

## КОНСТРУКЦІЇ $n$ -НАПІВМЕТРИК

У статті запропоновано конструкції  $n$ -напівметричних просторів, які, за аналогією з метричними просторами, є добутками  $n$ -напівметрик. Також розглянуто напівметрики, які будуються за допомогою функцій, що набувають дійсних невід'ємних значень.

**Ключові слова:**  $n$ -напівметрика, добуток просторів.

### Вступ

Останніми десятиріччями інтенсивного розвитку набула теорія скінченних метричних просторів. Це пов'язано із застосуванням метрик у теорії експертних оцінок, криптографії, математичній біології, хімії, комп'ютерній графіці, в розробках мереж гуртової закупівлі тощо. Крім метрик, досить часто використовується ширший клас функцій — напівметрики [1; 2].

У 1930-х рр. у [4] було введено поняття  $n$ -метрики як функції, що залежить від  $(n + 1)$ -го аргументу.  $n$ -метричні простори є природним узагальненням метричних просторів. Згодом у [3] було введено поняття  $n$ -напівметрики.

У статті розглянуто конструкції  $n$ -напівметричних просторів, які, за аналогією з метричними просторами, можна визначити як добутки  $n$ -напівметрик. Крім того, запропоновано конструкції, які за допомогою функцій, що набувають дійсних невід'ємних значень, дають змогу будувати нові  $n$ -напівметрики.

### Необхідні відомості

Нагадаємо, що напівметрикою на множині  $X$  називається довільна функція  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , для якої виконується:

- 1)  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 2)  $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Напівметрика  $d$  називається *метрикою* на  $X$ , якщо  $d(x, y) = 0$ , тоді і тільки тоді, коли  $x = y$ .

Множина із заданою на ній (напів)метрикою називається (напів)метричним простором. (Напів)метричний простір  $(X, d)$  скінченний, якщо  $|X| < \infty$ .

Нехай  $n$  — деяке натуральне число. Символом  $S_{n+1}$  позначимо знакозмінну групу порядку  $n + 1$ .

**Означення 1.**  $n$ -напівметрикою, заданою на множині  $X$ , називається функція  $d : X^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , для якої виконуються такі умови:

- 1)  $d$  — повністю симетрична, тобто для довільних  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in X^{n+1}$  і кожної перестановки  $\pi \in S_{n+1}$  чисел  $1, \dots, n + 1$  справедливою є рівність

$$d(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n+1)}) = d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}); \quad (1)$$

- 2)  $d$  — задовольняє симпліціальну нерівність, тобто для довільних  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \in X$ :

$$d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \leq d(x_2, \dots, x_{n+2}) + \sum_{i=2}^{n+1} d(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2}). \quad (2)$$

Множина  $X$  із заданою на ній  $n$ -напівметрикою  $d$  називається  $n$ -напівметричним простором і позначається  $(X, d)$ .

Прикладом  $n$ -напівметричного простору [3] є множина  $X = \{1, \dots, n + 1\}$  з заданою функцією  $d : X^n \rightarrow \{0, 1\}$ , що визначається так:

$$d(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_i = x_j \text{ для деяких } 1 \leq i < j \leq n; \\ 1 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases} \quad (3)$$

**Твердження 1.** [3]. Якщо  $(X, d)$  і  $(X, d')$  —  $n$ -напівметричні простори і  $a, b$  — деякі додатні дійсні числа,  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , то  $(X, ad + bd')$  є  $n$ -напівметричним простором.

### Добуток $n$ -напівметрик

**Теорема 1.** Нехай  $k \in N, d_1, d_2, \dots, d_k$  —  $n$ -напівметрики, задані на множині  $X$ . Визначена за таким правилом:

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2}$$

функція  $d$  є  $n$ -напівметрикою на  $X$ .

**Доведення.** Функція  $d$  — повністю симетрична, оскільки  $d_1, d_2, \dots, d_k$  повністю симетричні.

Доведемо, що

$$\sqrt{d_1^2(x_1, \dots, x_{n+1}) + \dots + d_k^2(x_1, \dots, x_{n+1})} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{d_1^2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2}) + \dots + d_k^2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})}. \quad (4)$$

Позначимо  $d_j(x_2, \dots, x_{n+2})$  як  $a_{j1}$ ,  $d_j(x_1, \dots, x_{n+1})$  як  $a_{jn+2}$ . Для  $i \in \{2, n+1\}$  позначимо  $d_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})$  як  $a_{ji}$ . При такому позначенні нерівність має вигляд:

$$\sqrt{a_{1n+2}^2 + a_{2n+2}^2 + \dots + a_{kn+2}^2} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ki}^2} \quad (5)$$

Піднесемо до квадрата:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k a_{jn+2}^2 &\leq \left( \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{a_{1i}^2 + \dots + a_{ki}^2} \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1, l=1}^{n+1} \sqrt{\sum_{j=1}^k a_{ji}^2 \cdot \sum_{t=1}^k a_{ti}^2} = \\ &= \sum_{i=1, l=1}^{n+1} \sqrt{\sum_{j=1, t=1}^k (a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2)}. \quad (6) \end{aligned}$$

Із симпліціальних нерівностей для  $d_1, d_2, \dots, d_k$  випливає:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k a_{jn+2}^2 &\leq \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_{ji} \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1, l=1}^{n+1} (a_{ji} \cdot a_{ji}) = \sum_{i=1, l=1}^{n+1} \sum_{j=1}^k (a_{ji} \cdot a_{ji}). \quad (7) \end{aligned}$$

Порівняємо для фіксованих  $i, l$  доданок  $\sqrt{\sum_{j=1, t=1}^k (a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2)}$  із нерівності (6) та доданок  $\sum_{j=1}^k (a_{ji} \cdot a_{ji})$  із нерівності (7). Покажемо, що

$$\sqrt{\sum_{j=1, t=1}^k (a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2)} \geq \sum_{j=1}^k (a_{ji} \cdot a_{ji}). \quad (8)$$

Піднесемо до квадрата обидві частини нерівності, тоді

$$\sum_{j=1, t=1}^k (a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2) \geq \sum_{j=1, t=1}^k (a_{ji} \cdot a_{ji} \cdot a_{ti} \cdot a_{ti}). \quad (9)$$

Зафіксуємо  $j, t$  такі, що  $1 \leq j \leq k, 1 \leq t \leq k$ . Розглянемо два випадки:

- Якщо  $j = t$ , в останній нерівності у сумі лівої частини є один доданок  $a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2$ , у сумі правої частини є один доданок  $a_{ji} \cdot a_{ji} \cdot a_{ti} \cdot a_{ti}$ . І ці доданки, очевидно, рівні між собою.

- Якщо  $j \neq t$ .

Порівняємо для цих  $j, t$  в останній нерівності доданки  $a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2$  та  $a_{ti}^2 \cdot a_{ji}^2$  із суми лівої частини з доданками  $a_{ji} \cdot a_{ji} \cdot a_{ti} \cdot a_{ti}$  та  $a_{ti} \cdot a_{ti} \cdot a_{ji} \cdot a_{ji}$  із суми правої частини. Покажемо, що:

$$\begin{aligned} a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2 + a_{ti}^2 \cdot a_{ji}^2 &\geq \\ &\geq a_{ji} \cdot a_{ji} \cdot a_{ti} \cdot a_{ti} + a_{ti} \cdot a_{ti} \cdot a_{ji} \cdot a_{ji}. \quad (10) \end{aligned}$$

Нерівність (10) перепишемо у такому вигляді:

$$a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2 + a_{ti}^2 \cdot a_{ji}^2 - 2 \cdot a_{ji} \cdot a_{ji} \cdot a_{ti} \cdot a_{ti} \geq 0.$$

Звідки отримуємо нерівність

$$(a_{ji} \cdot a_{ti} - a_{ti} \cdot a_{ji})^2 \geq 0,$$

що, очевидно, виконується.

Отже, виконується нерівність (10). А оскільки  $j, t$  вибрані довільно, то виконується і нерівність (9). Отже, справджується і нерівність (8). Звідки випливає, що

$$\sum_{i=1, l=1}^{n+1} \sqrt{\sum_{j=1, t=1}^k (a_{ji}^2 \cdot a_{ti}^2)} \geq \sum_{i=1, l=1}^{n+1} \sum_{j=1}^k (a_{ji} \cdot a_{ji}).$$

З останньої нерівності та (7) випливає, що справедлива нерівність (6). Що і завершує доведення теореми 1.

**Теорема 2.** Нехай  $k \in \mathbb{N}; d_1, d_2, \dots, d_k$  —  $n$ -напівметрики, задані на множині  $X$ . Визначимо  $d: X^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  за таким правилом:

$$d = \sum_{j=1}^k \sqrt{d_k}.$$

Така  $d$  —  $n$ -напівметрика.

**Доведення.** Очевидно, що  $d$  — повністю симетрична.

Покажемо, що для  $d$  виконується симпліціальна нерівність.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \sqrt{d_k(x_1, \dots, x_{n+1})} \\ & \leq \sum_{i=1}^{n+1} \left( \sum_{j=1}^k \sqrt{d_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{d_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Із симпліціальних нерівностей для  $d_1, d_2, \dots, d_k$  випливає:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \sqrt{d_k(x_1, \dots, x_{n+1})} \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^k \left( \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} d_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки корінь суми менше за суму коренів доданків, маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \left( \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} d_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})} \right) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{d_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2})} \right). \end{aligned}$$

Із останніх двох нерівностей випливає справедливості симпліціальної нерівності для  $d$ .

### Максимум двох $n$ -напівметрик

**Теорема 3.** Нехай  $d_1 : X^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $d_2 : X^n \rightarrow \mathbb{R}_+$   $n$ -напівметрики, задані на множині  $X$ . Тоді

$$\max(d_1(a_1, \dots, a_{n+1}), d_2(a_1, \dots, a_{n+1}))$$

є  $n$ -напівметрикою на  $X$ .

**Доведення.** Симетричність  $\max(d_1, d_2)$  випливає із симетричності  $d_1$  і  $d_2$ .

$$\begin{aligned} & \max(d_1(a_1, \dots, a_{n+1}), d_2(a_1, \dots, a_{n+1})) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{n+1} \max(d_1(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+2}), \\ & \quad d_2(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+2})). \end{aligned}$$

Підсилюємо нерівність, підставляючи замість  $d_1, d_2$  у лівій частині відповідні праві частини симпліціальних нерівностей для  $d_1, d_2$ :

$$\begin{aligned} & \max\left(\sum_{i=1}^{n+1} d_1(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+2}), \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^{n+1} d_2(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+2})\right) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{n+1} \max(d_1(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+2}), \\ & \quad d_2(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+2})). \end{aligned}$$

Нерівність виконується, оскільки максимум суми менше за суму максимумів.

### Конструкції $n$ -напівметрик

**Теорема 4.** Нехай  $1 \leq k \leq n$ ,  $f : X^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Тоді такі функції є  $n$ -напівметриками на  $X$ :

- 1)  $d(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{n+1} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k});$
- 2)  $d(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{n+1} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$

**Доведення.** Функції  $d$  із пунктів 1, 2 є повністю симетричними, оскільки такими є функції, відповідно,  $\max$  та  $\sum$  дійсних чисел. Доведемо відповідні симпліціальні нерівності.

1. Доведемо для 1-ї функції

$$\begin{aligned} d(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \\ &= \max_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{n+1} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \end{aligned} \quad (13)$$

Нехай

$$d(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_{u_1}, \dots, x_{u_k}),$$

де  $u_k \in \{1, \dots, n\}$ .

Симпліціальна нерівність набуває вигляду

$$\begin{aligned} & f(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_k}) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^{n+1} \max_{i_1=1, \dots, i_k=1; \\ & \quad i_1 \neq j, \dots, i_k \neq j}^{n+2} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \end{aligned} \quad (14)$$

Для  $f(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_k})$  знайдеться серед аргументів принаймні один із доданків суми правої частини симпліціальної нерівності. І цим її буде доведено.

Оскільки  $k < n + 1$ , існує  $q \in \{1, \dots, n\}$  такий, що для всіх  $i$  має місце  $u_i \neq q$ .

Розглянемо  $q$ -й доданок суми правої частини симпліціальної нерівності:

$$\max_{i_1=1, \dots, i_k=1; i_1 \neq q, \dots, i_k \neq q}^{n+2} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \quad (15)$$

Серед аргументів функції  $\max$  буде й  $f(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_k})$ .

Таким чином,

$$\begin{aligned} d(x_1, \dots, x_{n+1}) &= f(x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) \leq \\ &\leq \max_{i_1=1, \dots, i_k=1; i_1 \neq q, \dots, i_k \neq q}^{n+2} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n+1} \max_{i_1=1, \dots, i_k=1; i_1 \neq j, \dots, i_k \neq j}^{n+2} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \quad (16) \end{aligned}$$

Отже  $d$  —  $n$ -напівметрика.

2. Доведемо для 2-ї функції

$$d(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{n+1} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

Як і для пункту 1, очевидно, що це напівметрика — у лівій частині симпліціальної нерівності буде сума, усі доданки якої є серед доданків правої частини.

Симпліціальна нерівність набуває вигляду:

$$\sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{n+1} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1; i_1 \neq j, \dots, i_k \neq j}^{n+2} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \quad (17)$$

Розглянемо перший доданок правої частини при  $j = 1$ :

$$\sum_{i_1=2, \dots, i_k=2}^{n+2} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

До цієї суми входять усі доданки лівої частини нерівності, крім тих  $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ , де серед  $x_{i_p}$  є  $x_1$ .

Аналогічно до другого доданку (мається на увазі доданок першого оператора суми правої частини нерівності — він і сам є оператором суми) входять усі доданки лівої частини нерівності, крім тих  $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ , де серед  $x_{i_p}$  є  $x_2$ .

Таким чином, у перші два доданки правої частини нерівності входять усі доданки лівої частини нерівності, крім тих  $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$  де серед  $x_{i_p}$  є водночас і  $x_1$ , і  $x_2$ . І т. д.

У перші  $k$  доданки не входять лише  $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ , в яких  $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_k = k$  з точністю до перестановок. А от у перші  $k + 1$  доданки вони вже входять.

Отже, у цьому випадку симпліціальна нерівність також виконується і теорему повністю доведено.

### Список літератури

1. Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry / L. M. Blumenthal // — Oxford : Oxford University Press, 1953. — 348 p.
2. Deza M. Dictionary of Distances / M. Deza, E. Deza — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 391 p.
3. Deza M. n-semimetrics / M. Deza, I. G. Rosenberg // European Journal of Combinatorics, Special Issue "Discrete Metric Spaces" 21-5. — 2000. — P. 797–806.
4. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metrik / K. Menger // Mathematische Annalen. — Vol. 103, № 1. — 1930. — P. 466–501.

*O. Gerdiy*

### Constructions of $n$ -semimetrics

*The constructions of products of  $n$ -semimetrics are introduced.*

**Keywords:**  $n$ -semimetric, product of spaces.

Матеріал надійшов 02.02.2013