Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:
Аксіоми відокремлюваності в топологічних просторах

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

____
(підпис)
“____”____________________ 2020 р.

Виконав студент
3-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Гапоненко Владислав Олександрович
(ПІБ)

Київ – 2020

Тема: Аксіоми відокремлюванотсі в топологічних просторах.
Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	10.10.2019	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	15.10.2019	
3.	Розробка плану та структури роботи.	3.11.2019	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень топології.	30.11.2019	
5.	Дослідження основних властивостей Аксіом відокремлюваності між T_0 і T_1 та між T_1 і T_2.	20.12.2019	
6.	Дослідження основних властивостей Аксіом відокремлюваності між T_3 та T_4.	02.04.2020	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	13.04.2020	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	17.04.2020	
9.	Захист курсової роботи.	11.05.2020	

Зміст

1 Вступ

Аксіоми відокремлюваності є природніми обмеженнями, які дозволяють "розрізняти" за допомогою відкритих множин точки топологічних просторів загального типу та змушують останні поводитись як їх метричні аналоги. Ще у 1914 році Хаусдорф включив наступну аксіому відокремлюваності безпосередньо до списку аксіом топологічного простору: "для кожних двох різних точок існують їх околи, що не перетинаються". Зараз простори із аксіомою Хаусдорфа називаються T_2-просторами. Найбільш відомим і використованим послабленням аксіоми Хаусдорфа є аксіома Фреше: "для кожних двох різних точок існують їх околи, які не містять іншу точку". Простори, які задовольняють цю аксіому, називаються T_1-просторами. Наприклад, коскінченна топологія є найслабшою (за включенням) топологією, яка перетворює заданий носій на T_1-простір. Найслабшою зі стандартних аксіом відокремлюваності є аксіома Колмогорова: "для кожних двох точок існує окіл однієї з них, який не містить іншу точку". Відповідні топологічіні простори називаються T_0-просторами. Таким чином, маємо наступний ланцюжок імплікацій: $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

В даній роботі вивчаються властивості аксіом відокремлюваності та їх застосування в загальній топології. У другій секції наведені основні означення та твердження загальної топології, які будуть використовуватися в роботі. У третій секції досліджуються менш відомі аксіоми відокремлюваності, які слабші за T_1, але сильніші за T_0. В четвертій секції розглядаються аксіоми відокремлюваності, які слабші за T_2, але сильніші за T_1. П'ята секція присвячена аксіомам відокремлюваності, сильнішим за T_2, а саме, вивченню властивостей регулярних та нормальних просторів. Останній тип топологічних просторів відіграє важливу роль в проблемі метризовності (див. лему Урисона) та питаннях продовження дійсно-значних функцій з підпросторів (теорема Тітце про продовження).

2 Основні означення та приклади

Одним з основних означенн є *топологія*. Вона визначається на множині, яку кличуть носієм топології, тож нехай таким носієм топології буде X. Топологію на X позначають як τ. Вона є сім'єю множин, яка задовольняє наступні умови:

1. $\varnothing \in \tau$;

2. Об'єднання довільної кількості множин з τ має належати τ;

3. Перетин скінченної кількості множин з τ має належати τ.

Множини, що належать топології також називають відкритими. Наступним важливим поняттям є *топологічний простір*. Топологічним простором називають пару (X, τ), де X є носієм топології, а τ - топологія на X. Розглянемо декілька видів топології. *Дискретною топологією* називають топологію, що містить крім порожньої множини і самого носія також всі одноточкові множини X. З цього означення та вище перечислених умов випливає, що дискретна топологія містить всі можливі підмножини X. Наступною топологією, що ми розглянемо буде *антидискретна топологія*. Антидисретною ми називаємо топологію, що містить тільки порожню множину та сам носій, тобто ми матимемо тільки дві відкриті множини. Антидискретну топологію, ще називають тривіальною. Для наступної топології введемо означення *бази* топологічного простору. Базою простору X з топологією τ є така сім'я відкритих множин, що будь-який елемент з τ маже бути представленим у вигляді об'єднання множин з бази. Простір називається *квазі-дискретним*, якщо він містить базу, яка є розбиттям носія. Останньою дослідимо *коскінченну топологію*. Такою є топологія, що містить всі множини доповненням яких є скінченна множина. Наприклад, якщо ми матимемо коскінченну топологію на зліченному носії, то наша топологія також буде дискретною.

Наступні поняття є класифікаціями множин. Множину A ми будемо називати *відкритою*, якщо $A \in \tau$, або *замкненою*, якщо існуватиме така $S \in \tau$, що $A = X \setminus S$. Ми також допускаємо, що будь-яка множина може бути одночасно і відкритою і замнкеною. Наприклад, якщо розглянемо дискретну топологію на будь-якумо носії, то всі можливі підмножини X будуть не тільки відкритими, що випливає з означення дискретної топології, а і замкненими.

Проаналізуємо поняття *внутрішності* множини. Внутрішністю множини називають об'єднання всіх її відкритих підмножин. Тобто, внутрішністю A буде найбільша відкрита підмножина A. Внутрішність множини A позначають як $\operatorname{Int} A$. Суміжним поняттям до внутрішності множини є її *замикання*. Замикання множини A - це найменша замкнена множина, що її містить. Очевидним є твердження, що множина буде своїм замиканням, якщо вона сама є замкненою. Замикання множини A ми надалі позначатимемо як $\operatorname{Cl} A$. Також розрізнятимемо поняття *узагальнено замкненої множини*, що базується на понятті замикання. Множина в топологічному просторі називається узагальнено замкненою, якщо для кожної відкритої множини

U_A, що містить A, виконується $\operatorname{Cl} A \subset U$, де $\operatorname{Cl} A$ є замиканням A. Також справедливими будуть твердження, що кожна замкнена множина є також узагальнено замкненою і кожна множина простору є узагальнено замкненою тоді і тільки тоді, коли він є квазі-дискретним. Додамо ще декілька понять, що базуються на замиканні. *Всюди щільною множиною* є така, що її замиканням є носій топології. Множина A щільна в множині B, якщо $B \subset \operatorname{Cl} A$;

Розглянемо *зв'язний топологічний простір*. Таким є простір, носій якого не може бути представлений у вигляді об'єднання двох диз'юнктивних відкритих множин. Важливим представником зв'язних просторів є *простір Серпінського*, що є єдиним (з точністю до гомеоморфізму) двоточковим зв'язним не дискретним простором. По аналогії із зв'язним простором, *зв'язною множиною* є така множина, що не може бути представлена у вигляді об'єднання двох диз'юнктивних відкритих множин.

Далі наведемо означення просторів, що задовольняють T_0, T_1, T_2, T_3 та T_4 аксіому відокремлюваності відповідно. Введемо означення аскіоми відокремлюваності T_0, що є найслабшою. Ми кажемо, що простір, де для кожних двох точок існує відкрита множина, що містить тільки одну з них, задовольняє аксіому відокремлюваності T_0, або є T_0-простором. Приклад T_0-простору, в якому *жодна* одноточкова множина не є замкненою: $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$. T_1-простір - це такий, що для всіх пар точок $x, y \in X$ існують такі їх околи U_x та U_y відповідно, що $y \notin U_x$ і $x \notin U_y$. Ця аксіома відокремлюваності є більш сильнішою, бо тепер не достатньо, щоб хоча б одна точка з пари мала окіл, що не містить іншої. Ще сильнішою аксіомою відоскремлюваності є T_2. T_2-простір - це такий, в якому кожні дві точки мають різні неперетинні відкриті множини. Простір, що відповідає аксіомі відокремлюваності T_3 є таким, в якому для кожної точки x і замкненої множини A, що $x \notin A$ існують відкриті множини $x \in U_x, A \subseteq U_A$, що $U_x \cap U_A = \varnothing$. І найсильнішою з розглянутих буде аксіома T_4. T_4-простором є такий, в якому будь-які різні замкнені множини, що не перетинаються, належать різним диз'юнктивним відкритим множинам.

Наступні поняття будуть пов'язані з послідовностями у топологічних просторах. Введемо поняття *околу* точки. Околом точки в топологічному просторі називають відкриту множину, що містить цю точку. Послідовність (x_i), де $i \geq 0$, є *сталою з деякого номера*, якщо починаючи з деякого $n \in \mathcal{N}$ для всіх x_i, x_j, де $i, j \geq n$, виконується $x_i = x_j$. Введемо поняття *збіжної послідовності*. Послідовність (x_i), де $i \geq 0$, збігається до x, якщо для x існує такий окіл U_x, що починаючи з певного номеру $n \in \mathcal{N}$ всі $x_{i \geq n} \in U_x$.

Наступні означення використовують для порівняння топологій між собою. Нехай маємо X - носій топології, та визначені на ньому дві топології τ_1 і τ_2, тоді τ_1 є *сильнішою* за τ_2, якщо $\tau_2 \subseteq \tau_1$, а τ_2 називають *слабішою* за τ_1.

Введемо оператори $\operatorname{Ker} A$ та $\operatorname{Der} A$. Оператор $\operatorname{Ker} A$ позначає перетин всіх відкритих множин, які містять множину A. Для наступного оператора необхідними поняттями є *гранична точка* і *ізольована точка.* Граничною точкою множини A є така точка x, що кожний її окіл містить підмножину A, не рахуючи саму x. З цього слідує, що граничними для A можуть бути як точки з A так і точки з $X \backslash A$ і не завжди справедливо, що $x \in A$ є граничною точкою A. Точку $x \in A$ ми називаємо ізольованою в A, якщо існує такий її окіл U_x, що $U_x \cap A = \varnothing$. З означень зрозуміло, що ізольована точка не може бути гранично. Останній оператор $\operatorname{Der} A$ позначає множину всіх граничних точок A, які не є ізольованими. Справедливим буде твердження, що множина A *дискретна*, якщо $A \cap \operatorname{Der} A = \emptyset$

Також означимо поняття *компактного простору.* Для цього означення необхідно ввести поняття *покриття простору*, та *скінченного підпокриття.* S є покриттям простору X, коли S є сім'єю відкритих підмножин з X, що $X = \bigcup_{A \in S} A$. Тоді скінченним підпокриттям S ми називатимемо таку підмножину U з S, що U є сім'єю скінченної кількості множин S і також є покриттям X. Тепер ми можемо ввести поняття компактного простору. Таким ми називаємо простір кожне покриття якого має скінченне підпокриття.

Розглянемо поняття *топології підпростору.* Зафіксуємо топологічний простір (X, τ) і підмножину $S \subseteq X$. Тоді топологією підпростору на S вважатимемо $\tau_S = \{S \cap U | U \in \tau\}$, а пару (S, τ_S) називатимемо підпростором (X, τ).

Останні означення стосуються відображень топологічних просторів. Відображення $f : X \longmapsto Y$ є *неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого околу U образу $f(x)$ існує такий окіл V точки x, що $f(V) \subset U$, а інакше таке відбраження називають *розривним в точці* x. Відображення називають *неперервним*, якщо воно неперервне у всіх $x \in X$ і *розривним* в іншому разі.

3 Аксіоми відокремлюваності між T_0 та T_1

Ми почнемо з наступної характеризації T_0-просторів.

Теорема 3.1. *Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:*

1. *X є T_0-простором;*
2. *для кожної пари множин $A, B \subset X$ виконується включення*
$$A \cap \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} A) \subset \operatorname{Der} A \cup \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} B);$$
3. *X не містить двох неперетинних щільних одна в одній дискретних множин.*

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Нехай X є T_0-простором. Зафіксуємо $x \in A \cap \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} A)$. Ми повинні показати, що x також належить множині $\operatorname{Der} A \cup \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} B)$. Припустимо, що $x \notin \operatorname{Der} A$. Тож, $x \in A$ і існує відкрита множина U_x із $x \in U_x$ та $U_x \setminus \{x\} \subseteq X \setminus A$. Для того, щоб показати, що $x \in \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} B)$, зафіксуємо відкриту множину U'_x, що є околом x. Розглянемо множину $S = U_x \cap U'_x$, що також є околом x і, оскільки $x \in \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} A)$, має існувати $y \in S \setminus \{x\}$ із $y \in B, y \in \operatorname{Der} A$. Оскільки x це єдина точка з A в S, що є околом y, і $y \in \operatorname{Der} A$, справедливим буде твердження, що $y \in \operatorname{Der} x$. Далі покажемо, що $y \in \operatorname{Der} B$. Зафіксуємо U_y, що є околом y. Розглянемо множину S_1, що є перетином U_y та S і також є околом y. З того, що y належить до множини граничних точок x, випливає, що $x \in S_1$. Оскільки всі околи y містять x за означенням T_0-простору маємо, що існує окіл x, що не містить y. Нехай таким околом буде V. Розглянемо множину $S_2 = V \cap S_1$, що буде околом x. Оскільки $x \in \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} A)$, має існувати точка $z \in S_2 \setminus \{x\}$, що $z \in B, z \neq y$. Видно, що $S_2 \subseteq U_y$, з чого випливає, що $z \in B \cup (U_y \setminus \{y\})$, тож y у кожному околі міститиме точку з B, що означає $y \in \operatorname{Der} B$. З цього випливає $y \in B \cap \operatorname{Der} B$. Оскільки x в кожному своєму околі U'_x містить іншу точку y, що $y \in \operatorname{Der} B$, то $x \in \operatorname{Der} B$, що і треба було довести.

$2 \Rightarrow 3$. Нехай $A, B \subset X$ є неперетинними взаємно щільними та дискретними множинами. Із означення щільності для множин слідує, що $A \subset \operatorname{Cl}(B)$, що означає $A \subset B \cup \operatorname{Der} B$ і, оскільки множини A і B є диз'юнктивними, маємо $A \cap \operatorname{Der} B = A$. Також, правдиво твердження $B \cap \operatorname{Der} A = B$. Оскільки з означення множина граничних точок множини не має ізольованих точок, а зафіксовані нами множини є дискретними, тобто всі їх точки є ізольованими, справедливе твердження, що $B \cap \operatorname{Der} B = \varnothing$ та $A \cap \operatorname{Der} A = \varnothing$. З цього слідує, що $A \nsubseteq \operatorname{Der} A$ і $A = A \cap \operatorname{Der} B = A \bigcap \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} A)$ та $\operatorname{Der} A = \operatorname{Der} A \cup \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} B)$. Маємо суперечність, бо

$$A \cap \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} A) \nsubseteq \operatorname{Der} A \cup \operatorname{Der}(B \cap \operatorname{Der} B).$$

$3 \Rightarrow 1$. Від супротивного. Припустимо, що існують дві одноточкові множини $\{x\}, \{y\} \subset X$, що $\{x\} \bigcap \{y\} = \varnothing$ та не існує такої відкритої множини $A \subseteq X$, що $\{x\} \subset A$ та $\{y\} \bigcap A = \varnothing$ або навпаки. Тоді в одноточкових множин $\{x\}, \{y\}$ є спільне замикання, вони є дискретними і за нашим початковим припущенням неперетинними, що суперечить умові 3. □

Тепер наведемо основну характеризацію T_1-просторів.

Теорема 3.2. *Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:*

1. *X є T_1-простором;*
2. *кожна одноточкова множина в X є замкненою;*
3. *кожна стала з деякого номера послідовність має єдину границю.*

Доведення. $1 \Rightarrow 2$. Нехай $x, y \in X$ та $x \neq y$. За означенням T_1-простору маємо, що кожної точки $y \in X$ існує її окіл $U_y \subset X \setminus \{x\}$. Об'єднавши всі такі околи U_y, отримаємо множину $B = X \setminus \{x\}$, яка буде відкритою. Тому $\{x\}$ буде замкненою.

$2 \Rightarrow 3$. Нехай послідовність x_n стала з деякого номеру. Тобто, існує такий елемент $x \in X$ та число $N \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх $n \geq N$ маємо $x_n = x$. Припустимо, що існує $y \in X \setminus \{x\}$ із $x_n \to y$. Оскільки множина $\{x\}$ замкнена, то її доповнення $X \setminus \{x\}$ відкрите та $y \in X \setminus \{x\}$. Іншими словами, $X \setminus \{x\}$ є околом y. Тому з того, що $x_n \to y$ слідує, що існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \geq N$ маємо $x_n \in X \setminus \{x\}$, тож отримуємо суперечність, бо $x_n \neq x$.

$3 \Rightarrow 1$. Нехай $x, y \in X$ пара різних точок простору. Розглянемо сталу послідовність $x_n = x$ для всіх $n \geq 1$. Оскільки y не є границею x_n, то існує окіл U точки y такий, що $x \notin U$. Це і означає, що X є T_1-простором. □

Наслідок 3.3. *Коскінченна топологія є найслабшою з усіх T_1-топологій на даному носії.*

Наслідок 3.4. *Топологічний простір Александрова (зокрема, кожен простір зі скінченним носієм) є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли він дискретний.*

Доведення. Достатність цієї умови очевидна, а її небхідність випливає із другої умови Теореми 3.2. □

Нагадаємо, що множина $A \subset X$ в топологічному просторі X називається *зв'язною*, якщо вона є зв'язним простором відносно індукованої топології з X. Іншими словами, A зв'язна тоді й тільки тоді, коли для будь-яких відкритих множин $U, V \subset X$ із $A \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ маємо $A \subset U$ або $A \subset V$. Множина $A \subset X$ в просторі X називається *сильно зв'язною* [3], якщо для будь-якої пари відкритих множин $U, V \subset X$ із $A \subset U \cup V$ виконано $A \subset U$ або $A \subset V$. Очевидно, що кожна сильно зв'язна множина є зв'язною. Також легко бачити, що кожна одноточкова множина є сильно зв'язною.

Твердження 3.5. *Топологічний простір X є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли єдиними його сильно зв'язними множинами є порожня множина та одноточкові множини.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є T_1-простором. Його одноточкові множини і порожня множина, очевидно, будуть сильно зв'язними. Зафіксуємо множину $A \subset X$, що містить більше одного елементу. Тоді з означення T_1-простору слідує, що для всіх пар елементів $x, y \in A$ існуватимуть їх околи U_x та U_y відповідно із $y \notin U_x$ та $x \notin U_y$. Зафіксуємо елемент $x \in A$. Розглянемо об'єднання околів всіх інших елементів з A, що не містять x, позначимо його $S = \bigcup_{y \neq x} \{U_y | x \notin U_y\}$. Тоді A належатиме об'єднанню S та довільного околу x, тобто не буде сильно зв'язною.

Достатність. Нехай маємо простір X такий, що єдиними його сильно зв'язними множинами є порожня множина та одноточкові множини. Тоді розглянемо всі можливі двоточкові множини $A = \{x, y\}$ для всіх $x, y \in X$, що $x \neq y$. Оскільки A не є сильно зв'язною, то існують такі дві відкриті множини $U, V \subset X$, що $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq A$ та $A \cap V \neq A$. Не втрачаючи загальності, скажемо, що $A \cap U = \{x\}$ і $A \cap V = \{y\}$. З цього слідує, що для всіх $x, y \in X$ існуватимуть околи U_x та U_y відповідно, що $y \notin U_x$ та $x \notin U_y$, а це співпадає з означенням T_1-простору. □

Твердження 3.6. *Топологічний простір X є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Ker} A = A$ *для всіх множин $A \subset X$.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є T_1 топологічним протсором. Розглянемо довільну множину $A \subset X$ і її доповнення $B = X \backslash A$. Тоді для довільної точки $b \in B$ у кожної точки $x \in A$ існує перетин, що не містить b і очевидно об'єднання таких перетинів буде містити A, позначимо таке об'єднання U_b. Тоді розглянемо перетин U_b для всіх $b \in B$. Такий перетин буде дорівнювати A, оскільки всі U_b містять A, а наявність іншої точки окрім A в цьому перетині суперечить умові, що ми розглядаємо T_1 топологічний простір.

Достатність. Для довільної точки $x \in X$ розглянемо множину $A = X \backslash \{x\}$. За умовою, $\operatorname{Ker} A = A$. Звідси, A відкрита (в іншому разі, єдиним околом A був би весь простір X і тоді б мала місце рівність $\operatorname{Ker} A = X$). Отже, $\{x\} = X \backslash A$ замкнена множина. Тобто, X є T_1-простором. □

Першою аксіомою відокремлюваності між T_0 та T_1, яку ми розглянемо, є така: кажуть, що топологічний простір є *$T_{1/2}$-простором*, якщо кожна його узагальнено замкнена множина є замкненою. Маємо наступну зручну характеризацію $T_{1/2}$-просторів.

Теорема 3.7. *Топологічний простір є $T_{1/2}$-простором тоді й тільки тоді, коли кожна його одноточкова множина є замкненою або відкритою.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є $T_{1/2}$-простором. Зафіксуємо точку $x \in X$ таку, що множина $\{x\}$ не є замкненою. Покладемо $A = X \backslash \{x\}$. Тоді A буде узагальнено замкненою, бо єдиним її околом буде весь простір X. Отже, A замкнена множина. Як наслідок маємо, що доповнення до A має бути відкритим, тобто $\{x\}$ відкрита. Необхідність доведена.

Достатність. Позначимо через $\operatorname{Iso} X$ множину всіх точок $x \in X$, для яких $\{x\}$ є відкритою множиною. Будь-яка підмножина $\operatorname{Iso} X$ буде відкритою. Зафіксуємо узагальнено замкнену множину A. Оскільки $\operatorname{Iso} X \backslash A$ відкрита, то її доповнення $B = X \backslash (\operatorname{Iso} X \backslash A) = (X \backslash \operatorname{Iso} X) \cup A$ замкнене, причому $A \subset B$. Тому $\operatorname{Cl}(A) \subset B$. Тепер припустимо, що $\operatorname{Cl}(A) \backslash A$ має спільну точку з $X \backslash \operatorname{Iso} X$. Тоді $\{x\}$ замкнена множина. Отже, $X \backslash \{x\}$ відкрита і $A \subset X \backslash \{x\}$.

Оскільки A є узагальнено замкненою, то $\operatorname{Cl}(A) \subset X \backslash \{x\}$. Тобто, x не лежить в $\operatorname{Cl}(A)$, отримали суперечність. Отже, $\operatorname{Cl}(A) \backslash A$ дійсно не перетинається із $X \backslash \operatorname{Iso} X$ і, за викладеним вище, $\operatorname{Cl}(A) \subset A$. Тому A буде замкненою. Достатність доведена. □

Наслідок 3.8. *Кожен T_1-простір є $T_{1/2}$-простором, а кожен $T_{1/2}$-простір є T_0-простором.*

Доведення. Спочатку доведемо, що кожен T_1 простір є $T_{1/2}$-простором. Оскільки всі точки T_1-простору є замкненими, то це співпадає із властивістю $T_{1/2}$-простору про замкненість або відкритість кожної точки простору, доведену в Теоремі 3.7.

Тепер доведемо, що кожен $T_{1/2}$ простір є T_0-простором. Для цього знову скористаємося властивістю $T_{1/2}$-просторів про замкненість або відкритість кожної одноточкової підмножини. Розглянемо три різні пари точок , що можуть існувати в $T_{1/2}$-просторі. Нехай $x, y \in X$ та $\{x\}, \{y\}$ є відкритими. Тоді уже судячи з умови, кожна точка з пари такого типу матиме окіл , що не міститиме іншу, що узгоджується із означенням T_0-простору. Розглянемо пару $x, y \in X$ та $\{x\}, \{y\}$ є замкненими. Тоді знову існуватимуть околи $X \setminus \{y\}$, $X \setminus \{x\}$ відповідно для $\{x\}$ та $\{y\}$, куди б входила тільки одна точка з пари, що знову відповідає означенню T_0-простору. І розглядаючи пару $x, y \in X$, де $\{x\}$ відкрита, а $\{y\}$ є замкненою, можна одразу сказати, що x через відкритість $\{x\}$ матиме окіл, що не містить y, що в свою чергу є достатньою умовою для задоволення означення T_0-простору. □

Приклад 3.9. Очевидно, що простір Серпінського є $T_{1/2}$-простором, але не є T_1-простором. Також, розглянемо носій $X = \{a, b, c\}$ із заданою на ньому топологією $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$. Легко бачити, що X є T_0-простором, але не є $T_{1/2}$-простором, бо одноточкова множина $\{b\}$ не є ані замкненою, ані відкритою. Таким чином, жодну імплікацію із Наслідку 3.8 не можна розвернути.

Топологічний простір називається *субмаксимальним*, якщо кожна його всюди щільна множина є відкритою (еквівалентно, кожна множина із порожньою внутрішністю є замкненою).

Твердження 3.10. *Кожен субмаксимальний топологічний простір є $T_{1/2}$-простором.*

Доведення. Скористаємся властивістю $T_{1/2}$-простору, що кожен $T_{1/2}$ простір має або замкнені, або відкриті одноточкові множини. Нехай маємо субмаксимальний простір X та одноточкову множину x, яка не є відкритою. Тоді доповненням до x буде множина $A = X \setminus \{x\}$, що за нашим припущенням про невідкритсть $\{x\}$ не є замкненою. З цього слідує, що $\mathrm{Cl}(A) = X$, тож вона буде скрізь щільною, а через субмаксимальність X також буде відкритою. З цього випливає, що x має бути замкненою. □

Топологічний простір називається *простором із дверима* (англ. door space), якщо кожна його множина є відкритою або замкненою. Очевидно, що кожен простір із дверима є $T_{1/2}$-простором. Ми доведемо сильніше (в світлі Твердження 3.10) твердження.

Твердження 3.11. *Кожен простір із дверима є субмаксимальним.*

Доведення. Припустимо, що X простір з дверима. Нехай маємо всюди щільну множину $A \subset X$ і вона не є відкритою, тож за припущенням вона має бути замкненою, але тоді множина A не є всюди щільною, адже вона і буде своїм замиканням, тож вона є відкритою, а простір буде субмаксимальним. □

Топологічний простір X називається *симетричним* або R_0-*простором*, якщо для кожної пари його точок $x, y \in X$ із $y \in \mathrm{Cl}(\{x\})$ слідує $x \in \mathrm{Cl}(\{y\})$.

Твердження 3.12. *Топологічний простір є симетричним тоді й тільки тоді, коли кожна його одноточкова множина є узагальнено замкненою.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай простір X є симетричним. Зафіксуємо одноточкову множину $\{x\} \subset X$. Припустимо, що вона не узагальнено замкнена. Тоді існує такий її окіл U_x, що $\mathrm{Cl}(\{x\}) \cap U_x \neq \mathrm{Cl}(\{x\})$. Розглянемо множину $S = (X \setminus U_x) \cap \mathrm{Cl}(\{x\})$, де $X \setminus U_x$ є доповненням відкритої множини, тобто є замкненою. Точки з S будуть належати замиканню $\{x\}$, але не навпаки. Отримали суперечність.

Достатність. Нехай $\{x\}, \{y\} \subset X$ довільні одноточкові множини, що є узагальнено замкненими. Нехай $\{x\} \subset \mathrm{Cl}(\{y\})$, проте $\{y\} \not\subseteq \mathrm{Cl}(\{x\})$. Тоді розглянемо відкриту множину $X \setminus \mathrm{Cl}(\{x\})$.Вона є околом $\{y\}$ але таким, що не містить замикання $\{y\}$, що суперечить узагальненій замкненості $\{y\}$. □

За допомогою аксіоми відокремлюваності R_0 можна отримати ще одну характеризацію T_1-просторів.

Твердження 3.13. *Топологічний простір є T_1-простором тоді й тільки тоді, коли він симетричний T_0-простір.*

Доведення. **Необхідність.** Вона очевидна бо, якщо X є T_1, з цього слідуватиме, що $\mathrm{Cl}(\{x\}) = \{x\}$.

Достатність. Щоб довести достатність, припустимо, що X не є T_1 топологічним простором. Тоді існує пара точок $x, y \in X$ така, що кожен окіл x містить й y. Тоді $y \in \mathrm{Cl}(\{x\})$. За симетричністю, $x \in \mathrm{Cl}(\{y\})$. Тобто, кожен окіл y містить x. Звідси, X не є T_0-простором. Суперечність. □

Наслідок 3.14. *Для T_0-простору X наступні умови еквівалентні:*

1. *X є симетричним простором;*
2. *X є $T_{1/2}$-простором;*
3. *X є T_1-простором.*

Доведення. $1 \Rightarrow 3$. Припустимо, що X не є T_1-простором. Тоді існує пара точок $x, y \in X$ така, що кожен окіл x містить й y. Тоді $y \in \mathrm{Cl}(\{x\})$. За симетричністю, $x \in \mathrm{Cl}(\{y\})$. Тобто, кожен окіл y містить x. Звідси, X не є T_0-простором. Суперечність.

$3 \Rightarrow 2$. Нехай X є T_1-простором. Тоді за властивістю T_1-просторів всі його одноточкові множини замкнені, що співпадає з властивістю $T_{1/2}$-просторів.

$2 \Rightarrow 1$. Оскільки $T_{1/2}$-простори мають властивість, що їх одноточкові множини або відкриті, або замкнені, то можна сказати, що замкнені одноточкові множини самі і будуть своїм замиканням, а відкриті множини не матимуть спільного замикання через те, що інакше б у них були всі околи спільними. □

Таким чином, кожен T_1-простір є симетричним. Слід також зауважити, що властивості простору бути симетричним або T_0-простором (а також і $T_{1/2}$-простором) непорівнювані. Дійсно, простір Серпінського є прикладом несиметричного T_0-простору. З іншого боку, кожен антидискретний простір на носії із хоча б двома елементами, є прикладом симетричного простору, який не є T_0-простором.

Топологічний простір X називається *слабко симетричним*, або *w-R_0-простором* [5], якщо $\bigcap_{x \in X} \mathrm{Cl}(\{x\}) = \emptyset$.

Приклад 3.15. Нехай X непорожня множина, а $p \in X$ деяка її точка. Покладемо $\tau = \{A \subset X : p \notin A\} \cup \{X\}$. Тоді τ є топологією на X, яка називається *топологією вилученої точки*. Легко бачити, що в такому просторі всі непорожні замкнені множини містять точку p, тому цей простір не є слабко симетричним.

Легко бачити, що кожен симетричний простір X, який не містить всюди щільних одноточкових множин завжди є слабко симетричним. Дійсно, якби існувала точка $y \in \bigcap_{x \in X} \mathrm{Cl}(\{x\})$, то за симетричністю простору X, одноточкова множина $\{y\}$ була би всюди щільною. Також очевидно, що довільний простір із хоча б двома різними замкненими одноточковими множинами (зокрема, кожен T_1-простір) є слабко симетричним. Якщо ж X є

T_0-простором, то для будь-якої точки $y \in \bigcap_{x \in X} \mathrm{Cl}(\{x\})$ множина $\{y\}$ є замкненою. Отже, в цьому випадку $|\bigcap_{x \in X} \mathrm{Cl}(\{x\})| = 1$. Нарешті, якщо X є $T_{1/2}$-простором, який не є слабко симетричним, то топологія на X є топологією вилученої точки.

Нагадаємо, що через $\mathrm{Ker}\, A$ ми позначаємо перетин всіх відкритих множин, які містять дану множину $A \subset X$. Маємо наступний критерій для слабко симетричних просторів в термінах оператора Ker.

Твердження 3.16. *Простір X є слабко симетричним тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Ker}(\{x\}) \neq X$ для всіх точок $x \in X$.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X слабко симетричний простір. Допустимо, що для довільного $x \in X$ не виконується $\mathrm{Ker}(\{x\}) \neq X$. Тоді такий x має перетинати всі замкнені множини, бо інакше він належатиме околу меншому за X. Проте, це суперечить початковій умові, що X є слабко симетричним простором.

Достатність. Нехай X є таким простором, для якого $\mathrm{Ker}(\{x\}) \neq X$ для всіх x. Припустимо, що існує y, що належить перетину замикань всіх одноточкових множин з X. Тоді окіл y має містити всі точки з X, бо інакше y не належатиме перетину замикань всіх одноточкових множин, тож єдиним околом y має бути X, що суперечить початковій умові. □

4 Аксіоми відокремлюваності між T_1 та T_2

Топологічний простір X називається *R_1-простором* [2], якщо для кожної пари його точок $x, y \in X$ із $\mathrm{Cl}(\{x\}) \neq \mathrm{Cl}(\{y\})$ існують їх околи, які не перетинаються.

Твердження 4.1. *Топологічний простір є T_2-простором тоді й тільки тоді, коли він є R_1-простором та T_0-простором.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є T_2 простором. З означення T_2 простору випливає, що X також є T_0 простором. Оскільки для всіх пар точок з X існують неперетинні околи, то X також є R_1-простором.

Достатність. Нехай X є T_0 та R_1-простором. З означення T_0-простору слідує, що для всіх пар точок $x, y \in X$ існує відкрита множина, що містить тільки одну з цих точок. З цього слідує, що ці точки не мають однакових замикань. З означення R_1-простору слідує, що ці точки матимуть неперетинні околи. Оскільки це виконується для всіх пар $x, y \in X$, що $x \neq y$, простір задовольняє T_2 аксіому відокремлюваності. □

Топологічний простір називається:

- *KC-простором*, якщо в ньому кожна компактна підмножина є замкненою;

- *US-простором*, якщо кожна його збіжна послідовність має єдину границю.

Теорема 4.2. *Має місце наступний ланцюжок логічних імплікацій:* $T_2 \Rightarrow$*KC*$\Rightarrow$*US*$\Rightarrow T_1$.

Доведення. $T_2 \Rightarrow$**KC**.

Нехай X є T_2-простором. Зафіксуємо множину S, що є компактною. Доведемо, що для всіх $x \notin S$ існує відкрита множина, що не перетинається з S. Розглянемо точку $x \notin S$. Оскільки X є T_2-простором, для кожної точки $y \in S$ існуватиме окіл U_y, що не перетинатиме U_x (один з околів x). Об'єдннння всіх таких околів y буде покриттям S, а з компактності S слідує, що існує скінченне підпокриття, тобто є такий $n \in \mathcal{N}$, що можна виділити такі y_i, що об'єднання підмножини розглянутих раніше околів U_y, а саме $\cup_{1 \leq i \leq n} U_{y_i}$ є скінченним підпокриттям S. Позначимо відповідні диз'юнктивні околи x, як $U_{x,i}$, тоді перетин $\cap_{1 \leq i \leq n} U_{x,i}$ буде відкритою множиною, адже є скінченним перетином відкритих множин і, очевидно, не буде перетинатися з S. З чого слідуватиме, що S буде замкненою множиною, бо її доповнення є відкрита множина.

KC$\Rightarrow$**US**. Нехай існує послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, що збігається до x та y, де $x \neq y$. Викинемо з послідовності всі x_n-ті, що дорівнюють y. Така послідовність досі має збігатися до x та y за означенням границі послідовності. Розглянемо множину A, що є об'єднанням всіх одноточкових множин з нашої нової послідовності. Тоді A буде компактною множиною, бо для довільного відкритого покриття множини існує множина U з цього покриття, яка містить елемент . В силу збіжності $x_n \to x$, існує номер N, починаючи з якого $x_n \in U$. Для кожної точки$x_1, \ldots, x_{N-1}$ зафіксуємо по відкритій множині $U_i, 1 \leq i \leq N-1$ з покриття, яка її містить. Тоді $U, U_1, \ldots, U_{N-1}$ є скінченним відкритим покриттям , що відповідає означенню компактної множини. З мови випливає, що A є замкненою множиною, тож для y існує відкрита множина $X \backslash A$, що не містить точок з розглянутої послідовності, тобто кожна така послідовність матиме єдину границю, що співпадає з означенням US-простору.

US$\Rightarrow T_1$. Розглянемо довільну точку $x \in X$ і послідовність $\{x, x, x..\}$. Оскільки за умовою ми маємо US топологію єдиною границею цієї послідовності буде сам x, тож за означенням границі для любої іншої точки $y \in X$,

$y \neq x$ існує хоч один окіл, що не містить x, що співпадає з означенням T_1 топології. □

Приклад 4.3. Жодна з імлікацій Теореми 4.2 не розвертається. Розглянемо коскінченну топологію на зліченному носії X. Очевидно, що X є (компактним) T_1-простором. Проте, кожна його послідовність, яка складається із попарно різних елементів, збігається до кожної точки простору X. Отже, X не є US-простором.

Приклад US-простору, який не є KC-простором наведено в роботі [7].

Нарешті, розглянемо козлічену топологію на незліченному носії X. Тоді X є KC-простором, але не є T_2-простором, бо всі відкриті множини перетинаються між собою, оскільки кожна з них не включає тільки зліченну кількість точок.

Нехай x точка топологічного простору X. *Локальною базою в точці* x називається сім'я $\mathcal{B}_x$ околів точки x така, що для кожного околу U точки x знайдеться $B \in \mathcal{B}_x$ із $B \subset U$. Кажуть, що топологічний простір задовольняє *першу аксіому зліченності*, якщо кожна його точка має не більш ніж зліченну локальну базу.

Лема 4.4. *Нехай X задовольняє першу аксіому зліченності. Тоді кожна його точка має не більш ніж зліченну локальну базу, яка лінійно впорядкована (за включенням), тобто* $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \geq 1\}$, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$.

Доведення. Зафіксуємо локальну базу в точці x: $B_x = \{B_n : n \geq 1\}$, де $n \in \mathcal{N}$. Для кожного $i \in N$ означимо множину $A_i = B_1 \cap \cdots \cap B_i$. З цього означення випливає, що кожна множина A_i є відкритою, адже є перетином скінченної кількості відкритих множин, і очевидно, що $A_i \supseteq A_{i+1}$, тобто є лінійно впорядкованою за включенням. Оскільки для кожного i A_i є підмножиною B_i справедливим є твердження, що дана сім'я околів є локальною базою. □

Твердження 4.5. *Нехай простір X задовольняє першу аксому зліченності. Тоді властивості для X бути T_2-простором, KC-простором, або US-простором, еквівалентні.*

Доведення. В світлі Теореми 4.2, достатньо довести імплікацію US⇒ T_2. Від супротивного. Припустимо, що X не є T_2-простором. Тоді існує пара різних його точок $x, y \in X$ така, що для кожної пари їхніх околів U_x, U_y маємо $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Оскільки простір X задовольняє першу аксому зліченності, то за Лемою 4.4, існують лінійно впорядковані (вниз за включенням) не більш ніж зліченні локальні бази в точках x та y: $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \geq 1\}$ та $\mathcal{C}_y = \{C_n : n \geq 1\}$. Для кожного $n \geq 1$ зафіксуємо елемент $x_n \in B_n \cap C_n$. Тоді послідовність x_n збігається як до x, так і до y в X. □

5 Аксіоми відокремлюваності T_3 та T_4

Топологічний простір X називається *регулярним*, якщо для кожної точки $x \in X$ та замкненої множини $F \subset X$ із $x \notin F$ існують їх околи, які не перетинаються (тобто, існують відкриті множини $U, V \subset X$ із $x \in U$, $F \subset V$ та $U \cap V = \emptyset$). Кажуть, що простір *задовольняє аксіому відокремлюваності* T_3 (або ж є T_3-*простором*), якщо він є регулярним T_1-простором.

Приклад 5.1. Кожен дискретний простір є T_3-простором. Також, кожен метричний простір X є T_3-простором. Очевидно, що метричний простір є T_1-простором. Далі, нехай $x \in X$ та $F \subset X$ замкнена множина із $x \notin F$. Оскільки $X \backslash F$ відкрита множина, то існує число $r > 0$ таке, що $B(x,r) \subset X \backslash F$ (тут через $B(x,r)$ ми позначаємо відкриту кулю радіуса r з центром в точці x). Поклавши $U = B(x, \frac{r}{2})$ та $V = \cup_{y \in F} B(y, \frac{r}{2})$, отримаємо: U, V відкриті неперетинні околи x та F, відповідно.

Топологічний простір $\mathbb{R}$ із козліченною топологією не є T_3-простором, бо в ньому кожна пара відкритих непорожніх множин перетинається.

Твердження 5.2. *Кожен підпростір регулярного простору теж є регулярним.*

Доведення. Нехай маємо регулярний простір X та його підпростір S. За означенням топологія, що визначена на підпросторі, складається з перетинів S та множин, що належать топології визначеній на X. Тож, якщо для довільної точки $x \in S$ і замкненої множини $C \subset S$ не існуватиме відкритих диз'юнктивних околів їх і не існуватиме для X, що суперечить умові. □

Твердження 5.3. *Топологічний простір X є регулярним тоді й тільки тоді, коли для кожної точки його $x \in X$ та її околу $U_x \subset X$ існує відкрита множина $V \subset X$ така, що $x \in V \subset \operatorname{Cl} V \subset U$.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є регулярним простором. Припустимо, що існує така точка $x \in X$ та її окіл $U_x \subset X$, що для неї не існує відкритої множини $V \subset X$ такої, що $x \in V \subset \operatorname{Cl} V \subset U$. З цього слідує, що для замкненої множини $K = X \backslash U_x$ існуватиме тільки один окіл X, що містить саму точку x і перетинає всі її околи, що суперечить початковому припущенню про регулярність X

Достатність. Нехай для кожної точки $x \in X$ та її околу $U_x \subset X$ існує відкрита множина $V \subset X$ така, що $x \in V \subset \operatorname{Cl} V \subset U_x$. Тоді для кожної замкненої множини, що не перетинає U_x існуватиме окіл $U = X \backslash \operatorname{Cl} V$, що не перетинатиме V, тобто простір буде регулярним. Якщо ж не існуватиме такої U_x що не перетинає якусь замкнену множину G, то $x \in G$. □

Твердження 5.4. *Нехай X регулярний простір. Тоді X є T_3-простором тоді й тільки тоді, коли X є T_0-простором (еквівалентно, $T_{1/2}$-простором або ж T_2-простором).*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є T_3-простором. Тоді за означенням він задовольняє T_1 аксіому відокремлюваності, тож є T_0-простором.

Достатність. Нехай X є T_0-простором. Візьмемо дві точки x, y такі, що $x \neq y$. за означенням T_0-простора хоча б одна з цих точок повинна мати окіл що не містить іншу. Нехай x має окіл $U_x \subset X$, що не містить y. Тоді з регулярності X слідує, що замкнена множина $B = X \backslash U_x$ повинна мати окіл V_B, що не перетинає один з околів x. З цього випливає, що V_B буде околом y, що не міститиме x. Тож X також буде T_1-простором, що відповідає означенню T_3-простора.

□

Наслідок 5.5. *Кожен T_3-простір є T_2-простором.*

Приклад 5.6. Покладемо $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ та розглянемо родину множин $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{(a, b) \backslash K : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Легко бачити, що $\mathcal{B}$ є базою деякої топології на $\mathbb{R}$, яка називається *K-топологією*. Очевидно, що K-топологія сильніша за стандартну евклідову топологію на $\mathbb{R}$. Як наслідок, носій $\mathbb{R}$ із K-топологією є T_2-простором. Проте, цей простір не є регулярним (а отже, і не є T_3-простором). Дійсно, точку 0 та замкнену множину K не можна відокремити околами в K-топології.

Топологічний простір називається *нуль-вимірним* (англ. zero dimensional), якщо він має базу, яка складається із відкрито-замкнених множин. Наприклад, кожен квазі-дискретний простір є нуль-вимірним простором.

Твердження 5.7. *Кожен нуль-вимірний простір є регулярним.*

Доведення. Нехай X є нуль-вимірним простором. Зафіксуємо точку $x \in X$ та замкнену множину $S \subset X$, що $x \notin S$. З означення нуль-вимірного простору випливає, що кожна точка матиме локальну базу, що складається з відкрито-замкнених множин. Розглянемо множину $K = X \setminus S$, яка є відкритою і містить x. З цього випливає, що існує окіл $x \in U_x$, що є відкрито-замкненою множиною і $U_x \subseteq K$. Виходить, що множини U_x та $X \setminus U_x$ будуть неперетинними околами x і S відповідно, що задовольняє регулярність. $\square$

Топологічний простір X називається *нормальним*, якщо для будь-яких двох його замкнених множин $A, B \subset X$ із $A \cap B = \emptyset$ існують їх околи, які не перетинаються (тобто, існують відкриті множини $U, V \subset X$ із $A \subset U$, $B \subset V$ та $U \cap V = \emptyset$). Кажуть, що простір *задовольняє аксіому відокремлюваності* T_4 (або ж є T_4*-простором*), якщо він є нормальним T_1-простором. Із означення прямо слідує, що кожен T_4-простір є T_3-простором.

Приклад 5.8. Кожен дискретний простір є T_4-простором. Аналогічно, кожен метричний простір є T_4-простором (див. доведення регулярності метричного простору з Прикладу 5.1).

Твердження 5.9. *Кожен замкнений підпростір нормального простору теж є нормальним.*

Доведення. Нехай X нормальний простір, а $F \subset X$ його замкнена множина. Зафіксуємо дві неперетинні множини $A, B \subset F$, які є замкненими в топології підпростору F. Тоді існує пара замкнених множин $A', B' \subset X$ із $A' \cap F = A$ та $B' \cap F = B$. Оскільки F замкнена множина, то A, B теж замкнені. Із нормальності X слідує інсування їх неперетинних околів, U_A та U_B, відповідно. Покладемо $V_A = U_A \cap F$ та $V_B = U_B \cap F$. Тоді V_A та V_B є неперетинними околами для A, B в топології підпростору F. Отже, F нормальний простір. $\square$

Твердження 5.10. *Топологічний простір є нормальним тоді й тільки тоді, коли для будь-якої відкритої множини $U \subset X$ та будь-якої замкненої множини $F \subset X$ із $F \subset U$ існує відкрита множина $V \subset X$ із $F \subset V \subset \operatorname{Cl} V \subset U$.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай X є нормальним простором. Зафіксуємо його відкриту множину $U \subset X$ та замкнену множину $F \subset U$. Розглянемо доповнення $G = X \setminus U$. Тоді F, G дві неперетинні замкнені множини. Із нормальності простору X слідує, що існують їх неперетинні околи U_F та

U_G, відповідно. Покладемо $V = U_F$. Очевидно, що $F \subset V \subset \mathrm{Cl}(U_F) \subset X\backslash U_G \subset X\backslash G = U$.

Достатність. Нехай $F, G \subset X$ дві неперетинні замкнені множини. Тоді доповнення $X\backslash G$ є відкритою множиною і $F \subset X\backslash G$. За умовою, існує відкрита множина $V \subset X$ із $F \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset X\backslash G$. Тоді множини V та $X\backslash \mathrm{Cl}(V)$ є неперетинними околами F та G, відповідно. Отже, X нормальний простір. □

Кажуть, що простір *задовольняє другу аксіому зліченності*, якщо він має не більш ніж зліченну базу.

Теорема 5.11. *Кожен регулярний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є нормальним.*

Доведення. Нехай (X, τ) є регулярним простором, що задовольняє другу аксіому зліченності з B, що є зліченною базою на τ, і нехай C і D є неперетинними непустими замкненими підмножинами X. Доведемо, що ці множини мають диз'юнктивні околи.

З означення регулярного простору випливає, що для кожної точки x з C ми можемо знайти її окіл з бази $U_x \in B$, що $\mathrm{Cl}(U_x) \cap D = \varnothing$. Так само для кожної точки $y \in D$ можемо знайти її окіл з бази $V_y \in B$, що $\mathrm{Cl}(V_y) \cap C = \varnothing$. З цього слідує, що $C \subseteq \bigcup_{x\in C} U_x$ та $D \subseteq \bigcup_{y\in D} V_y$.

Оскільки множини U_x та V_y були взяті зі зліченною бази, то можна переіндексувати множини наступним чином:

$$C \subseteq \bigcup_{x\in C} U_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ та } D \subseteq \bigcup_{y\in D} V_y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

Дані множини є відкритими, але можуть перетинатися. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$U_n' = U_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(V_i)) \text{ та } V_n' = V_n \setminus (\bigcup_{i=1^n} \mathrm{Cl}(U_i)).$$

Означені множини є відкритими, бо ми від відкритих множин відняли замкнені.

З такого означення множин випливає, що жодна з $\mathrm{Cl}(V_i')$-тих не перетинає C, а жодна з $\mathrm{Cl}(U_i')$-тих не перетинає D. З цього слідує, що $C \subseteq U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n'$ та $D \subseteq V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n'$.

Покажемо, що множини V та U є неперетинними. Зафіксуємо $x \in U$. Тоді $x \in U_i'$ для $i \in \mathbb{N}$. З визначенн U_n'-тих це значить, що $x \notin V_k'$ для всіх

$k = 1, \ldots, i$. З іншого боку, якщо $k > i$, $V'_k \cap \mathrm{Cl}(U_i) = \varnothing$, тож $x \notin V'_k$. З цього слідує, що $x \notin V$ і $V \cap U = \varnothing$, що завершує наше доведення. $\square$

Наступний результат, відомий як лема Урисона, був доведений в 1925 році.

Теорема 5.12. [6] *Нехай $A, B \subset X$ замкнені множини в нормальному просторі X та $A \cap B = \emptyset$. Тоді існує неперервне відображення $f : X \to [0, 1]$ із $f(A) = \{0\}$ та $f(B) = \{1\}$.*

Лема Урисона може бути використана для доведення наступної теореми про продовження дійсно-значних функцій, яка вперше була доведена Генріхом Тітце для метричних просторів.

Теорема 5.13. (теорема Тітце про продовження) *Кожне неперервне відображення із замкненого підпростору нормального топологічного простору X в $[0, 1]$ можна продовжити до неперервного відображення всього простору X в $[0, 1]$.*

Легко бачити, що з теореми Тітце випливає лема Урисона, оскільки можна означити функцію $f : A \cup B \to R$ таким чином, що при $x \in A$: $f(x) = 0$, а при $x \in B$: $f(x) = 1$, і оскільки f є неперервною функцією, а об'єднання множин A і B є замкненим, то за теоремою Тітце існує її продовження, що є розширенням леми Урисона за означенням. Таким чином, ці два результати еквівалентні.

6 Висновки

В роботі були розглянуті основні аксіоми відокремлюваності в топологічних просторах. Досліджено аксіоми T_0 та T_1, їх властивості та взаємозв'язок між ними. Особливу увагу було приділено просторам, що задовольняють $T_{1/2}$ аксіому відокремлюваності, їх зв'язок з субмаксимальними просторами та просторами з дверима. Також, в контексті цих аксіом відокремлюваності досліджено симетричні та слабко симетричні простори. Були розглянуті простори, що задовольняють аксіоми відокремлюваності між T_1 та T_2, їх зв'язок зі слабшими аксіомами, KC та US просторами. Проаналізовані регулярні та нормальні простори, їх використання у формулюванні більш сильних аксіом відокремлюваності та зв'язок з T_2 аксіомою відокремлюваності. Досліджено аксіоми відокремлюваності T_3 та T_4, їх особливості та використання в загальній топології.

Література

[1] P. Bhat and A.K. Das, Some new higher separation axioms via sets having non-empty interior, *Cogent Math,* **2:1092695** (2015), 9p.

[2] K.K. Dube, A note on R_1-topological spaces, *Period. Math. Hung.* **13(4)** (1982), 267–271.

[3] N. Levine, Strongly connected sets in topology, *Amer. Math. Monthly* **72(10)** (1965), 1098–1101.

[4] N. Levine, Generalized osed sets in topology, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **19(1)** (1970), 89–96.

[5] G.D. Maio, A separation axiom weaker than R_0, *Indian J. Pure Appl. Math.* **16(4)** (1985), 373–375.

[6] P. Urysohn, Uber die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen, *Math. Annalen* **94(1)** (1925), 262–295.

[7] A. Wilansky, Between T_1 and T_2, *Amer. Math. Monthly* **74(3)** (1967), 261–266.