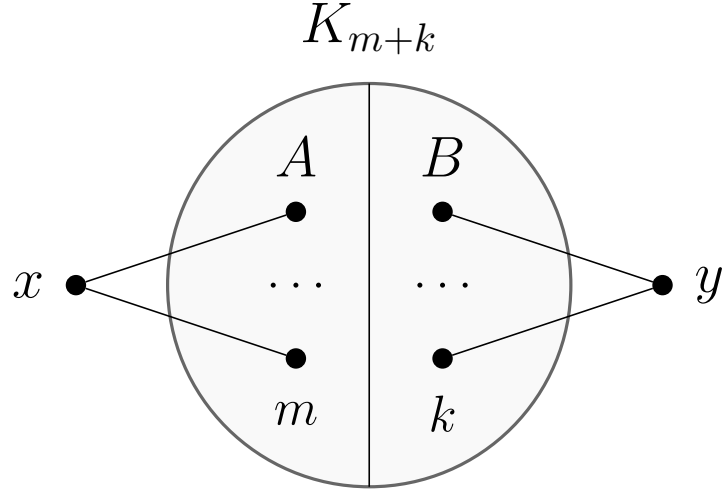


Рис. 8: Несамоцентральний у.е.т.-граф G із $\text{diam}(G) = 3$.

складнішим. Наступна теорема містить кілька важливих результатів стосовно другої проблеми.

Теорема 7. *Нехай G є несамоцентральним у.е.т.-графом із $\text{diam}(G) = 4$. Тоді виконуються такі твердження:*

- (i) *кожна ексцентрична вершина G лежить на циклі в $\text{ED}(G)$;*
- (ii) *якщо $\text{ED}(G)$ містить 2-цикл $x \leftrightarrow y$, то x, y породжують голу компоненту в $\text{ED}(G)$ тоді й тільки тоді, коли $d_G(x, y) = 3$;*
- (iii) *$\text{ED}(G)$ не містить напівголих слабких компонент зв'язності.*

Доведення. (i) Перше твердження прямо слідує із Твердження 5. Справді, із $\text{diam}(G) = 4$ слідує, що $\text{ED}(G)$ не містить породжених шляхів довжин більших за 2. Тоді кожна ексцентрична вершина G лежить на циклі в $\text{ED}(G)$.

Перед тим як довести друге і третє твердження зауважимо, що $\text{ecc}_G(u) \in \{3, 4\}$ для всіх вершин $u \in V(G)$. Справді, із Твердження 2 слідує

$$\text{rad}(G) \geq \frac{\text{diam}(G) + 1}{2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Тепер ми можемо довести друге твердження:

(ii) \Rightarrow Припустимо, що x, y породжують голу слабку компоненту в $\text{ED}(G)$. Від супротивного, нехай x, y є діаметральною парою в G ($\text{diam}(x, y) = 4$).

Оскільки G не є самоцентральним, то існує вершина $u \in V(G)$ із $\text{ecc}_G(u) = 3$. Нехай a є ексцентричною вершиною для u в G , зрозуміло, що $a \neq x, y$. Маємо $d_G(u, x) \leq 2$ та $d_G(u, y) \leq 2$. Але, якщо $\min\{d_G(u, x), d_G(u, y)\} = 1$, то із нерівності трикутника одразу маємо $d_G(x, y) \leq 3$. Отримана суперечність показує, що $d_G(u, x) = d_G(u, y) = 2$. Тепер зафіксуємо вершину $z \in N_G(x) \cap N_G(u)$. Якщо $\text{ecc}_G(z) = 3$, то використаємо Лему 4.2 для ребра zx , маємо, що вершина y є ексцентричною для вершини z в G . Але це суперечить тому, що x, y породжують голу слабку компоненту в $\text{ED}(G)$. Таким чином $\text{ecc}_G(z) = 4$. Аналогічно, застосувавши Лему 4.2 для ребра zu маємо, що z, a є діаметральною парою в G . Тепер зафіксуємо вершину $t \in N_G(y) \cap N_G(u)$, також зрозуміло, що $z \neq t$. Застосуємо той самий аргумент для вершини t , тобто, якщо $\text{ecc}_G(t) = 3$, то x є ексцентричною вершиною для t в G , що є суперечністю. А якщо $\text{ecc}_G(t) = 4$, то a, t є діаметральною парою в G . Це суперечить тому, що G є у.е.т.-графом (оскільки вершина a має дві ексцентричні z та t).

(ii) \Leftarrow Те, що 2-цикл $x \leftrightarrow y$ із $d_G(x, y) = 3$ породжує голу слабку компоненту в $\text{ED}(G)$ прямо слідує із того, що у такому у.е.т.-графі G кожна вершина $u \in V(G)$ має $\text{ecc}_G(u) \in \{3, 4\}$. Таким чином x може бути ексцентричною тільки для вершини y та навпаки.

Тепер доведемо третє (та найскладніше) твердження.

(iii) Від супротивного припустимо, що існує напівгола компонента в орграфі ексцентриситетів $\text{ED}(G)$. Нехай $x \leftrightarrow y \in 2$ -циклом у ній. Із доведеного 2 пункту маємо, що x, y є діаметральною парою в G . Без втрати загальності, припустимо, що $d_{\text{ED}(G)}^-(y) = 1$, а $d_{\text{ED}(G)}^-(x) \geq 2$. Зафіксуємо вершину $a \in N_{\text{ED}(G)}^-(x) \setminus \{y\}$. Зрозуміло, що $\text{ecc}_G(a) = 3$. Тепер ми можемо вважати, що $a \in [x, y]_G$. Справді, якщо $ay \notin E(G)$, то $d_G(a, y) = 2$. Розглянемо будь-яку вершину $a' \in N_G(a) \cap N_G(y)$. Якщо $\text{ecc}_G(a') = 4$, то використавши Лему 4.2 для ребра aa' , маємо, що x є ексцентричною вершиною для a' та y в G , що є суперечністю. Таким чином $\text{ecc}_G(a') = 3$, знову застосуємо Лему 4.2, але вже для ребра ay , маємо, що x є ексцентричною вершиною для a' в G . В цьому ж випадку $a' \in [x, y]_G$. Нехай $a \in [x, y]_G$, зафіксуємо вершину $u \in [x, y]_G \cap N_G(x)$ із $d_G(u, a) = 2$. Очевидно, що $\text{ecc}_G(u) = 4$. Нехай v є ексцентричною вершиною для u в G . Тому $u \leftrightarrow v \in 2$ -циклом в $\text{ED}(G)$. Маємо $d_G(a, v) = 2$ (справді, існування ребра $av \in E(G)$ мало б наслідок $d_G(u, v) \leq d_G(u, a) + d_G(a, v) = 3$). Зафіксуємо вершину $z \in N_G(a) \cap N_G(v)$. Далі розіб'ємо доведення на 2 випадки:

Випадок 1: $z \neq y$ (див. Рис. 9).

Якщо $\text{ecc}_G(z) = 4$, то застосуємо Лему 4.2, для ребра az , маємо $z \leftrightarrow x$

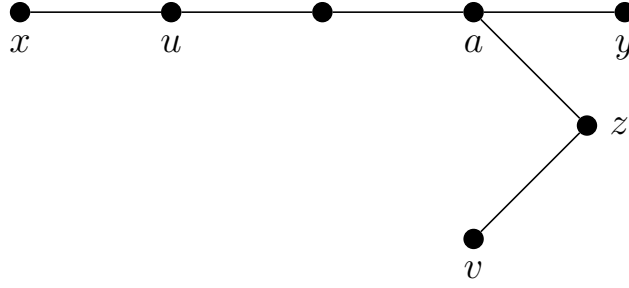


Рис. 9: Два найкоротші шляхи між x, y та a, v в G у **Випадку 1**.

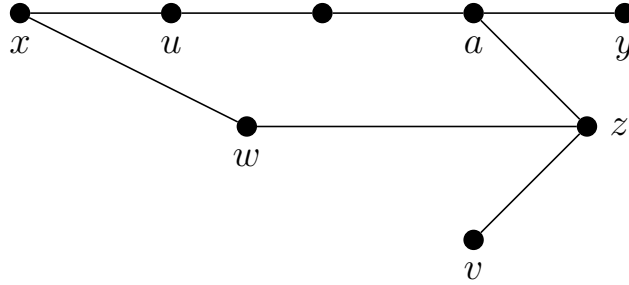


Рис. 10: Існування вершини $w \in N_G(z) \cap N_G(x)$ у **Випадку 1**.

в $\text{ED}(G)$, що є суперечністю. Тому в цьому випадку $\text{ess}_G(z) = 3$. Тепер застосуємо Лему 4.2 для ребра zv - маємо $z \rightarrow u$ в $\text{ED}(G)$. Таким чином $d_G(z, x) = 2$ (якби ж $zx \in E(G)$, тоді $x - z - a - y$ був би шлях довжини 3 між x та y в G , що є суперечністю). Зафіксуємо вершину $w \in N_G(z) \cap N_G(x)$. Якщо $w = v$, то маємо найкоротший шлях $u - x - z - v$ довжини 3 між u та v в G . Звідси $w \neq v$ (див. Рис. 10). Якщо $\text{ess}_G(w) = 3$, то застосуємо Лему 4.2 для ребра xw , маємо $w \rightarrow y$ в $\text{ED}(G)$. Це суперечність показує, що $\text{ess}_G(w) = 4$. Але в цьому випадку, застосуємо Лему 4.2 для ребра wz , щоб order to забезпечити існування 2-цикла $u \leftrightarrow w$ в $\text{ED}(G)$. Оскільки $w \neq v$, то знову маємо суперечність.

Випадок 2: $z = y$.

Маємо, що $d_G(x, v) \leq 3$. Якщо $d_G(x, v) \leq 2$, то $d_G(u, v) \leq d_G(u, x) + d_G(x, v) \leq 3$. Це означає, що $d_G(x, v) = 3$. Зафіксуємо найкоротший шлях $x - p - q - v$ між x та v в G . Оскільки $N_{\text{ED}(G)}^-(y) = \{x\}$, можемо зробити висновок, що $\text{ess}_G(p) = 4$. Застосувавши Лему 4.2 для ребер pq та qv , отримуємо, що $\text{ess}_G(q) = 4$. Нехай $q \leftrightarrow q'$ в $\text{ED}(G)$.

Далі нехай $\text{ess}_G(a) = 3$ та $a \rightarrow x$ в $\text{ED}(G)$, тоді виконується, що $d_G(a, q) \leq 2$. Якщо $aq \in E(G)$, то за Лемою 4.2 існує дуга $q \rightarrow x$ в $\text{ED}(G)$, що неможливо, адже $d_G(x, q) = 2$. Тому маємо $d_G(a, q) = 2$. Зафіксуємо вершину $t \in N_G(a) \cap N_G(q)$. Очевидно, що $t \neq y$ (інакше б, ми отримали суперечність:

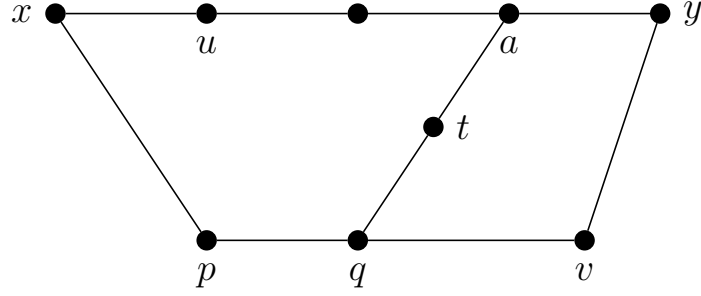


Рис. 11: Існування вершини $t \in N_G(a) \cap N_G(q)$ у **Випадку 2**.

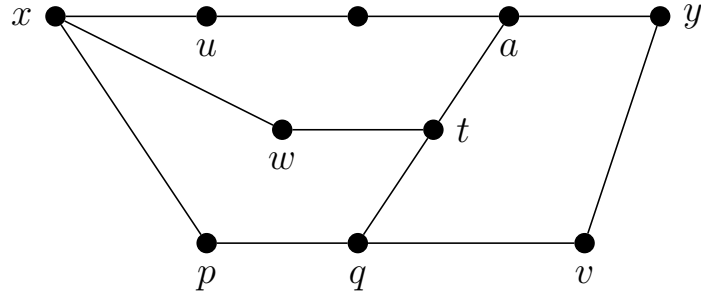


Рис. 12: Існування вершини $w \in N_G(x) \cap N_G(t)$ у **Випадку 2**.

$d_G(x, y) \leq d_G(x, q) + d_G(q, y) = 3$), див. Рис. 11.

Оскільки $\text{ess}_G(a) = 3$, то рівність $\text{ess}_G(t) = 4$ призвела б до такої суперечності: існував би 2-цикл $t \leftrightarrow x$ в $\text{ED}(G)$, $t \neq y$. Саме тому $\text{ess}_G(t) = 3$. Із цього випливає, що $t \rightarrow q'$ в $\text{ED}(G)$. Більше того, $d_G(t, x) \leq 2$. Якщо $tx \in E(G)$, то $d_G(x, y) \leq d_G(x, t) + d_G(t, y) = 3$, що є суперечністю. Таким чином $d_G(t, x) = 2$, і ми можемо зафіксувати вершину $w \in N_G(x) \cap N_G(t)$ (див. Рис. 12).

Знову ж, оскільки $N_{\text{ED}(G)}^-(y) = \{x\}$, то $\text{ess}_G(w) = 4$. Тепер застосуємо Лему 4.2 для ребра wt , щоб отримати $w \leftrightarrow q'$ в $\text{ED}(G)$. Але $w \neq q$, бо $wx \in E(G)$ та $qx \notin E(G)$. Ця суперечність повністю завершує доведення теореми. \square

Із Теорему 7 ми можемо зробити такі висновки щодо структури $\text{ED}(G)$ для у.е.т.-графів G із $\text{diam}(G) = 4$:

1. кожна слабка компонента $\text{ED}(G)$ ізоморфна $D_{m,k}$ для $m = k = 0$ або $m, k \geq 1$;
2. відстань у G між парою вершин голої слабкої компоненти дорівнює 3 (якщо G не є самоцентральним);

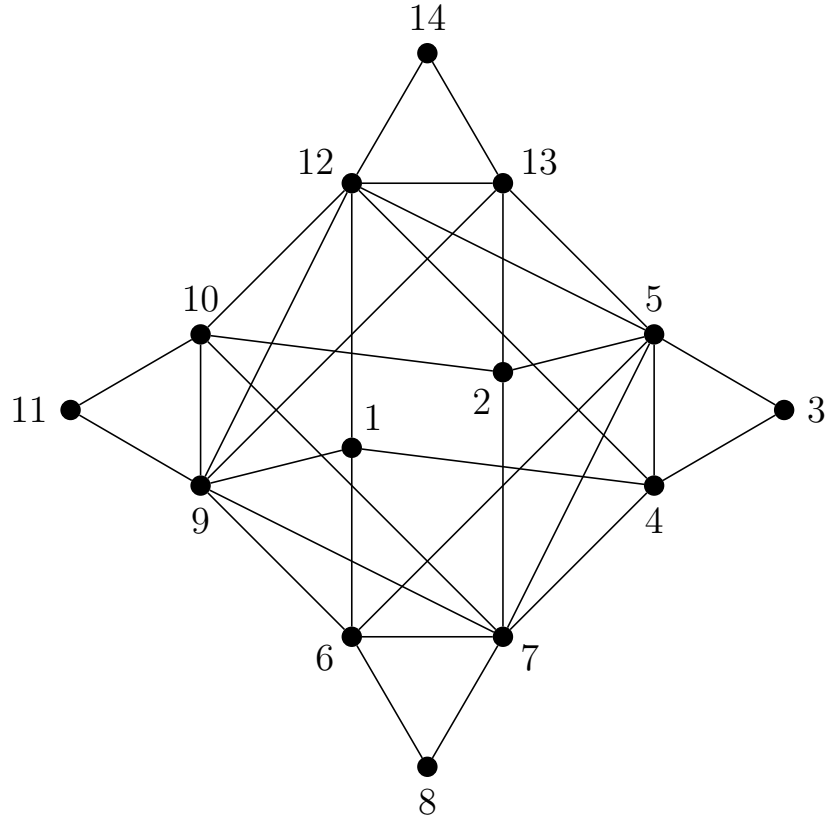


Рис. 13: У.е.т.-граф G , $\text{diam}(G) = 4$ із Прикладу 1.

3. відстань у G між вершинами 2-циклу повної слабкої компоненти дорівнює 4.

Приклад 1. Розглянемо граф G зображений на Рис. 13. Можна впевнитись, що G є у.е.т.-графом із $\text{diam}(G) = 4$. Рис. 14 зображає його ексцентричний орграф $\text{ED}(G)$, який має дві повні слабкі компоненти та одну голу слабку компоненту.

У роботі [6] Андрій Сердюк зробив повний комп'ютерний перебір, який показав, що не існує у.е.т.-графів на n -вершинах із діаметром чотири, для $n \leq 7$. Для $n = 8$ існує 4 такі графи, для $n = 9$ число таких графів дорівнює 16, для $n = 10$ маємо 261 такий граф. Та для $n = 11$ маємо рівно 4829 таких графів.

Завершимо цей розділ зображенням у.е.т.-графа діаметра 5, чий граф ексцентриситетів має напівголу слабку компоненту (див Рис. 15 та Рис. 16).

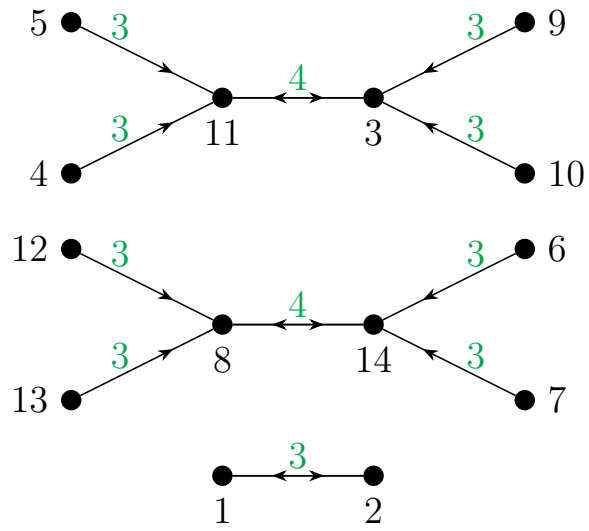


Рис. 14: Ексцентричний орграф $ED(G)$ для графа G із Рис. 13.

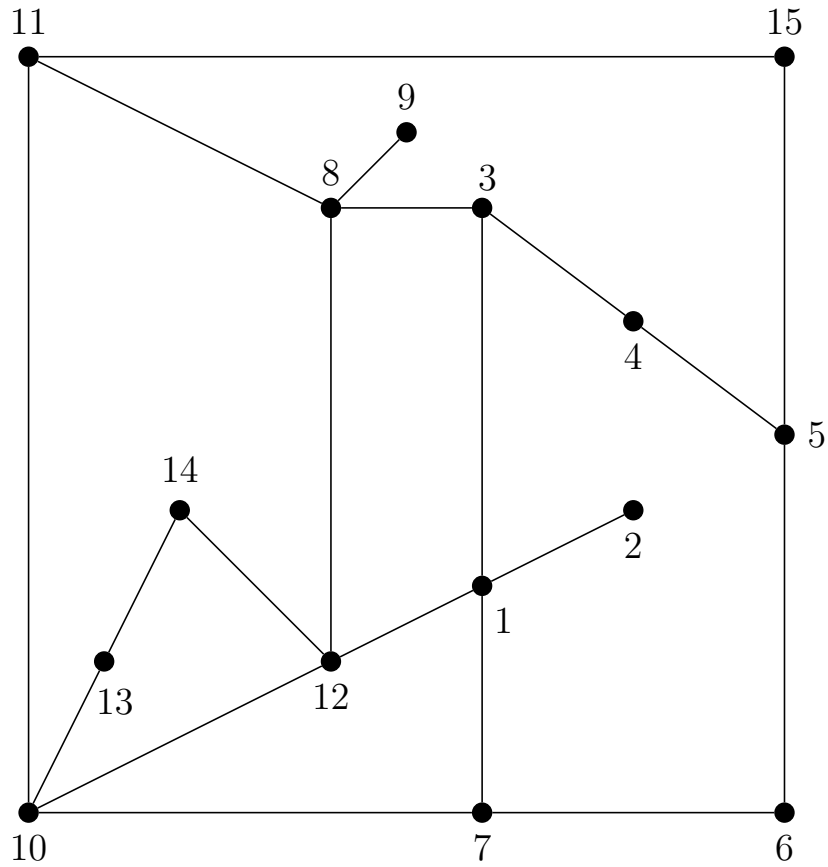


Рис. 15: У.е.т.-граф G діаметра 5 такий, що $ED(G)$ має напівголу компоненту.

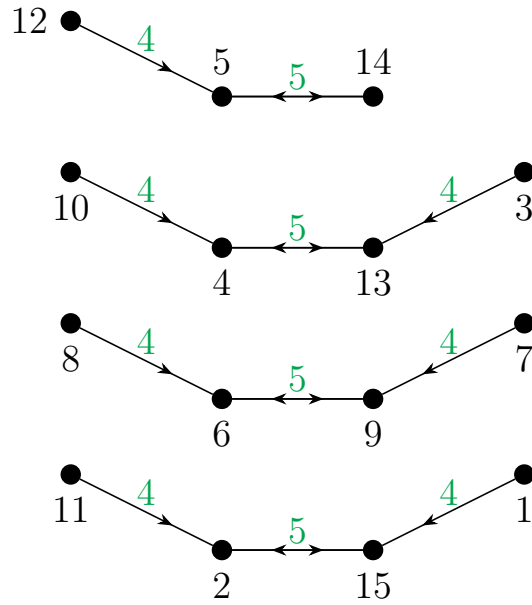


Рис. 16: Ексцентричний оргграф $ED(G)$ у.е.т.-графу G із Рис. 15.

5 Еволюційний пошук у.е.т.-графів

Методи штучного інтелекту часто використовують для розв'язання конкретних прикладних задач, але їхнє використання для доведення або спростування математичних гіпотез недооцінене. Наразі дуже мало досліджень, у яких автори робили подібні дослідження. У своїй статті [15] Мясніков за допомогою генетичних алгоритмів спростовує гіпотезу Ендрюса-Кертіса про збалансовані копредставлення тривіальної групи. А в дослідженні [16] Адам Вагнер спростовує гіпотези зі спектральної теорії графів та комбінаторики за допомогою навчання з підкріпленням. Ці методи виникли з математичного обґрунтування, але для самої математики їх рідко застосовують.

Еволюційне програмування є різновидом еволюційних алгоритмів. Це клас алгоритмів, який бере за основу імітування процесу еволюції. У природі запорукою еволюції є адаптація особин до умов середовища зі зміною поколінь. Погано пристосовані до середовища особини з більшою ймовірністю гинуть, натомість добре пристосовані виживають частіше. Тоді особини, які вижили, дають нове покоління. Гени нащадків утворені зі схрещених батьківських генів. Також в процесі генерації нового покоління важливу роль відіграють випадкові мутації генів. Вони можуть як негативно, так і позитивно впливати на пристосування індивідів. Завдяки природному відбору пристосування індивідів до умов середовища покращуються.

5.1 Загальний опис схеми алгоритму

Цей процес можна відтворити у програмуванні та використати для розв'язання прикладних задач. Для задання класичного генетичного алгоритму (ГА) (див. Рис 17) потрібно виконати такі етапи:

1) Обрати кодування для особин. Кодування бувають різні, це може бути як бінарний рядок, так і матриця або рядок символів, що зберігає структуру індивіда відповідно до предметної області.

2) Задати функцію здоров'я (fitness function). Вона визначає пристосування індивіда до середовища. Функція здоров'я приймає на вхід закодовану особину та повертає оцінку її пристосованості (зазвичай це дійсне число). Саме цю функцію наш алгоритм має максимізувати в процесі “еволюції”. Функцію потрібно задати таким чином, щоб її максимальні значення відповідали “гарним”, а мінімальні - “поганим” індивідам відповідно до конкретної поставленої задачі.

3) Задати оператор відбору індивідів у наступне покоління. Найвідоміші оператори - це рулетки (RWS, SUS), турнір та елітарний відбір.

4) Задати операцію кросинговеру. Цей оператор бере на вхід декілька (частіше 2) батьківських індивідів та “схрещує” їхні гени, щоб дати на вихід дочірні індивіди.

5) Задати операцію мутації. Цей оператор бере на вхід індивіда та виконує на його генах випадкові мутації.

6) Визначити критерій зупинки алгоритму. Це може бути максимальна кількість ітерацій, збіжність популяції в точку або відсутність покращення середнього максимального здоров'я популяції.

7) Задати початкову популяцію. Зазвичай її генерують випадково. За використання бінарного кодування часто генерують набір особин за рівномірним розподілом.

8) Задати мета-параметри нашого алгоритму, такі як розмір популяції та ймовірності кросинговеру та мутації. При використанні підходів із декількома операторами одного типу (наприклад поєднання елітарного відбору та рулетки або кількох видів мутації) потрібно задати параметри для кожного з них.

Для реалізації алгоритму було обрано мову *C++* та бібліотеку *Boost Graph Lib* [17]. Ця бібліотека є оптимізованою та надає широкий спектр функцій для роботи з графами. Наприклад, вона має два алгоритми для пошуку всіх попарних відстаней: алгоритм Джонсона оптимізований під різріджені графи, а алгоритм Флойда – Воршелла під щільні. Складність

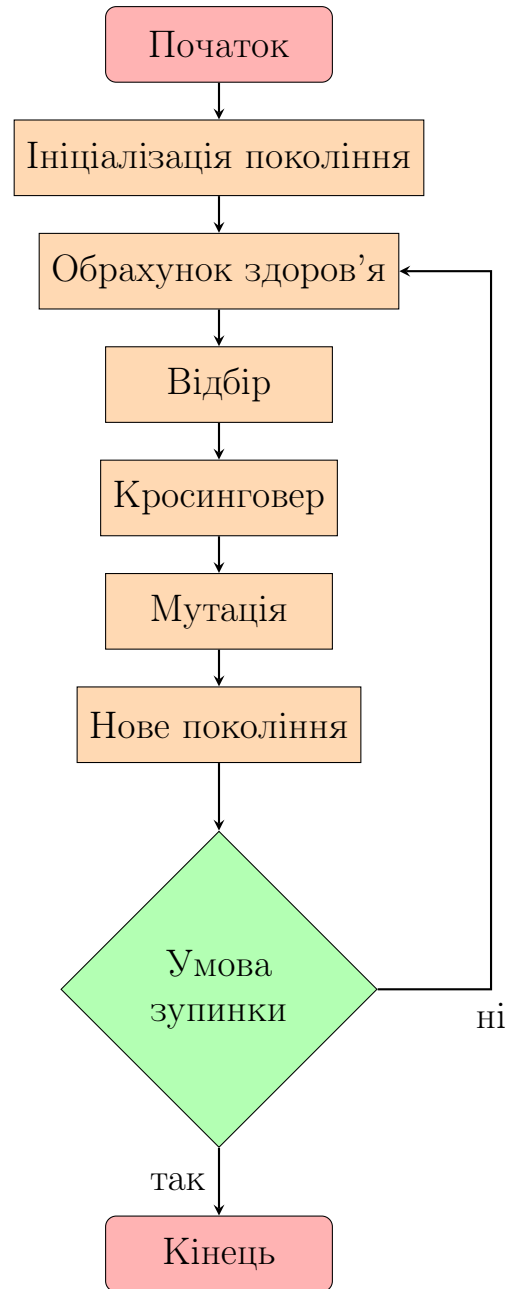


Рис. 17: Схема класичного генетичного алгоритму.

генетичного алгоритму в основному зумовлена його функцією здоров'я. У нашому випадку ми будемо шукати всі попарні відстані та ексцентриситети вершин, бібліотека надає функції для цього.

5.2 Представлення графів

Існує кілька різних способів представлення графів. Найчастіше використовують представлення у вигляді матриці та списку суміжностей. Перше представлення дає можливість швидко перевіряти за індексами суміжність вершин, але використовує надмірну кількість пам'яті у випадку розріджених графів. Тому ми обрали список суміжностей - ця структура є дещо повільнішою у визначенні суміжностей, але дозволяє значно заощаджувати пам'ять. У.е.т.-графи є розрідженими, це можна легко зрозуміти із самого означення.

Для початку визначимо типи даних для графів: неорієнтованого графа G та орієнтованого графа, який будемо використовувати для $ED(G)$.

В означенні типу нашого графа нам потрібно заборонити мультиребра, тому ми використаємо структуру `setS` для збереження ребер. Також одразу визначимо типи вершини, ребра та відповідних ітераторів.

```
1 using UndirectedGraph = adjacency_list<setS, vecS, undirectedS,
2   no_property,
3   property<edge_weight_t, int>>;
4 typedef boost::graph_traits<UndirectedGraph>::vertex_descriptor
5   UndirectedGraphVertex;
6 typedef boost::graph_traits<UndirectedGraph>::vertex_iterator
7   UndirectedGraphVertexIterator;
8 typedef boost::graph_traits<UndirectedGraph>::edge_descriptor
9   UndirectedGraphEdge;
10 typedef boost::graph_traits<UndirectedGraph>::edge_iterator
11   UndirectedGraphEdgeIterator;
```

Лістинг 1: Визначення типу даних для неорієнтованого графа.

Граф $ED(G)$ теж не може містити мультиребер, тому теж використаємо `setS` як структуру даних для ребер. До того ж ребра будуть зважені. Для збереження ваги використаємо тип даних `int`. Вагою для дуги $a \rightarrow b$ покладемо відстань $d_G(a, b)$. У наступному підрозділі це стане в нагоді для реалізації функції здоров'я.

```
1 using DiGraph = adjacency_list<setS, vecS, bidirectionalS, no_property,
2   property<edge_weight_t, int>>;
3
4 typedef boost::graph_traits<DiGraph>::vertex_descriptor DiGraphVertex;
```

```

5 typedef boost::graph_traits<DiGraph>::vertex_iterator
    DiGraphVertexIterator;
6
7 typedef boost::graph_traits<DiGraph>::edge_descriptor DiGraphEdge;
8 typedef boost::graph_traits<DiGraph>::edge_iterator DiGraphEdgeIterator;

```

Лістинг 2: Визначення типу даних для $ED(G)$.

```

1 const DiGraph GetEccentricDigraph(const UndirectedGraph& graph)
2 {
3     const int V = num_vertices(graph);
4     DistanceMatrix distances(V);
5     DistanceMatrixMap dm(distances, graph);
6     WeightMap wm(1);
7     johnson_all_pairs_shortest_paths(graph, dm, weight_map(wm));
8     // Compute the eccentricities for graph - this computation returns
9     // both the radius and diameter as well.
10    EccentricityContainer eccs(V);
11    EccentricityMap em(eccs, graph);
12    all_eccentricities(graph, dm, em);
13
14    DiGraph digrah(V);
15
16    for (int v = 0; v < V; ++v)
17    {
18        const int ecc_v = em[v];
19
20        for (int u = 0; u < distances[v].size(); ++u)
21        {
22            if (distances[v][u] == ecc_v)
23            {
24                // save distance in G as a property in edge of ED(G)
25                // v----distance----->u
26                add_edge(v, u, distances[v][u], digrah);
27            }
28        }
29    }
30
31    return digrah;
32 }

```

Лістинг 3: Функція побудови $ED(G)$ для графа G .

Параметер bool IS_STRICT у функціях слугує для накладання сильнішої умови на всі задіяні вершини при пошуку певної підструктури $ED(G)$. Якщо це параметр приймає значення true, то функцію виконає додаткову перевірку, щоб вищезгадані вершини мали унікальні ексцентричні вершини в G .

```

1 int GetComponentLessDistanceCount(const int lessThen, const bool IS_STRICT
    = false) const
2 {
3     int res = 0;

```

```

4  for (auto iter = bidirected_edges.begin(); iter != bidirected_edges.end
    (); ++iter)
5  {
6      if (getEdgeWeight(iter->first, iter->second) < lessThen &&
7          (IS_STRICT == false || (out_degree(iter->first, *this) == 1 &&
            out_degree(iter->second, *this) == 1)))
8          {
9              res++;
10             }
11     }
12     return res;
13 }

```

Лістинг 4: Використання збережених ваг на ребрах $ED(G)$ для визначення кількості компонент із відстанню на 2-циклі менше заданої.

5.3 Функція здоров'я

Щоб задати функцію здоров'я, спочатку визначимося з властивостями графів, які будемо намагатись знайти нашим еволюційним алгоритмом. Потім реалізуємо загальну функцію здоров'я як набір цих властивостей.

Було реалізовано знаходження кількостей компонент слабкої зв'язності $ED(G)$ кожного типу: голої, напівголої та повної. Також реалізовано знаходження максимальної довжини ланцюга на компоненті.

Крім цього користувачу доступне задання параметрів кількості вершин і ребер графа, задання діаметра графа G та порівняння довжин відстаней у графі G між парою вершин на 2-циклі компоненти слабкої зв'язності $ED(G)$.

Кожен із цих параметрів можна порівнювати із заданим значенням, відповідними операціями $<$, \leq , $=$, \geq , $>$, таким чином звузивши пошуковий простір для потрібного графа.

```

1  PropertyFitness<int> p_hc {Property::HALFCOUNT, Compare::GEQ, 1, 20.0f};
2  PropertyFitness<int> p_diam {Property::DIAMETER, Compare::EQ, 6, 5.0f};

```

Лістинг 5: Задання параметрів кількості напівголих компонент та діаметра шуканого графа.

Як буде описано в наступному розділі, здебільшого нас цікавлять можливості співіснування різних типів компонент слабкої зв'язності $ED(G)$, відстані на 2-циклах компонент та максимальна довжина ланцюжка в компонентах.

У своїй статті [16] Адам Вагнер рекомендує уникати складених функцій оцінки. Наприклад, якщо є можливість перебирати тільки графи-дерева, то

краще одразу перебирати лише дерева і не розбивати функцію здоров'я на дві частини $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x)$ визначає наскільки граф є близьким до дерева, а $f_2(x)$ - наскільки виконується інша властивість. У випадку ж унікально-ексцентрично-точкових графів це зробити складно, адже при додаванні нового ребра чи вершини відстані далеко не завжди зберігаються. Іноді додавання лише одного ребра змінює всі ексцентриситети вершин, тому складно із самого початку генерувати лише у.е.т.-графи. Задамо функцію визначення того, наскільки граф є унікально-ексцентрично-точковим. Вона складається з двох частин: перша - це відношення кількості вершин із єдиною ексцентричною до всієї кількості вершин $\frac{|\{v \mid d_{ED(G)}^+(v)=1\}|}{|V(G)|}$, друга частина - це загальна унікально-ексцентрично-точковість нашого графа, а саме відношення суми вихідних степенів до кількості вершин. Це можна спростити до виду $\frac{|V(ED(G))|}{|E(ED(G))|}$, адже кількість ребер у $ED(G)$ для у.е.т.-графа G дорівнює кількості вершин.

```

1  FitnessConfig getRow14FitnessConfig()
2  {
3      FitnessConfig fconf;
4
5      fconf.uep_vertices_weight = 30.0f;
6      fconf.uep_global_weight = 20.0f;
7      fconf.satHyp0 = 20.0f;
8      fconf.satHyp1 = std::make_pair(20.0f, 2);
9      fconf.satHyp2 = -20.0f;
10     fconf.satHyp3 = 20.0f;
11     fconf.updateMaxScore();
12     return fconf;
13 }

```

Лістинг 6: Приклад задання коефіцієнтів функції здоров'я.

5.4 Оператори мутації

Одразу зауважимо, що ми не використовували оператор кросинговеру. Це зумовлено тим, що два батьківські графи обчислювально складно “накласти” один на одного, щоб зробити нащадка. Батьківські графи можуть не збігатися навіть за кількістю вершин. Крім цього, знаходження якогось “квазі-ізоморфізму” графів є складним і не гарантує, що отриманий граф-нащадок буде кращим у контексті унікально-ексцентрично-точковості.

Мутація є кратною, тобто кожен індивід клонується k разів, і далі на кожній із цих k копій виконується випадкова мутація. Реалізовано декілька типів оператора мутації. Перший тип - це додавання висячого ланцюжка. Функція приймає вершину графа та ціле число n , що позначає довжину

ланцюжка, який потрібно приєднати до заданої вершини. У випадку якщо $n = 1$, то додається одна висяча вершина до заданої вершини графа. У наших експериментах ми обмежувалися довжинами від 1 до 5, іноді до 3 при пошуку графів з обмеженнями на (малий) діаметр або кількості вершин чи ребер. Це зумовлено тим, що якщо в нас є граф G (навіть у.е.т.-граф), то його легко можна звести до у.е.т.-графа шляхом додавання двох ланцюгів довжини $\frac{\text{diam}(G)}{2}$ до діаметральної пари. Після цього $ED(G)$ колапсує в одну компоненту слабкої зв'язності.

Другий тип мутації - це підрозбиття наявного ребра. Ця функція приймає ребро графа та ціле число, що позначає кількість вершин, якою необхідно підрозбити задане ребро. Таким чином відстань між цією парою вершин збільшується.

Третій тип мутацій - це з'єднання двох раніше несуміжних вершин ланцюгом із ребер. Функція приймає пару вершин і ціле число, яке позначає довжину ланцюжка, який буде прокладений між цією парою вершин. Тобто якщо це число дорівнює 0, то вони просто з'єднуються ребром. Якщо ж число дорівнює 3 то ми додаємо ланцюжок P_3 на трьох нових вершинах, а його кінці з'єднуємо відповідно із двома заданими вершинами.

Останній тип мутацій - це видалення ребер та вершин. Реалізовано по два види видалення: видалення із перевіркою зв'язності та примусове видалення. Видалення з перевіркою зв'язності перевіряє чи в результаті видалення заданого елемента (вершини або ребра) граф залишиться зв'язним, і виконує видалення лише, якщо граф лишатиметься зв'язним. Примусове видалення спочатку видаляє заданий елемент, а потім знаходить компоненти зв'язності отриманого графа. Якщо граф розбився на кілька компонент зв'язності, то ми випадковим чином з'єднуємо попарно всі компоненти зв'язності. Тобто для кожної пари компонент випадковим чином вибираємо по вершині і додаємо ребро між ними. Таким чином граф залишиться зв'язним, що не порушить нашу метрику.

```

1 MutationConfigs getMutationConfigs()
2 {
3     MutationConfigs fconf;
4
5     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_LEAF_PATH, 5, 1 });
6     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_LEAF_PATH, 5, 2 });
7     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_LEAF_PATH, 5, 3 });
8     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_LEAF_PATH, 5, 4 });
9     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_LEAF_PATH, 5, 5 });
10
11     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_EDGE, 5, 0 });
12     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_EDGE, 5, 1 });
13     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_EDGE, 5, 2 });

```

```

14     fconf.push_back({ MutationFunction::ADD_EDGE, 5, 3 });
15
16     fconf.push_back({ MutationFunction::SUB_DIVIDE_EDGE, 5, 1 });
17     fconf.push_back({ MutationFunction::SUB_DIVIDE_EDGE, 5, 2 });
18     fconf.push_back({ MutationFunction::SUB_DIVIDE_EDGE, 2, 3 });
19
20     return fconf;
21 }

```

Лістинг 7: Приклад задання налаштувань мутації.

5.5 Відбір

Реалізовано декілька функцій відбору: відбір рулеткою RWS, стохастичний відбір рулеткою SUS, відбір турніром та елітарний відбір. Рулетки виконуються таким чином: оцінки функції здоров'я перетворюються на ймовірності вибрати задану особу, далі генерується випадкове число і накладається на ймовірності, щоб вибрати особину. Для рулетки RWS це повторюється стільки разів, скільки особин у популяції. Рулетка SUS - це одна рулетка з N стрілками, розміщеними з однаковими інтервалами. Вона “розкручується” один раз і не втрачає найкращу особину. При цьому збіжність алгоритму значно сповільнюється, оскільки вона рівномірно лишає в популяції особини з гіршими показниками функції здоров'я. Відбір турніром з поверненням реалізований із заданим параметром розміру турніру n . Відбирається n особин з популяції (частіше $n = 2$), з них найкраща особина переходить у наступне покоління. Елітарний відбір відбирає задану кількість особин з найбільшими значеннями здоров'я.

Емпірично встановлено, що для нашої задачі найкраще працює елітарний відбір. Він дозволяє зберегти найкращих особин і вже від них перейти до особин зі ще більшою оцінкою функцій здоров'я. Таким чином маємо стохастичний комбінаторний перебір, для якого функція здоров'я значно обмежує простір пошуку. Метод RWS може втратити найкращу особину, що призводить до падіння максимального здоров'я в популяції і збільшення числа ітерацій до знаходження заданого графа.

Наведемо приклад порівняння методів відбору для пошуку у.е.т-графа G , для якого $ED(G)$ містить породжений шлях довжини ≥ 4 . Використана функція здоров'я проілюстрована у Лістингу 8.

```

1  FitnessConfig getPath4FitnessConfig()
2  {
3      FitnessConfig fconf;
4      fconf.uep_vertices_weight = 30.0f;
5      fconf.uep_global_weight = 20.0f;

```

```

6   fconf.satHyp1 = std::make_pair(50.0f, 4);
7   fconf.updateMaxScore();
8   return fconf;
9 }

```

Лістинг 8: Функція здоров'я для пошуку породжених шляхів довжин ≥ 4 .

Як бачимо із Рис. 18 елітарний відбір знайшов потрібний граф за 26 ітерацій, відбір турніром теж знайшов шуканий граф, але за 90 ітерації, обидві рулетки (RSW, SUS) не змогли знайти шуканий граф. Окрім більшої кількості ітерації турнір програє по мінімальності знайденого прикладу. Граф знайдений елітарним відбором мав $|V| = 42$ вершини, а турніром $|V| = 213$ вершин. Зауважимо, що зі збільшенням кількості вершин зростає складність час обчислень між ітераціями.

5.6 Початкова популяція

Найчастіше використовують рівномірний розподіл і генерують початкову популяцію відносно нього. Із графами це зробити складніше. Ми починаємо роботу алгоритму із одного графа K_2 , далі за кілька ітерацій число особин збільшується до заданого розміру популяції. Для знаходження деяких графів було використано “трюк” початкового вливання в стартову популяцію графів близьких до бажаного. Наприклад, щоб знайти у.е.т.-граф G , $ED(G)$ якого що містить напівголу компоненту та породжені шляхи заданої довжини ми одразу починали із у.е.т.-графа, оргграф ексцентриситетів якого містить напівголу компоненту. Це значно покращило роботу програми (див. Рис. 19).

```

1 UndirectedGraph start =
2 fromVecToGraph<UndirectedGraph>(parseExpression("
3   [[10,2,1],[0],[9,0,3],[2,4],[12,3,5],[7,4,6],[5],[13,5,8],[7,9],
4   [11,2,8],[13,0,11],[12,9,10],[11,4],[7,10]]"));
5 Population population = { Individual {start, fitness(start,
6   fitness_config)} };

```

Лістинг 9: Приклад задання початкового графа.

5.7 Загальний цикл еволюційного алгоритму

Класичний генетичний алгоритм має сталий розмір популяції. Його загальний цикл виконується у порядку: відбір – кросинговер – мутація. У нашій роботі реалізовано інший підхід. Спочатку популяція мутує: кожна особина створює копії себе, далі кожна із цих копій мутує відповідно до

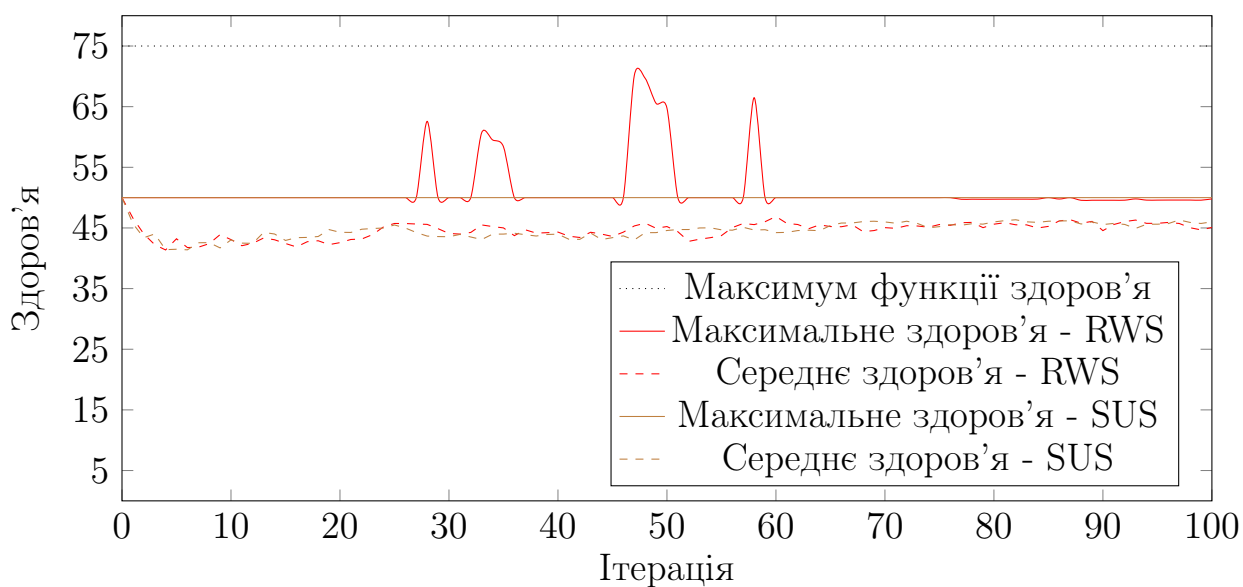
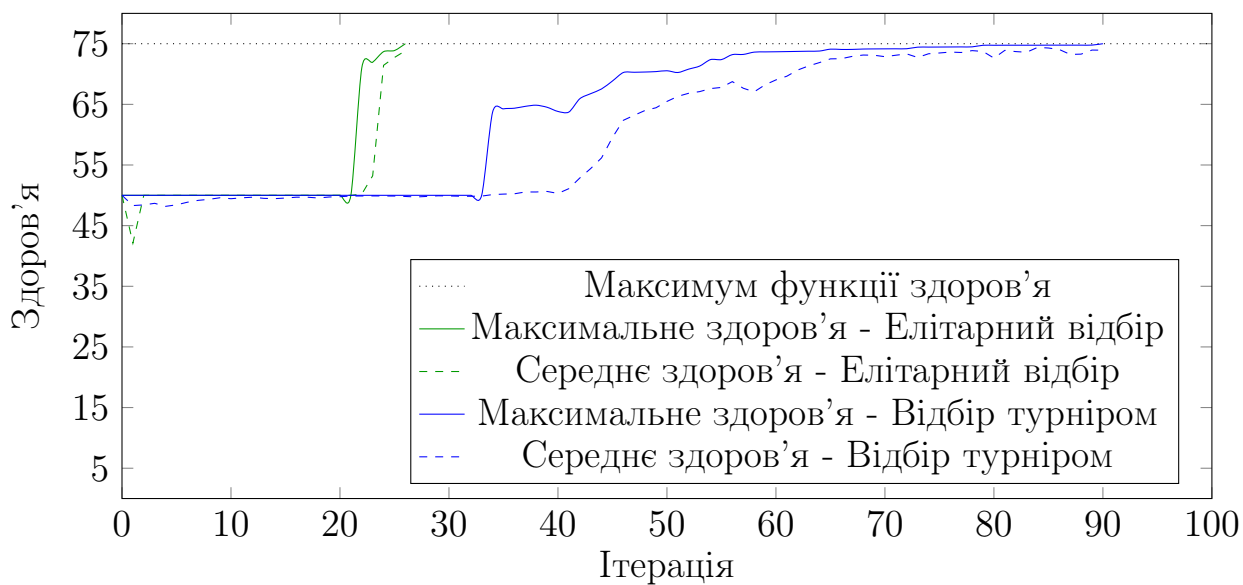


Рис. 18: Графіки зміни середнього та максимального здоров'я популяції залежно від методу відбору (при пошуку у.е.т.-графа G із породженням шляхом у $ED(G)$ довжин ≥ 4).

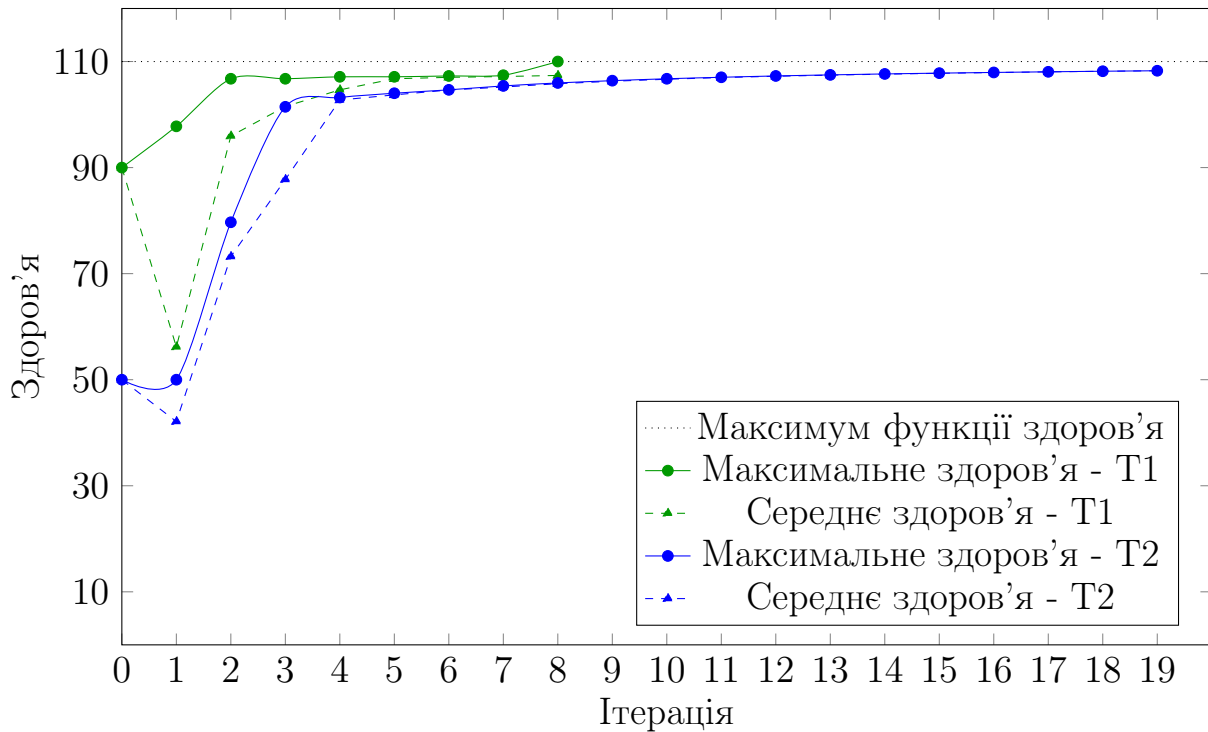


Рис. 19: Графік зміни середнього та максимального здоров'я популяції залежно від стартової популяції. У випадку T1 стартовою популяцією слугує граф із Лістингу. 9, у випадку T2 граф K_2 .

заданих видів та параметрів мутацій, тобто збільшується розмір популяції в кілька разів. Потім виконується елітарний відбір і розмір популяції повертається до початкового (див. Рис 20). Зауважимо, що на практиці ми намагались тримати баланс між розміром популяції та сумарною кратністю мутації через обмежені обчислювальні потужності. Наприклад, для популяції в 200-особин сумарний розмір мутацій становив 70, тому в пікові кількості особин сягає 14000.

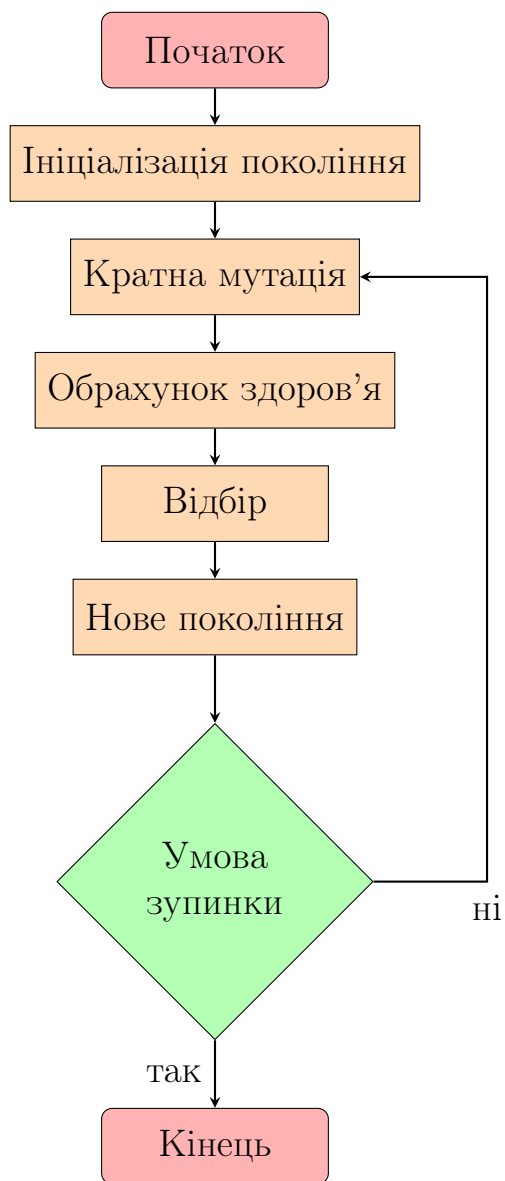


Рис. 20: Схема розробленого еволюційного алгоритму.

6 Результати еволюційного пошуку у.е.т.-графів

На початку роботи було поставлено чотири основні гіпотези щодо структури у.е.т.-графів, а саме чи існує такий у.е.т.-граф G , де $ED(G)$ - його орграф ексцентриситетів, що:

0) $\exists a, b : a \rightarrow b \in ED(G), b \rightarrow a \in ED(G), d_G(a, b) < \text{diam}(G)$?

1) $\exists a, b : a \rightarrow b \in ED(G)$, b - не є вершиною 2-цикла компоненти слабкої зв'язності у $ED(G)$? Узагальнене питання таке: який максимально можливий (за довжиною) породжений шлях може існувати в $ED(G)$?

2) Чи можливе існування напівголії компоненти зв'язності в $ED(G)$?

3) Чи можливе співіснування голої та повної компонент? Зауважимо, що до цього були відомі у.е.т.-графи з лише повними компонентами або з усіма голими компонентами (наприклад, якщо граф є самоцентральним - парним циклом).

Питання одночасного виконання 2 і 3 гіпотези є найцікавішим, це зводиться до одночасного існування всіх трьох типів компонент слабкої зв'язності.

6.1 Таблиця результатів

В результаті запуску нашого алгоритму були знайдені у.е.т.-графи для кожної гіпотези. Отже, було показано що всі вони можуть виконуватись. Таким чином ці гіпотези перетворились на властивість. Далі ми узагальнили це до питань одночасного виконання цих властивостей. Наприклад, чи може одночасно існувати напівгола компонента з відстанню 2-циклу меншою за діаметр, або ж чи можуть співіснувати компонента із ланцюжками та гола компонента.

Всі дані було оформлено в таблицю. Рядки відповідають за виконання заданого набору гіпотез.

Граф на Рис. 15 відповідає 4 рядку з таблиці, на Рис. 2 відповідає 3 рядку з таблиці. Граф на Рис. 13 8 рядку таблиці.

6.2 Відкриті питання

Також було поставлено кілька нових питань:

1) Питання мінімальності знайдених графів в термінах діаметра: кількості компонент слабкої зв'язності $ED(G)$, кількості вершин та кількості ребер (за що відповідають праві колонки Таблиці 1). Це питання є вирішеним лише у деяких випадках. Однак завдяки отриманому мінімальному

Табл. 1: Результати еволюційного пошуку у.е.т.-графів із заданими властивостями. Зеленим кольором виділено рядки відповідні графи яких вдалось побувати еволюційним алгоритмом. Темно-зеленим кольором виділено клітинки у яких відповідний параметр знайдено графа дорівнює теоретичному мінімуму.

№	B. 0	B. 1	B. 2	B. 3	min diam(G)	min комп. $ED(G)$	min $ V(G) $	min $ E(G) $
1	✗	✗	✗	✗	0	0	0	0
2	✓	✗	✗	✗	6-8	2	14	14
3	✗	✓	✗	✗	6	1	12	13
4	✗	✗	✓	✗	5	3-4	15	20
5	✗	✗	✗	✓	5	3-4	16	23
6	✓	✓	✗	✗	6-7	2	15	16
7	✓	✗	✓	✗	6-11	2	26	29
8	✓	✗	✗	✓	4	3	10	14
9	✗	✓	✓	✗	≥ 6	≥ 2		
10	✗	✓	✗	✓	≥ 6	≥ 3		
11	✗	✗	✓	✓	≥ 5	≥ 3		
12	✗	✓	✓	✓	≥ 6	≥ 3		
13	✓	✗	✓	✓	≥ 5	≥ 3		
14	✓	✓	✗	✓	6	3	17	25
15	✓	✓	✓	✗	6-8	2	36	57
16	✓	✓	✓	✓	≥ 6	≥ 3		

графу для 8 рядка таблиці вдалось довести характеристизація для діаметра 4 (див. Теоремою 7);

2) Чи існує у.е.т.- граф, у всі компоненти $ED(G)$ є голими, але він не ізоморфний простому циклу. Нам вдалось знайти такий граф за допомогою EA (див. Рис. fig-nonCycl-allbald). Постає узагальнене питання характеристизації таких графів.

3) Чи існує межа на довжину максимального породженого ланцюжка $ED(G)$? Нам вдалось знайти відповідний граф із довжиною 5 (див. Рис 29, 30). Доведена Теорема 5 обмежує довжини таких ланцюгів $ED(G)$ діаметром G , але питання, чи ця оцінка є точною і для великих діаметрів лишається відкритим.

4) Чи існує у.е.т.-граф G , такий що $ED(G)$ одночасно містить голу та напівголу компотенти? Якщо проаналізувати таблицю, то не знайдені рядки 11,12,13,16 вирізняються саме цією спільною рисою. ми намагались комбінувати різні варіанти фітнес функції та інших параметрів, проте нам так і не вдалось знайти такий граф, можливо його не існує, але теоретично довести це також не вдається. Проте нам вдалось довести це для малих діаметрів ≤ 4 . Завдяки чому був отриманий опис $ED(G)$, для $G : \text{diam}(G) = 4$ (див Теорема 7), що є головним теоретичним результатом цієї роботи.

7 Висновки

У роботі досліджені властивості у.е.т.-графів G та їхніх ексцентричних орграфів $ED(G)$. У **Розділі 2** надано основні означення для неорієнтованих та орієнтованих графів. У **Розділі 3** подано раніше відомі теоретичні результати про у.е.т.-графи. Зокрема, наведено характеристики у.е.т.-графів діаметра 2 (див. Теорему 1), самоцентрального у.е.т.-графів та дерев, які є у.е.т.-графами (див. Теорему 2).

Розділ 4 зосереджується на отриманні нових теоретичних результатів. У **Підрозділі 4.1** вводиться класифікація типів компонент $ED(G)$ та доводиться верхня оцінка для довжин породжених ланцюгів у $ED(G)$ залежно від діаметра G (див. Теорему 5). Цей результат лежить в основі характеристики у.е.т.-графів діаметра 3. У **Підрозділі 4.2** подано характеристику у.е.т.-графів, які є графами блоків (див. Теорему 5), що є узагальненням характеристики дерев із першої статті про у.е.т.-графи статті [13].

У статті [13] були охарактеризовані лише самоцентральної у.е.т.-графи діаметра 3. У **Підрозділі 4.3** подано характеристику несамоцентрального у.е.т.-графів діаметра 3 (див. Теорему 6), таким чином ми отримали повну характеристику для діаметра 3. **Підрозділ 4.4** містить головний теоретичний результат, а саме характеристику $ED(G)$ для у.е.т.-графів G діаметра 4 (див. Теорему 7). Ці два підрозділи стали основою для написання статті [6].

У загальному ж випадку клас у.е.т.-графів є непротим. Для того, щоб досягнути варіативності орграфів ексцентриситетів $ED(G)$ для у.е.т.-графів G було використано еволюційний алгоритм (ЕА). **Розділ 5** зосереджений на описі розробленого ЕА. Розроблена програма може знаходити у.е.т.-графи із заданими властивостями, такими як: кількість компонент слабкої зв'язності різного типу, діаметр G , кількість вершин та ребер, довжина породжених шляхів у $ED(G)$. Проаналізувавши у.е.т.-графи знайдені ЕА, були доведені основні теоретичні результати із **Підрозділів 4.3 та 4.4**.

Результати ЕА подано у **Розділі 6**. Знайдені у.е.т.-графи структуровані за властивостями у Таблиці 1. Окремо було поставлено питання зв'язку діаметра та існування типів компонент слабкої зв'язності $ED(G)$. Після емпіричних досліджень (ЕА) було сформовано і доведено гіпотезу, що $ED(G)$ у.е.т.-графа G діаметра 4 не може містити напівголі компоненти слабкої зв'язності (див. Теорема 7). Це дало можливість повністю охарактеризувати $ED(G)$ для у.е.т.-графів G діаметра 4, що є основним теоретичним результатом нашої роботи (див. **Підрозділ 4.4**).

Також еволюційний алгоритм знайшов у.е.т.-графи, що не є ізоморфними простому циклу, але $ED(G)$ яких складається лише з голих компонент (див. Рис. 28) та у.е.т.-графи, $ED(G)$ яких містить породжений ланцюг довжини 5 (див. Рис 29, 30). Написаний еволюційний алгоритм можна використовувати для дослідження інших комбінаторних задач.

Клас унікально-ексцентрично-точкових графів може мати прикладне застосування в мультиагентних системах. Можна розглянути алгоритми пошуку лідера та консенсусу в у.е.т. системах, де кожен агент бачить єдиного іншого найкращого лідера. Тобто в такій системі жоден агент не вагається між кількома іншими при голосуванні.

Перші теоретичні результати магістерської роботи були апробовані на конференції [5], результати пошуку у.е.т.-графів за допомогою ЕА були апробовані на конференції [7]. Основні теоретичні результати опубліковані в статті [6] “*Eccentric digraphs of unique point eccentric graphs*” (журнал *Discrete Mathematics*, що індексується в Scopus, Q1).

Література

- [1] J. Boland, F. Buckley and M. Miller, *Eccentric digraphs*, *Discrete Math.* **286** (2004), 25–29.
- [2] F. Buckley, *The eccentric digraph of a graph*, *Congr. Numer.* **149** (2001) 65–76.
- [3] J. Gimberta, N. López, M. Miller and J. Ryan, *Characterization of eccentric digraphs*, *Discrete Math.* **306** (2006), 210–219.
- [4] F. Göbel and V.L. Veldman, *Even graphs*, *J. Graph Theory* **10** (1986), 225–239.
- [5] A. Hak, V. Haponenko and S. Kozerenko, *Eccentric digraphs of unique point eccentric graphs*, *Xth All-Ukrainian Conference of Young Scientists in Physics and Mathematics*, April 16-17, Kyiv, Ukraine, 84–85.
- [6] A. Hak, V. Haponenko, S. Kozerenko and A. Serdiuk, *Unique eccentric point graphs and their eccentric digraphs*, *Discrete Mathematics* **346(12)** (2023), 113614.
- [7] А. Нак, *Еволюційний пошук унікально-ексцентрично-точкових графів із заданими властивостями*, *Shevchenkiwska Vesna – 2023*, April 14, Kyiv, Ukraine, 77.
- [8] V. Haponenko, *Опуклі структури на графах*, (2023), <https://ekmair.ukma.edu.ua/handle/123456789/28326>.
- [9] F. Harary and R.Z. Norman, *The dissimilarity characteristic of Husimi trees*, *Ann. Math.* **58** (1953), 134–141.
- [10] F. Harary (1969), *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [11] E. Howorka, *On metric properties of certain clique graphs*, *J. Combin. Theory Ser. B* **27** (1979), 67–74.
- [12] H.M. Mulder, *n-cubes and median graphs*, *J. Graph Theory* **4** (1980), 107–110.
- [13] K.R. Parthasarathy and R. Nandakumar, *Unique eccentric point graphs*, *Discrete Math.* **46(1)** (1983), 69–74.

- [14] S. Sriram, D. Ranganayakulu, I. Venkat and K.G. Subramanian, *Eccentric digraphs of trees*, *Asia Pacific J. Math.* **1(2)** (2014), 141–149.
- [15] A. Miasnikov, *Genetic Algorithms and the Andrews-Curtis Conjecture*, *Int. J. Algebra Comput.* **9** (1999), 671–686.
- [16] A.Z. Wagner, *Constructions in combinatorics via neural networks*, (2021), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.14516>
- [17] J. Siek, L.Q. Lee and A. Lumsdaine, *The Boost Graph Library (BGL)*, (2000), <http://www.boost.org/libs/graph/>

Додатки

Додаток А (Обов'язковий)

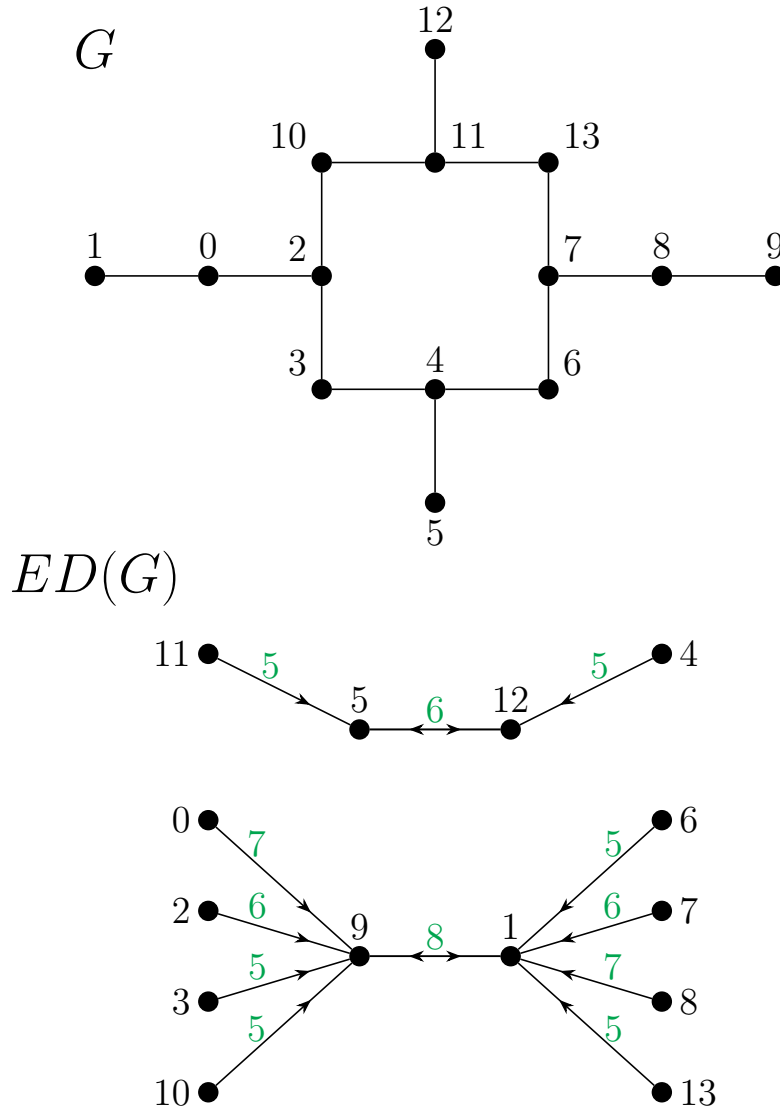


Рис. 21: У.е.т.-граф G та його $ED(G)$, що відповідає рядку № 2, Таблиці 1.

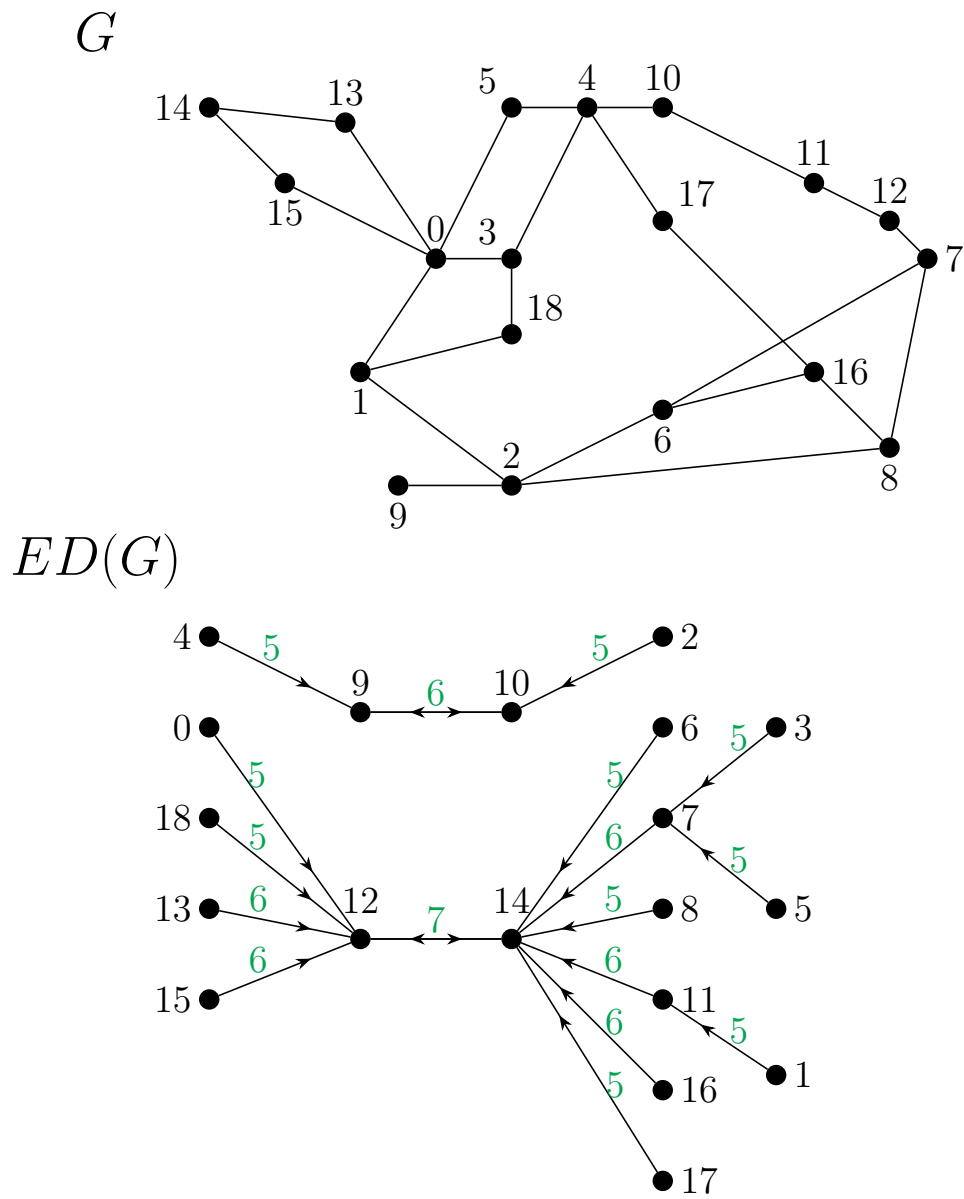
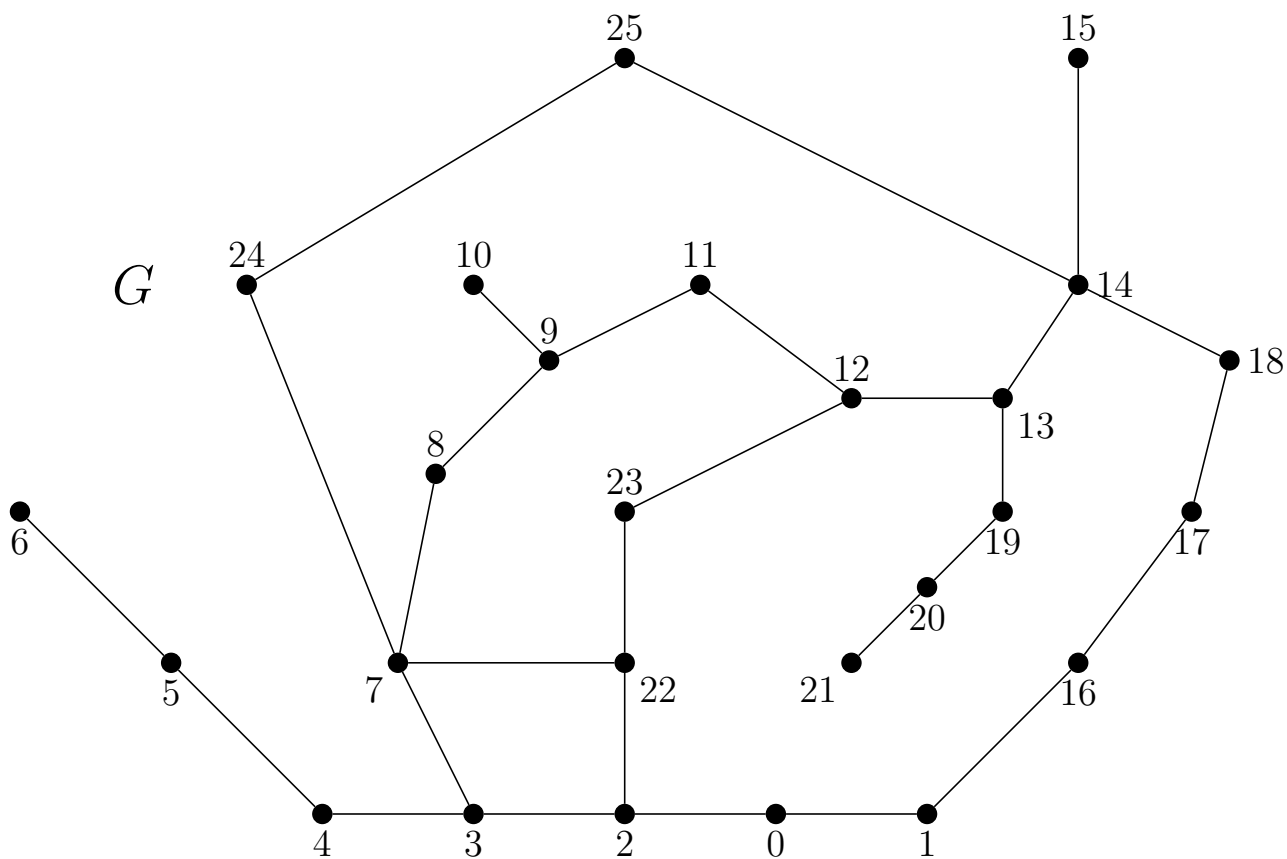


Рис. 22: У.е.т.-граф G та його $ED(G)$, що відповідає рядку № 6, Таблиці 1.



$ED(G)$

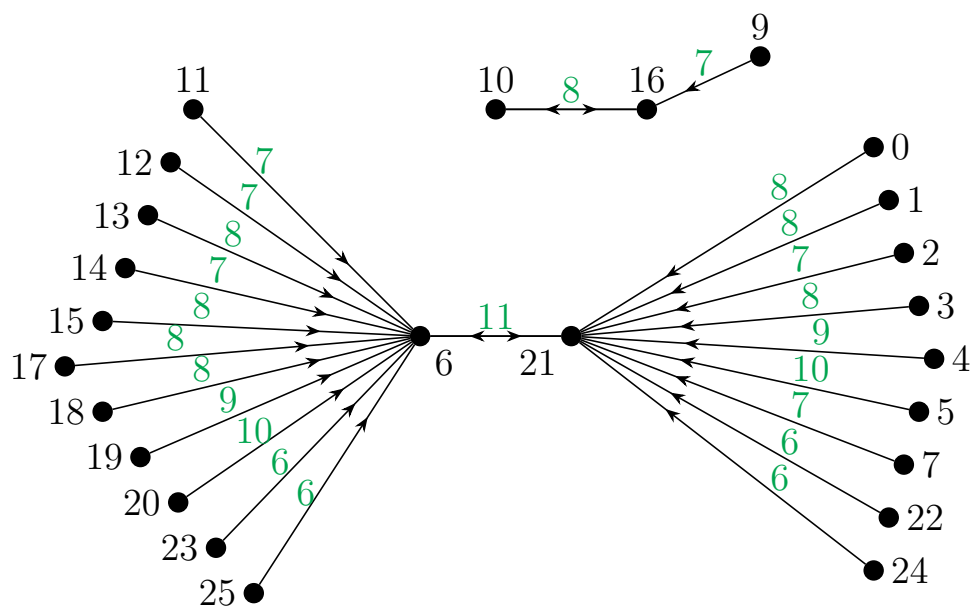


Рис. 23: У.е.т.-граф G та його $ED(G)$, що відповідає рядку № 7, Таблиці 1.

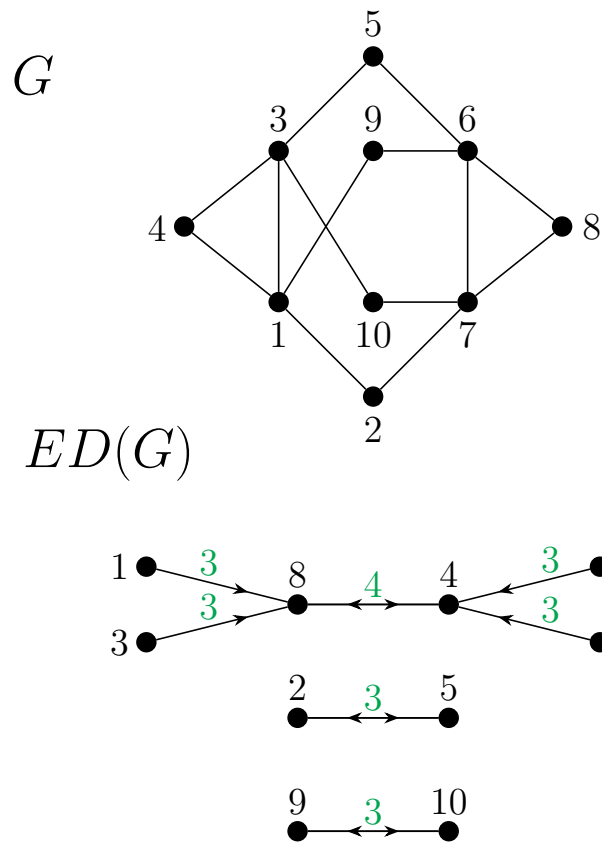


Рис. 25: У.е.т.-граф G та його $ED(G)$, що відповідає рядку № 8, Таблиці 1.

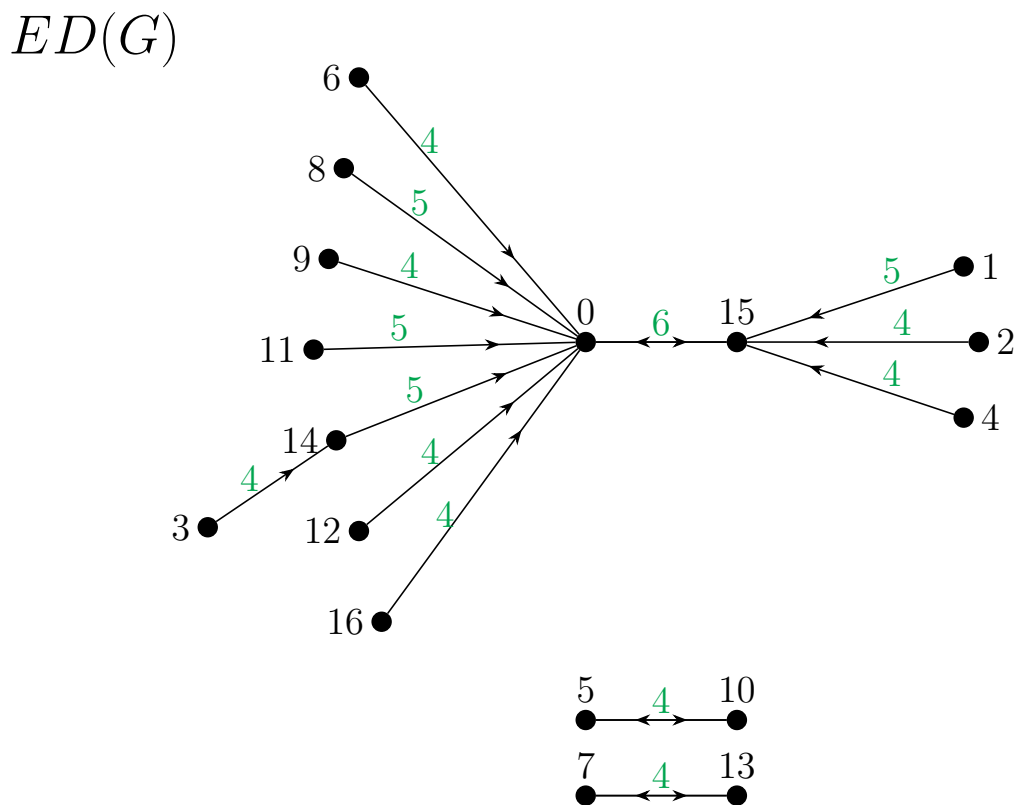
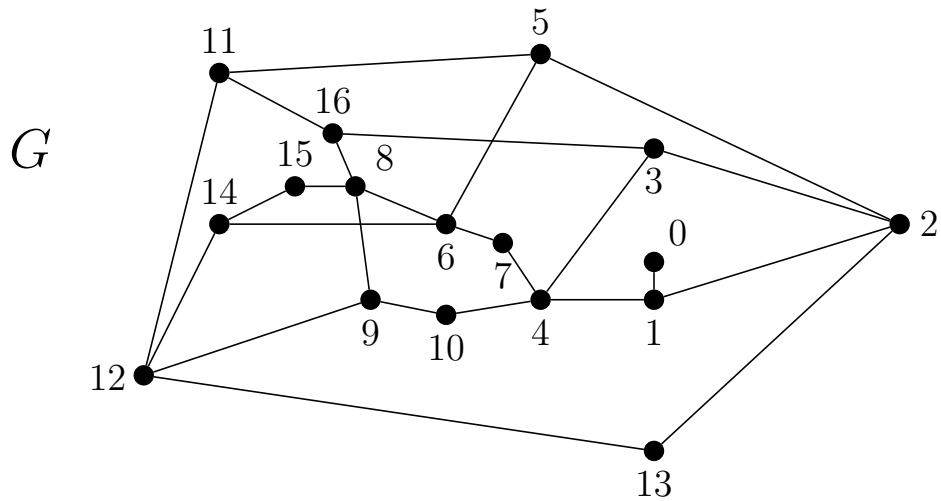
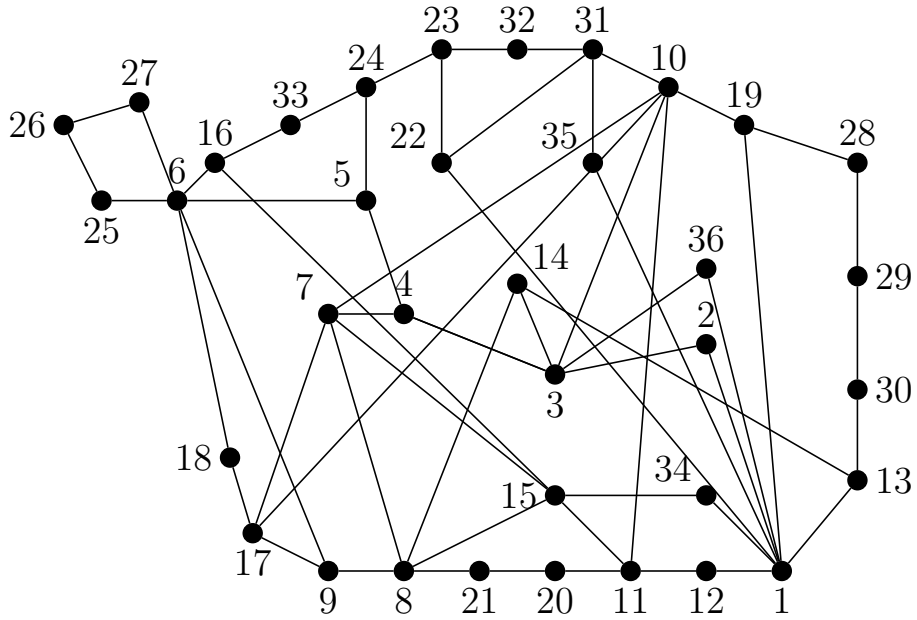


Рис. 26: У.е.т.-граф G та його $ED(G)$, що відповідає рядку № 14, Таблиці 1.

G



$ED(G)$

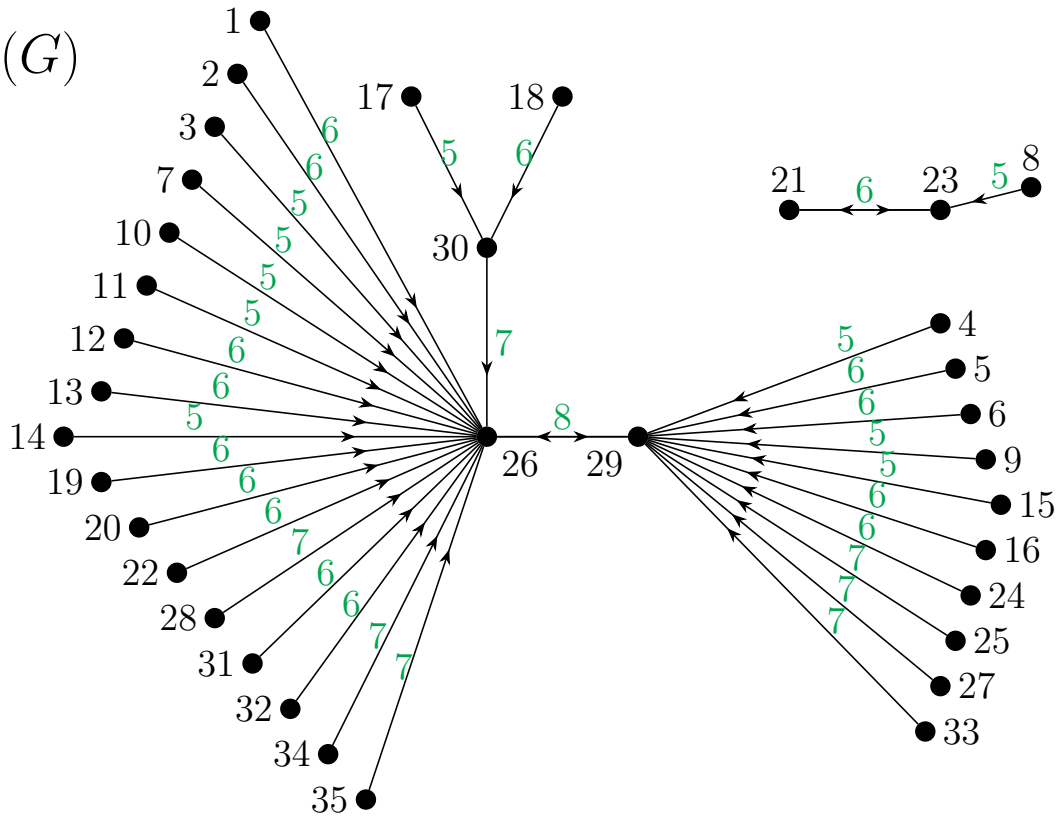
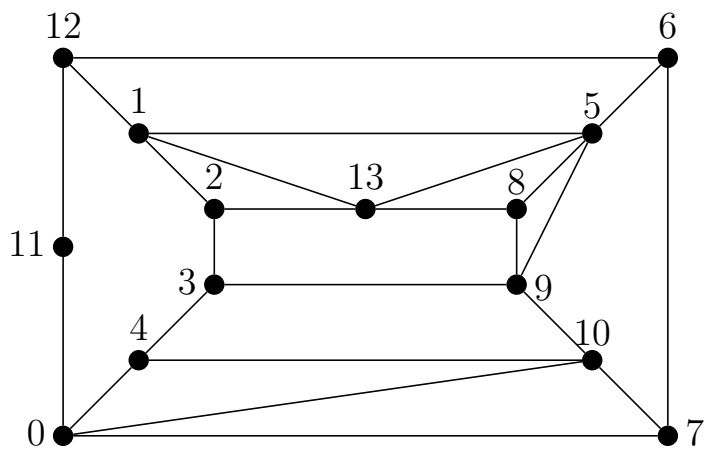


Рис. 27: У.е.т.-граф G та його $ED(G)$, що відповідає рядку № 15, Таблиці 1.

G



$ED(G)$

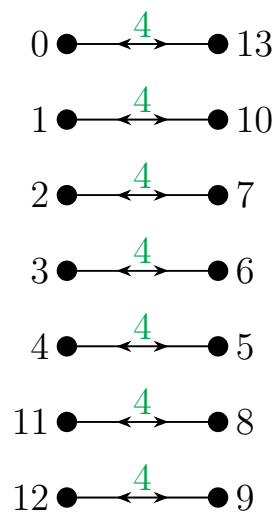


Рис. 28: У.е.т.-граф G , що не є ізоморвним простому циклу, а $ED(G)$ якого містить лише голі компоненти.

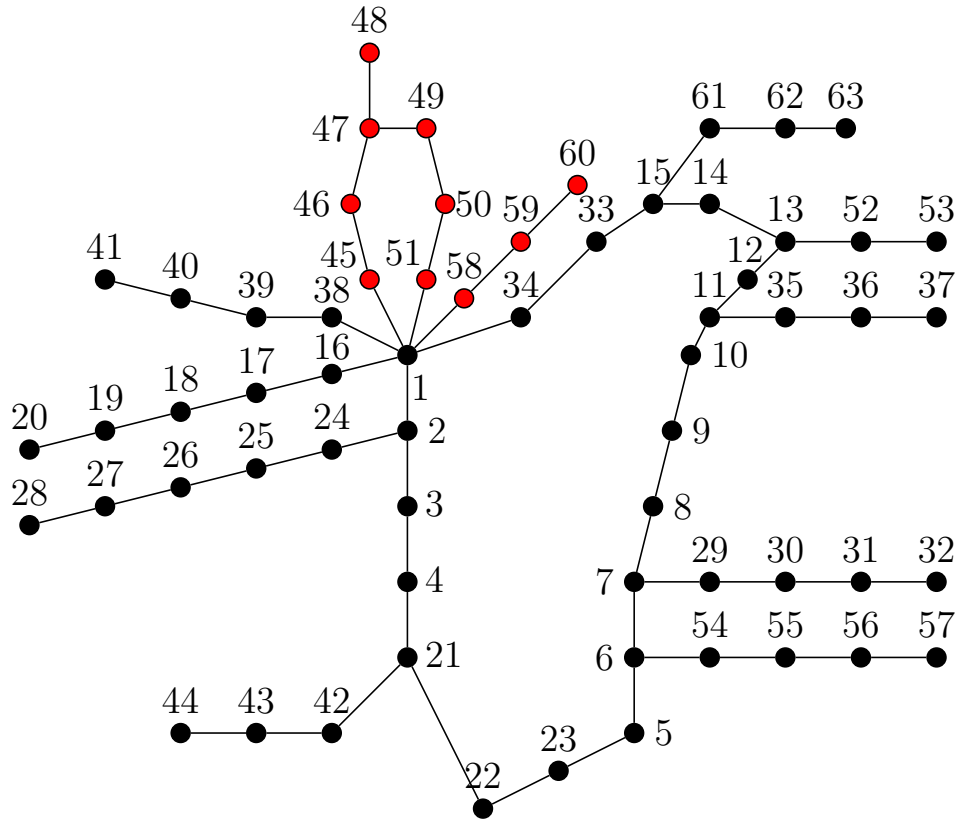


Рис. 29: У.е.т.-граф G такий, що $ED(G)$ містить породжений ланцюг довжини 5 (Рис 30). Цей граф можна спростити, видаливши вершини позначені червоним, при цьому ланцюг довжини 5 у $ED(G)$ не втратитья.

