

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь — бакалавр

на тему: **«ЕКСТРЕМАЛЬНА ТЕОРІЯ ГРАФІВ. ТЕОРЕМА ТУРАНА»**

Виконала: студентка 4-го року навчання,
Освітньої програми «Прикладна
математика», 113

Федчук Анастасія Дмитрівна

Керівник: Тимошкевич Л.М.,
ст. викладач, кандидат фіз.-мат. наук

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена з
оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«_____» _____ 2021р.

Київ - 2021

Тема: Екстремальна теорія графів. Теорема Турана

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено “_____” _____ 2021 р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	20.10.2020			
2.	Ознайомлення з темою та літературою.	10.11.2020			
3.	Розробка плану та структури роботи.	12.01.2021			
4.	Робота з науковою літературою.	13.01.2021			
5.	Збір, розв’язок та оформлення задач.	15.03.2021			
6.	Підготовка роботи до передзахисту.	16.04.2020			
7.	Підготовка роботи до захисту.	15.05.2021			

Науковий керівник _____

(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____

(ПІБ)

Зміст

Вступ	4
1 РОЗДІЛ: Екстремальна теорія графів	6
1.1 Основні відомості	6
1.2 Основні поняття з теорії графів	6
1.3 Граф Турана	12
1.3.1 Особливі випадки	13
1.4 Прикладні застосування	15
2 РОЗДІЛ: Теорема Турана	16
2.1 Формулювання та доведення теореми Мантеля для трикутників	16
2.2 Формулювання та доведення теореми для загального випадку . .	19
2.3 Формулювання теореми в термінах числа незалежності	21
3 РОЗДІЛ: Задачі	21
3.1 Розбір розв’язання екстремальних задач	21
3.1.1 Батарейки та ліхтарик	21
3.1.2 Система точок та відрізків на площині	24
3.2 Власні формулювання та розв’язання задач	25
3.2.1 Заборонений шлях	25
3.2.2 Перестановки чисел	26
3.2.3 Хроматичне число	28
3.2.4 Першокурсники	29
Висновки	32
Список літератури	33

Вступ

Екстремальна теорія графів — відносно новий напрям теорії графів, який досліджує клас задач, пов'язаних з оцінкою максимального числа ребер графа, що не містить підграфів певного типу. Цей розділ теорії графів містить чимало прикладних застосувань у різноманітних сферах. Фундаментальною теоремою екстремальної теорії графів вважається теорема Турана (1941), яка базується на узагальненні теореми Мантеля (1907). [1] На базі цієї теореми з'явилося поняття "графи Турана". Навколо цієї тематики проводилося чимало досліджень, наприклад Чао та Новацкі (Chao, Novacky, 1982) [2] показали, що графи Турана хроматично єдині, а досліджуючи геометричні властивості графів, Пор та Вуд (Por, Wood, 2005) [3] дали нижню оцінку будь-якого трьохвимірніого вкладення графа Турана, а Витсенхаузен (Witsenhausen, 1974) [4] виказав гіпотезу, що максимальна сума квадратів відстаней між p точками всередині кулі в R^d одиничного діаметру досягається на конфігурації, утвореній вкладенням графа Турана у вершини правильного симплекса. Також науковці знайшли способи прикладного використання графів Турана: Нікіфоров (Nikiforov, 2005) [5] використовував графи Турана для знаходження нижньої границі суми k власних значень графа та його доповнення, а Фолс, Повел та Снойінк (Falls, Powell, Snoeyink, 2008) [6] розробили ефективний алгоритм для пошуку кластерів ортологічних груп генів в геномі шляхом представлення даних як графа та пошуку великих підграфів Турана. [7]

Існує багато різних формулювань теореми: частковий випадок — теорема Мантеля, в термінах заборонених підграфів, в термінах чисел незалежності. Однак ця інформація не систематизована, тому мета цієї роботи зібрати та систематизувати вітчизняний та зарубіжний досвід, детально описати зібрану інформацію та експериментально продемонструвати застосування цих теорем в прикладних задачах.

Мета роботи зумовила наукове завдання, яке полягало в:

1. Систематизувати основи екстремальної теорії графів та характеристики графів Турана.
2. Зробити огляд відомих формулювань теореми Турана та їх доведення.
3. Продемонструвати прикладне використання в задачах.

Робота складається з трьох розділів.

Перший розділ присвячений основній інформації про екстремальну теорію графів, про дослідження в цьому розділі теорії графів. Також в другому підрозділі цього розділу освітлені основні означення з теорії графів, які використовуються та згадуються у роботі. Наступний підрозділ містить інформацію про характеристики, властивості та дослідження графів Турана, а заключна частина цього розділу про прикладне застосування екстремальної теорії графів, зокрема проблеми кліки, у біоінформатиці, хімії, для визначення підродинних структур білків, для вирішення задач автоматизації проектування радіоелектронної апаратури.

Другий розділ складається з формулювання та доведення теореми Турана в різних термінах теорії графів, а також теореми Мантеля.

Третій розділ присвячений саме розв'язку задач. Цей розділ поділяється на дві частини: дослідження розв'язку задач екстремальної теорії графів та власно-сформульованих задач та їх детального розв'язку за допомогою висвітлених теорем та тверджень з теорії графів.

1 РОЗДІЛ: Екстремальна теорія графів

1.1 Основні відомості

Один з напрямів теорії графів складає клас задач, пов'язаних з оцінкою максимального числа ребер графа, що не містить підграфів визначеного виду. Цей напрям отримав назву "екстремальна теорія графів". Це відносно новий напрям теорії графів, який виник на початку двадцятого століття після доведення теореми Мантеля тисяча дев'ятого року. [1] Мантель вирахував мінімально можливу кількість ребер в графі G з даною кількістю вершин з властивістю, що ніякі три вершини не містять хоча б одне, з'єднуюче їх, ребро. Туран узагальнив результат Мантеля для випадку будь-якої кількості незалежних вершин тисяча дев'ятого сорок першого року. [8]

Автор теореми Турана — Пол Туран: математик, професор університету, член Угорської академії наук, лауреат премії Кошута. [9] Тисяча дев'ятого сорок першого року Туран довів свою теорему, що визначає графі порядку n , які не містять повного підграфа K_n порядку n та екстремальні відносно розміру, тобто з якомога меншою кількістю ребер. Ці графі отримали назву — графі Турана. [10] По принципу Діріхле, будь-як підмножина з $n + 1$ вершин в графі Турана не містить кліку $n + 1$. Згідно з теоремою Турана, граф Турана має максимально можливе число ребер серед всіх графів без клік розміру $n + 1$ для p вершин.

Теорема Ердеша-Стоуна розширяє теорему Турана, обмежуючи число ребер в графі, який має фіксований граф Турана в якості підграфа. Внаслідок цієї теореми в теорії екстремальних графів для будь-якого забороненого підграфа можна довести схожі межі, що залежать від хроматичного числа підграфа. [7]

1.2 Основні поняття з теорії графів

Означення 1.2.1. Загальний неорієнтований граф — це сукупність $G = (V, E, L)$, яка складається з трьох множин: V, E, L .

- V — множина вершин;
- E — множина ребер;
- L — множина петель.

Якщо існують пари вершин v_1, v_2 для яких існують m ($m > 1$) ребер e , що з'єднують вершини v_1, v_2 , то ці вершини мають спільне ребро кратності m .

Означення 1.2.2. Граф без кратних ребер та петель називається **простим** і визначається трійкою $G = (V, E)$.

Означення 1.2.3. Вершини v_1, v_2 в неорієнтованому графі називаються **суміжними**, якщо існує ребро $e \in E$, що з'єднує ці вершини, до того ж ребро e називається **інцидентним** вершині v_1 та вершині v_2 .

Означення 1.2.4. Ребра e_1, e_2 в неорієнтованому графі називаються **суміжними**, якщо ці ребра мають спільні вершини.

Означення 1.2.5. Сума кількості ребер інцидентних даній вершині v та подвоєної кількості інцидентних їй петель називається **степенем** або **валентністю** вершини та позначається $\deg(v)$. [11]

Твердження 1.2.1. У будь-якому графі $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Це твердження випливає з того, що кожне ребро графа інцидентне двом вершинам, тому воно вносить у суму степенів усіх вершин рівно дві одиниці. [12]

Означення 1.2.6. Простий граф називається **регулярним**, якщо всі його вершини мають однаковий степінь. [11] **Сильно регулярний** — граф, у якого кожна пара суміжних вершин має однаковий степінь та кожна пара несуміжних вершин має однаковий степінь. [13]

Означення 1.2.7. Граф називається **k -дольним** ($k \geq 2$) якщо всі його вершини можна розбити на k частин (долей), що не перетинаються, так, що суміжні лише вершини з різних долей. [14]

Означення 1.2.8. Доповненням простого графа $G = (V, E)$ називається граф $\overline{G} = (V, \tilde{E})$, такий, що дві довільні вершини суміжні в графі $\overline{G}$ тоді і тільки тоді, коли вони не є суміжними в графі G . [11]

Означення 1.2.9. Об'єднанням графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ($G = G_1 \cup G_2$). Якщо $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, то об'єднання називають **прямою сумою**. [12]

Означення 1.2.10. Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ називається **підграфом** графа $G = (V, E)$, якщо $V_1 \subseteq V$ та $E_1 \subseteq E$.

Важливі класи становлять підграфи, які можна отримати в результаті застосування до заданого графа операцій вилучення вершини або ребра.

Означення 1.2.11. Операція вилучення вершини v з графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v , а з множини E — усіх ребер інцидентних v .

Означення 1.2.12. Операція вилучення ребра e з графа $G = (V, E)$ це вилучення елемента e з множини E , в множині вершин змін немає.

Означення 1.2.13. Граф $G = (V, E)$ називається **повним**, якщо будь-які дві його вершини суміжні. Повний граф з n вершинами позначається K_n . [12]

Означення 1.2.14. Маршрутом (шляхом) у графі $G = (V, E)$ називається послідовність

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}$$

вершин v_i і ребер e_i таку, що кожен два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, отже $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Вершина v_i називається **початком**, а вершина v_{k+1} — **кінцем шляху**. Усі інші вершини шляху називаються **проміжними** або **внутрішніми**.

Кількість ребер у маршруті — його довжина.

Означення 1.2.15. Маршрут, у якому всі ребра попарно різні називається **ланцюгом**, а той, у якому всі вершини попарно різні — **простим ланцюгом**.

Означення 1.2.16. Маршрут називається **замкненим (циклічним)**, якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називається **циклом**, а замкнений простий ланцюг — **простим циклом**.

Означення 1.2.17. Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжиною n позначається C_n . [12]

Означення 1.2.18. Граф, утворений одним простим циклом з трьох вершин називається **трикутником** або **триангуляцією**. [15]

Означення 1.2.19. Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яку його пару вершин можна з'єднати деяким маршрутом. [12]

Означення 1.2.20. Властивість графа P називається **спадковою**, якщо з її виконання для графа G випливає виконання й для будь-якого підграфа графа G .

Означення 1.2.21. Нехай $P(n)$ позначає найбільшу кількість ребер в графах зі спадковою властивістю P та n вершин. Графи $G = (V, E)$ з спадковою властивістю P , для яких виконується $|E| = P(|V|)$ називаються **екстремальними** для цієї спадкової властивості. [14]

Означення 1.2.22. Граф без циклів називається **ациклічним**, а ациклічний зв'язний граф називається **деревом**. [12]

Означення 1.2.23. Графи $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ називаються **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення ϕ множини вершин V_1 на множину вершин V_2 , що ребро $(v, w) \in E_1$ тоді і тільки тоді, коли ребро $(\phi(v), \phi(w)) \in E_2$.

Означення 1.2.24. Граф називається **плоским**, якщо його діаграму можна зобразити на площині таким чином, щоб лінії, що відповідають ребрам графа не перетиналися в точках, що не відповідають його вершинам.

Означення 1.2.25. Граф $G = (V, E)$ називається **планарним**, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу. Про планарні графи кажуть, що вони укладаються на площині (мають плоске укладання). [12]

Означення 1.2.26. Зв'язні області площини, обмежені ребрами планарного графа при його укладці на площину, називаються **гранями**, необмежена область — **зовнішньою гранню**. [14] Межею грані вважають замкнений маршрут, що обмежує цю грань. [12]

Означення 1.2.27. Граф називається **скінченним**, якщо число його ребер скінчене. [16]

Означення 1.2.28. Інтервальний граф це граф, у якого вершини можуть бути пов'язані з інтервалом на дійсній прямій таким чином, що дві вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм інтервали мають непустий перетин. [17]

Означення 1.2.29. Інтервальна розмірність графа $G = (V, E)$ це таке найменше k , для якого існує k інтервальних графів $G_i = (V, E_i)$, $1 \leq i \leq k$, таких що $E = E_1 \cap \dots \cap E_k$. [18]

Означення 1.2.30. Кограф (додатково звідний граф) — це граф, який можна отримати з графа з єдиною вершиною операціями доповнення та об'єднання графів. [19]

Означення 1.2.31. Множина ребер $M \subset E$ називається **паруванням графа**, якщо ніякі два його ребра не мають спільної вершини.

Означення 1.2.32. Парування називається **досконалим**, якщо воно покриває всі вершини графа. [20]

Означення 1.2.33. Нехай $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Будь-яку відображення $f : V \rightarrow N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$ — це **розфарбування графа** G . Число $f(v)$ — **колір** (номер фарби) вершини v .

Означення 1.2.34. Розфарбування f графа G — **правильне**, якщо для будь-яких його суміжних вершин v і w виконується $f(v) \neq f(w)$.

В розділі екстремальної теорії графів є таке поняття як "екстремальні характеристики графів". Екстремальні характеристики це розміри найбільших або найменших множин вершин графу або його ребер. Далі наведені визначення основних екстремальних характеристик графа.

Означення 1.2.35. Мінімальне число k , для якого існує правильне розфарбування графа G називається **хроматичним числом** цього графа і позначається $\chi(G)$.

Означення 1.2.36. Мінімальним правильним розфарбуванням графа G називається правильне розфарбування для $k = \chi(G)$. [12]

Означення 1.2.37. Клікою в неорієнтованому графі називається підмножина вершин, кожні дві з яких з'єднані ребром графа. Розмір кліки визначається числом вершин в ній. [21]

Означення 1.2.38. Максимальна по розміру кліка — кліка найбільшої потужності. Всі максимальні по розміру кліки мають однакову потужність, яка позначається $\omega(G)$ та називається **кліковим числом графа G** .

Означення 1.2.39. Множина l вершин називається **незалежною**, якщо між будь-якими двома її вершинами немає ребра.

Протилежна незалежній множині множина — кліка (1.2.29).

Означення 1.2.40. Максимальна незалежна множина l_0 — незалежна множина, яка стає залежною при додаванні будь-якої вершини.

Означення 1.2.41. Максимальне число $\beta_v(G)$ вершин, які складають незалежну множину — **число незалежності графа**. [16]

1.3 Граф Турана

Означення 1.3.1. Граф (1.2.1) Турана $T(p, n)$ — це граф утворений розкладом p вершин на n приблизно однакових за розміром підмножин, вершини цього графа з'єднані ребром, якщо вони належать різним підмножинам вершин.

Такий граф матиме $r = (p \bmod n)$ підмножин розміром $\lfloor \frac{p}{n} \rfloor$ та $n - r$ підмножин розміру $\lceil \frac{p}{n} \rceil$. Таким чином граф Турана — це повний (1.2.13) n -дольний граф (1.2.7) $K_{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor, \lfloor \frac{p}{n} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{p}{n} \rfloor, \lceil \frac{p}{n} \rceil, \lceil \frac{p}{n} \rceil}$.

Будь-який граф Турана є кографом (1.2.30). Таким чином, його можна утворити з окремих вершин послідовністю операцій диз'юнктивного об'єднання (1.2.9) та доповнення (1.2.8). Зокрема, таку послідовність можна почати утворенням всіх незалежних множин (1.2.39) графа Турана як диз'юнктивного об'єднання ізольованих вершин. Тоді весь граф є доповненням диз'юнктивного об'єднання доповнень цих незалежних множин. Чао та Новацкі (Chao, Novacky, 1982) [2] показали, що графи Турана хроматично єдині. Нікіфоров (Nikiforov, 2005) [5] використовував графи Турана для знаходження нижньої границі суми k власних значень графа та його доповнення. Фолс, Повел та Снойінк (Falls, Powell, Snoeyink, 2008) [6] розробили ефективний алгоритм для пошуку кластерів ортологічних груп генів в геномі шляхом представлення даних як графа та пошуку великих підграфів (1.2.10) Турана.

Графи Турана мають деякі геометричні властивості. Пор та Вуд (Por, Wood, 2005) [3] дві тисячі п'ятого року дали нижню оцінку будь-якого трьохвимірного вкладення графа Турана. Вітсенхаузен (Witsenhausen, 1974) [4] виказав гіпотезу, що максимальна сума квадратів відстаней між p точками всередині кулі в R^d одиничного діаметру досягається на конфігурації, утвореній вкладенням графа Турана у вершини правильного симплекса. Граф G з p є підграфом графа Турана $T(p, n)$ тоді та тільки тоді, коли G допускає справедливе розфарбування (1.2.33) в n кольорів. Розклад графа Турана на незалежні множини відповідає розкладу G на класи кольорів. Зокрема, граф Турана є єдиним максимальним графом з p вершинами зі справедливим розфарбуванням в n кольорів. [7]

1.3.1 Особливі випадки

Деякі величини параметру n графів Турана приводять до графів, які вивчаються окремо. Граф Турана $T(2p, p)$ можна отримати шляхом видалення досконалого паруння (1.2.32) з повного графа K_{2p} . Як показав Робертс (Roberts, 1969) [22] інтервальна розмірність (1.2.29) цього графа дорівнює p . Цей граф інколи називають графом Робертса, наприклад, граф $T(6, 3) = K_{2,2,2}$ — це граф правильного октаедра.

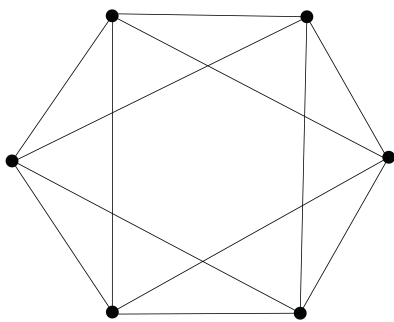


Рис. 1: Граф Робертса

Якщо p пар приходять на вечірку та кожна особа тисне руку всім крім свого партнера, то даний граф описує множину рукостискань та його називають графом коктейль-вечірки.

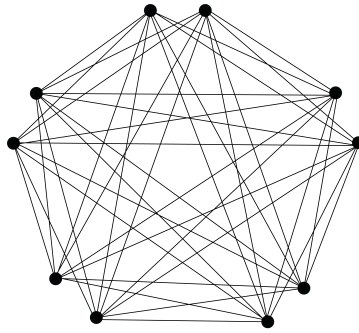


Рис. 2: Граф коктейль-вечірки

Граф Турана $T(p, 2)$ з парним p — граф Мура.

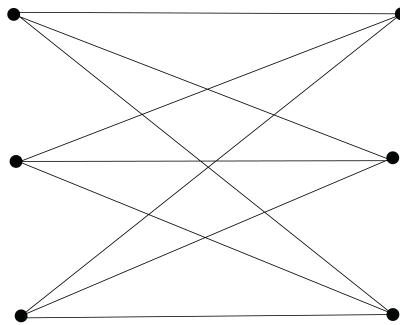


Рис. 3: Граф Мура

Якщо n — це дільник p , то граф Турана вважається симетричним та сильно регулярним. Граф Турана $T(p, [\frac{p}{3}])$ має $3^a 2^b$ найбільших клік (1.2.37), де $3a + 2b = p$, $a, b \leq 2$. Кожна найбільша кліка (1.2.38) утворюється вибором однієї вершини з кожної долі. Це число найбільших клік є найбільшим з можливих серед всіх графів з p вершинами, незалежно від числа ребер в графі. Ці графи інколи називають графами Муна-Мозера. [7]

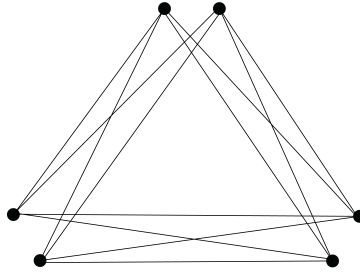


Рис. 4: Граф Муна-Мозера

1.4 Прикладні застосування

Екстремальна теорія графів — розділ теорії графів, який має великий спектр прикладних застосувань. Зокрема "проблема кліки тобто задача пошуку максимального повного підграфу (кліки) в графі. Ця проблема часто зустрічається в прикладних задачах. Наприклад, пошук так званих "кілець посилок" — орієнтованих графів, вершинами якого служать сайти, а ребрами — посилення. Такі кільця утворюються шляхом утворення групи сайтів, власники яких, попарно цитують сайти один одного, щоб підвищити індекс цитування. Якщо представляти інтернет як орієнтований граф вершинами якого є сайти та кожне посилення позначатиметься ребром, яке виходить з даної вершини у вершину, яка позначає сайт на який даний сайт посилається. Для перевірки певного набору сайтів на приналежність до кільця сайти та посилення зображаються як вершини графа та його ребра відповідно. Досліджується число $M = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l f(a_i, b_j)$ де k, l — кількість вершин досліджуваного дводольного графа в кожній долі відповідно, $f(a_i, b_j)$ — ймовірність існування ребра з вершини a у вершину b , а M — очікувана кількість ребер, які в інтернеті без кілець виходять з однієї долі графа в іншу. Припускається, що реальна кількість таких ребер μ та це значення порівнюється з M . [23]

Також в рамках системи Life Core [24]. В даній системі представляється метод оцінки схожості родинних трьохвимірних структур білків чи ДНК-білкових комплексів та їх розбиття на підродини. Даний метод базується на евристичному алгоритмі знаходження геометричного ядра родини структур, яке представляється клікою. Геометричним ядром називають підмножину атомів для кожної структури таку, що атоми цих підмножин знаходяться у взаємно-однозначній відповідності та всі відстані між ними приблизно рівні для різних структур. [25] До того ж пошук максимальної кліки часто застосовується в біоінформатиці при комп'ютерному аналізі геномних баз даних. Наприклад, для пошуку потенціальних регуляторних структур рибонуклеїнових кислот. В хімії дана задача лежить в основі пошуку "максимальної спільної підструктури" в графі, що описує структуру хімічного з'єднання. Крім того, задача пошуку максимальної кліки є математичною моделлю задач, що виникають при автоматизації проектування радіоелектронної апаратури.

Існує чимало різноманітних алгоритмів пошуку максимальної кліки і вони ділять на точні та наближені. Серед найвідоміших розрізняють алгоритм Брона-Кербоша та алгоритм Уїлфа. [26]

2 РОЗДІЛ: Теорема Турана

2.1 Формулювання та доведення теореми Мантеля для трикутників

Теорема 2.1.1. *Найбільша кількість ребер в графах з p вершинами, які не містять підграф K_3 дорівнює $\left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$. Тобто $ex(p, K_3) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$.*

Доведення. Доведення верхньої оцінки — індукція по числу вершин p .

1. Припустимо, що p — парне число.

База індукції:

$p = 2$. Враховуючи, що для утворення трикутника (1.2.18) нам потрібно мінімум три вершини, то утворений граф з двох вершин трикутників у собі містити

не буде. За формулою $ex(2, K_3) = \left\lfloor \frac{2^2}{4} \right\rfloor = 1$, а отже припущення індукції справджується так як в графі з двома вершинами ми можемо провести всього одне ребро.

Індукційний перехід:

Нехай припущення індукції справджується для $p = 2s$. Розглядається граф $G = (V, E)$ з $(p + 2)$ вершинами. Нехай розглядається також граф $G' = (V', E')$ такий, що $G' = G - w_1, w_2$, де w_1, w_2 — суміжні вершини та $w_1, w_2 \in V$.

Для графа $G' = (V', E')$ справедливе твердження, що він не містить трикутників, за припущенням індукції справджується для $p = 2s$, а даний граф містить якраз таку кількість вершин.

Отже $ex(p, K_3) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2s)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4s^2}{4} \right\rfloor = s^2$, тобто $|E'| \leq s^2$.

Отже

$$|E| \leq s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1$$

де $d_G(w_1)$ — ребра, що виходять з вершини w_1 , а $d_G(w_2)$ — ребра, що виходять з вершини w_2 та 1 — це ребро між цими вершинами.

Граф G не містить трикутники, тому вершини w_1, w_2 не можуть бути одночасно суміжні з якоюсь вершиною $u \in V'$, а отже $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \leq p$

Отже в нерівності

$$|E| \leq s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1$$

суму $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1)$ можна замінити на p тобто — $2s$:

$$|E| \leq s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2 = \left\lfloor \frac{(4s^2 + 8s + 4)}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(s + 2)^2}{4} \right\rfloor$$

[14].

1. Припустимо, що p — непарне число.

База індукції:

$p = 1$. За формулою $ex(1, K_3) = \left\lfloor \frac{1^2}{4} \right\rfloor = 0$, а отже припущення індукції справджується, адже ми не можемо провести жодного ребра.

Індукційний перехід:

Нехай припущення індукції справджується для $p = (n - 1)s + r$ вершин. Розглядається граф $G = (V, E)$ з $p + (n - 1) = (n - 1)(s + 1) + r$ вершинами, який не містить підграфів K_n та міститься найбільша кількість ребер. В графі G обов'язково знайдеться повний підграф з $(n - 1)$ вершинами.

Припустимо супротивне, нехай для будь-яких $(n - 1)$ вершин графа G хоча б одне ребро з кінцями в цих вершинах в ньому не міститься. Тоді оберемо $(n - 1)$ вершину $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ в графі G та якщо $e = (v_i, v_j) \notin E$

Отже $ex(p, K_3) = \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2s+1)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4s^2+4s+1}{4} \right\rfloor = s^2 + s$, тобто $|E'| \leq s^2 + s$.

Отже

$$|E| \leq s^2 + s + 1 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1)$$

де $d_G(w_1)$ — ребра, що виходять з вершини w_1 , а $d_G(w_2)$ — ребра, що виходять з вершини w_2 та 1 — це ребро між цими вершинами.

Граф G не містить трикутники, тому вершини w_1, w_2 не можуть бути одночасно суміжні з якоюсь вершиною $u \in V'$, а отже $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \leq p$

Отже в нерівності

$$|E| \leq s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1$$

суму $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1)$ можна замінити на p тобто — $2s + 1$:

$$|E| \leq s^2 + s + 1 + 2s + 1 = s^2 + 3s + 2 = \left\lfloor \frac{(4s^2 + 12s + 9)}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(s + 3)^2}{4} \right\rfloor$$

Доведення нижньої оцінки.

Повні дводольні граfi $K_{s,s}$ (у випадку парного p) та $K_{s,s+1}$ (у випадку непарного p) показують досяжність верхньої оцінки.

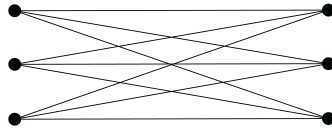


Рис. 5: Дводольний граф

□

2.2 Формулювання та доведення теореми для загального випадку

Теорема 2.2.1. При $p \geq 1, n \geq 3$ справджується рівність

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

де r — остача при діленні p на $(n-1)$.

Доведення. Нехай $p = (n-1) \cdot s + r$ де $0 \leq r \leq n-2$.

Доведення верхньої оцінки — індукція по s при заданому r .

База індукції:

$s = 0$. Маємо $ex(r, K_n) = \frac{r(r-1)}{2}$, адже найбільшу кількість ребер містить повний граф K_r .

Індукційний перехід:

Нехай припущення індукції справджується для $p = (n-1)s + r$. Розглядається граф $G = (V, E)$ з $p + (n-1) = (n-1)(s+1) + r$ вершинами, який не містить підграфів K_n , але має найбільшу кількість ребер. В графі G обов'язково знайдеться повний підграф з $(n-1)$ вершиною.

Припускається супротивне — нехай для будь-яких $(n-1)$ вершин графа G хоча

б одне ребро з кінцями в цих вершинах не міститься у ньому.

Тоді обирається $(n-1)$ вершина $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ в графі G та якщо $e = (v_i, v_j) \notin E$, то додається ребро e до графа G . В результаті отримано граф $G_0 = G + e$.

В графі G_0 відсутні повні підграфи K_n , але ребер більше ніж в графі G , а це протиріччя бо такого не може бути.

Отже в графі G знайдеться такий підграф $H = K_{n-1}$ та нехай $w_1, \dots, w_{n-1} \in V$ — його вершини.

Розглядається граф $G' = G - w_1, \dots, w_{n-1}$. Граф $G' = (V', E')$ не містить підграфів K_n та для нього справедливе твердження індукції:

$$|E'| \leq \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

Отже

$$|E| \leq \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2))$$

де число $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ — всі ребра підграфа $H = K_{n-1}$.

Граф G не містить підграфів K_n , тому вершини $w_1, \dots, w_{n-1}$ не можуть бути одночасно суміжними з якоюсь вершиною $u \in V'$, звідки

$$\sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2)) \leq p(n-2)$$

$$\text{А отже } |E| \leq \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(n-2) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2) + (n-1)^2(n-2) + 2p(n-1)(n-2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(n-2)((p+(n-1))^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

Доведення нижньої оцінки.

Повні k -дольні графи $K_{p_1, \dots, p_{n-1}}$ при $p = (n-1)s + r$, де $0 \leq r \leq n-2$, $p_1 = \dots = p_r = (s+1)$, $p_{r+1} = \dots = p_{n-1} = s$ показують досяжність верхньої оцінки [14].

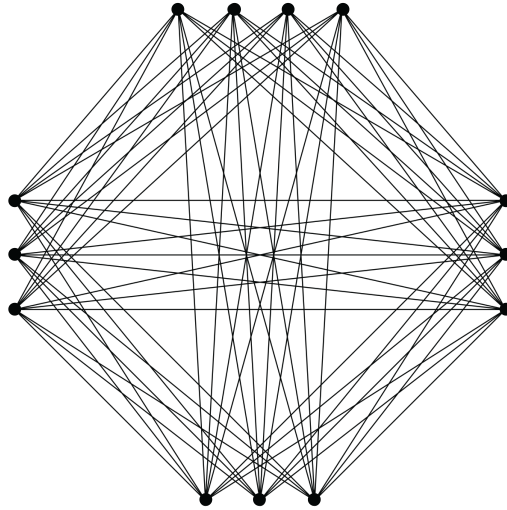


Рис. 6: Чотиридольний граф

□

2.3 Формулювання теореми в термінах числа незалежності

Теорема 2.3.1. *Яким би не був граф на p вершинах з числом незалежності α (1.2.41), для кількості його ребер справедлива така нерівність:*

$$|E| \geq \frac{(p-r)(p+r-\alpha)}{2\alpha}$$

де r — остача при діленні p на α ($p = q\alpha + r, 0 \leq r \leq \alpha - 1$).

Граф Турана для такого формулювання складається з $\alpha - r$ компонент K_q та r компонент K_{q+1} . [27]

3 РОЗДІЛ: Задачі

3.1 Розбір розв’язання екстремальних задач

3.1.1 Батарейки та ліхтарик

а) $\in 2n + 1$ батарейка ($n > 2$). Відомо, що серед них хороших на одну більше, ніж поганих, але які саме батарейки хороші, а які погані невідомо. У

ліхтарик вставляються дві батарейки, при цьому він світить лише якщо обидві хороші. За яку найменшу кількість таких спроб можна гарантовано досягти того, щоб ліхтарик світився?

b) Та ж задача, але батарейок $2n$ ($n > 2$), до того ж хороших та поганих порівну. [27]

Розв'язок

Для розв'язання цієї задачі використовуватиметься формулювання теореми (2.1.1). Нехай батарейки — вершини графа, ребро позначатиме спробу підстановки двох батарейок у ліхтарик.

a) За умовою задачі, хороших батарейок $n + 1$, а поганих n . Всі батарейки розбиваються на n класів, в $n - 1$ класах по дві батарейки та три в ще одній та в кожному з класів всі батарейки попарно підставляються в ліхтарик. Таким чином, хоча б в одному з класів знайдеться пара хороших батарейок. Отриманий граф — граф Турана з числом незалежності n , за означенням (1.2.39). Використовуємо формулу з теореми

$$\frac{(p - r)(p + r - \alpha)}{2\alpha}$$

Так як $p = 2n + 1$, $\alpha = n$, $r = \frac{2n+1}{n} = 1$, то маємо

$$\frac{(2n + 1 - 1)(2n + 1 + 1 - n)}{2n} = \frac{(2n)(n + 2)}{2n} = n + 2$$

Отже найменша кількість спроб, за яких можна гарантовано змусити ліхтарик світитися буде $n + 2$.

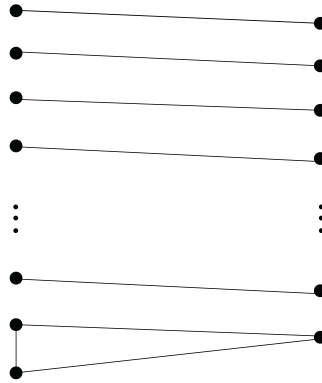


Рис. 7: Граф розбиття батарейок на класи

- b) Тепер, коли батарейок парна кількість, хороших батарейок буде n та поганих буде n . Розбивши всі батарейки на класи по дві батарейки кожна, можливий варіант, коли в кожній парі буде по одній хорошій та одній поганий батарейках. Тому потрібно утворити два класи по три батарейки, таким чином навіть якщо одна трійка містить лише погані батарейки, то в інших класах точно знайдеться пара хороших.

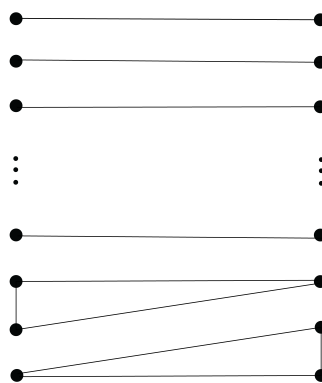


Рис. 8: Граф розбиття батарейок на класи

Таким чином отримується граф з числом незалежності $n - 1$. У цього графа

$p = 2n$, $\alpha = n - 1$, $r = \frac{2n}{n-1} = 2$, отже

$$\frac{(2n-2)(2n+2-n+1)}{2n-2} = \frac{(2n-2)(n+3)}{2n-2} = n+3$$

Отже найменша кількість спроб, за яких можна гарантовано змусити ліхтарик світитися із заданими умовами буде $n + 3$.

3.1.2 Система точок та відрізків на площині

На площині відмітили $4n$ точок, після чого з'єднали відрізками всі пари точок, відстань між якими дорівнює рівно одному сантиметру. Виявилось, що серед будь-яких $n + 1$ точок обов'язково є дві, з'єднані відрізком. Довести, що всього проведено не менше $7n$ відрізків. [27]

Розв'язок

Враховуючи, що серед будь-яких $n + 1$ точок знайдеться не менше двох з'єднаних відрізком, то число незалежності цього графа G дорівнює n . Нехай береться довільна множина вершин Q_1 максимальна незалежна (1.2.38) серед підмножин V . В зв'язку з тим, що число незалежності дорівнює n , то $|Q_1| = n$. Згідно з максимальністю множини Q_1 , множина V/Q_1 міститиме вершини, кожна з якої суміжна хоча б з однією вершиною з Q_1 . Нехай множина V/Q_1 розділена на дві підмножини W_1, W_2 . W_1 — множина вершин, які суміжні з однією вершиною з Q_1 , а W_2 — множина вершини якої суміжні з двома або більше вершинами з Q_1 . Припускається, що $|W_1| \leq 2n$.

Доведення. Доведення спирається на доведення від супротивного. Нехай $|W_1| \geq 2n$. Тоді в множині Q_1 знайдеться така вершина v , що суміжна вершинам $v_1, v_2, v_3 \in W_1$. Якщо між якимись з цих трьох вершин не проведене ребро, то в зв'язку з максимальністю обраної множини Q_1 замість вершини v можна було б додати ці несуміжні вершини та збільшити її потужність, проте Q_1 вже максимальної потужності, отже вершини v, v_1, v_2, v_3 попарно з'єднані ребрами. Але за умовою задачі, граф плоский (1.2.25), а на площині не можливо зобразити повний граф з чотирма вершинами та ребрами довжиною 1 сантиметр. Отже отримуємо суперечність. □

Таким чином отримується, що $|W_1| \leq 2n$, а отже між вершинами даних множин проведено $2n$ ребер. Так як вершини множини W_2 мають принаймні дві суміжні вершини в Q_1 , а всього в множині Q_1 n вершин, то між цими вершинами проведено ще принаймні $2n$ ребер. В сумі до вершин з множини Q_1 проведено $4n$ ребер.

Надалі розглядається підграф графа G утворений вершинами з множини V/Q_1 ($|V/Q_1| = 4n - n = 3n$). За умовою в цьому графі серед будь-яких $n + 1$ точок знайдеться не менше двох з'єднаних відрізком, отже число незалежності залишається таким ж, тобто дорівнює n . Для обчислення кількості ребер в цьому підграфі можна скористатися формулою з теореми (2.3.1)

$$|E| \geq \frac{(p-r)(p+r-\alpha)}{2\alpha}$$

Де $r = \frac{3n}{n} = 0$, отже

$$|E| \geq \frac{(3n-0)(3n+0-n)}{2n} = \frac{3n \cdot 2n}{2n} = 3n$$

Так як ребра в заданому підграфі та ребра знайдені при розгляді множини Q_1 — різні, то для множини ребер графа G справедлива рівність

$$|E| \geq 3n + 4n = 7n$$

3.2 Власні формулювання та розв'язання задач

3.2.1 Заборонений шлях

Знайти числове значення максимальної кількості ребер в графах:

a) $ex(12, P_3)$

b) $ex(p, P_3)?$

Розв'язок

a) Потрібно знайти максимальну кількість ребер в графі без шляху (1.2.15) довжиною два. В такому випадку степінь (1.2.5) кожної вершини має бути не

більше двох. Для розв'язку данної задачі можна скористатися твердженням (1.2.1). Оскільки степінь кожної вершини ≤ 1 , отже

$$\frac{\sum_{v=1}^{12} \deg(v)}{2} = |E| \leq \frac{\sum_{v=1}^{12} 1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

b) Для загального випадку $ex(p, P_3)$ потрібно розглянути два варіанти: $p = 2k$, тобто парне та $p = 2k + 1$, тобто непарне.

Нехай $p = 2k$. З умови задачі, граф не повинен містити шляхи довжиною два, отже степінь кожної вершини ≤ 1 . Тоді за твердженням (1.2.1)

$$\frac{\sum_{v=1}^p \deg(v)}{2} = |E| \leq \frac{\sum_{v=1}^{2k} 1}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

Тепер нехай $p = 2k + 1$. Аналогічно за твердженням (2.1.1)

$$\frac{\sum_{v=1}^p \deg(v)}{2} = |E| \leq \frac{\sum_{v=1}^{2k+1} 1}{2} = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$$

Зрозуміло, що половини ребра не може бути в графі, тому береться лише ціла частина k . Тобто при максимальній кількості ребер при непарній кількості вершин одна вершина матиме степінь нуль, а всі інші — одиницю.

Таким чином незалежно від того парна кількість вершин у графа чи ні, максимальна кількість ребер без P_3 дорівнюватиме $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

3.2.2 Перестановки чисел

По колу проти годинникової стрілки в порядку зростання розташовані числа від 1 до n . Дозволяється будь-які два числа, що розташовані поряд, поміняти місцями. Яку найменшу кількість таких перестановок необхідно зробити, щоб в результаті кожні два сусідні числа залишилися сусідніми, але були розташовані за годинниковою стрілкою?

Розв'язок

Нехай числа розташовані на вершинах правильного n -кутника, які відповідають вершинам шуканого графа. Між вершинами проводиться ребро, якщо вони не взаємодіють при перестановці. Легко помітити, що серед будь-яких трьох

вершин, щоб їхній порядок змінився обов'язково хоча б дві вершини повинні помінятися місцями. Тобто в будь-якій трійці вершин дві не будуть з'єднані ребром, а отже в цьому графі не буде трикутників. За теоремою (2.1.1) в цьому графі проведено ребер не більше $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, а отже не проведено не менше $\frac{n(n-1)}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ребер. Тобто кількість перестановок не менше $\frac{n(n-1)}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Приклад

Для того, щоб показати точність даної оцінки розглядається приклад. Множина вершин ділиться на дві підмножини відносно уявної осі, яка проведена таким чином, що розділяє вершини на дві з потужностями $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$ та $|V| - \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$ відповідно. Вершини по одну сторону осі належать одній підмножині. Це графічно зображено на рисунку 9.

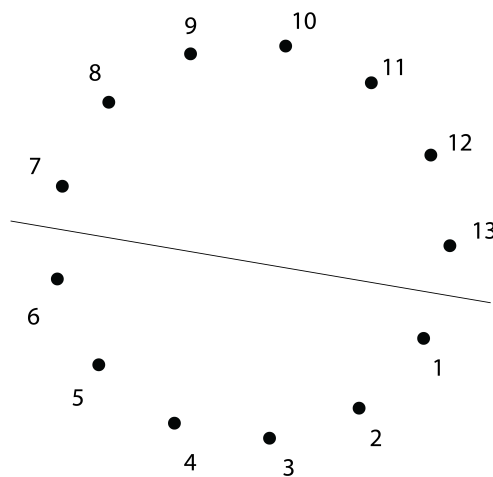


Рис. 9: Множина вершин

Для того, щоб порядок розташування чисел змінився, в кожній підмножині потрібно поставити вершини в зворотньому порядку. За умовами задачі, переставляти можна лише числа, що стоять поруч, тому в кожній підмножині кожен елемент буде попарно мінятися місцями з іншими вершинами, тобто 1 міняється з 2, 1 з 3, 1 з 4, $\dots$, 1 з 6 і далі аналогічно з іншими числами множини. Ребра проводяться лише між вершинами, які не взаємодіяли при перестановці. Таким чином, ми отримуємо дводольний граф Турана без трикутників (рисунок 10).

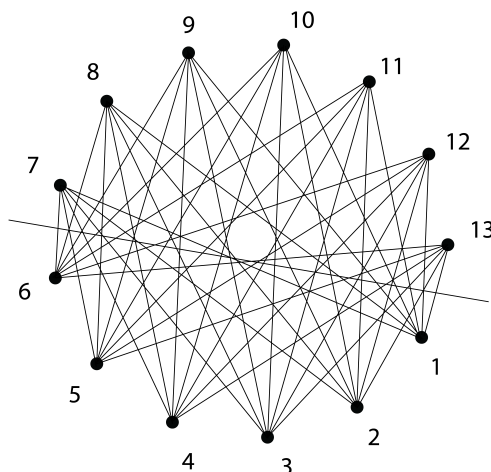


Рис. 10: Дводольний граф Турана

Отже, за теоремою Турана відомо, що кількість ребер у графі Турана дорівнює $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, отже кількість ребер не проведених в цьому графі:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

3.2.3 Хроматичне число

1. Нехай граф має дванадцять вершин та хроматичне число (1.2.35) дорівнює чотири. Яка максимальна кількість ребер в цьому графі може бути?

Розв'язок

За означенням, хроматичне число це кількість класів (кольорів), в межах яких вершини не суміжні, отже отримується чотиридольний граф, в якому ребра проведені лише між вершинами різних долей. Отже, це граф Турана $T(12, K_5)$.

Тоді за формулою можна обрахувати кількість ребер в ньому:

$$\frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

Так як $p = 12$, $n = 5$, $r = p \bmod (n-1) = 0$, то

$$\frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(5-2)(12^2-0^2)}{2(5-1)} + \frac{0(0-1)}{2} = 54$$

2. Нехай граф має p вершин та хроматичне число дорівнює n . Яка максимальна кількість ребер в цьому графі може бути?

Розв'язок

За означенням, хроматичне число це кількість класів (кольорів), в межах яких вершини не суміжні, отже отримується n -дольний граф, в якому ребра проведені лише між вершинами різних долей. Отже, це граф Турана $T(p, K_{(n+1)})$. Таким чином за формулою з теореми (2.2.1) отримуємо, що шукане значення дорівнює

$$\frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(n-1)(p^2-r^2)}{2n} + \frac{r(r-1)}{2}$$

де $r = p \bmod (n-1)$.

3.2.4 Першокурсники

1. На перший курс бакалаврату факультету інформатики в Києво-Могилянській академії було прийнято 150 абітурієнтів. Скільки пар першокурсників на факультеті достатньо Perezнайомити так, щоб гарантовано з'явилася трійка попарно знайомих?

Розв'язок

Нехай першокурсники це вершини деякого графа, дві вершини з'єднуються ребром, якщо відповідні першокурсники познайомились. Якщо серед усіх абітурієнтів немає трійки попарно знайомих, то граф, який зобразить статус всіх першокурсників факультету не матиме трикутників. Це випадок теореми Турана для трикутників, тобто теорема Мантеля (2.1.1), тож користуючись формулою

для знаходження максимальної кількості ребер можна знайти максимальну кількість пар абітурієнтів, які можна перезнайти, щоб ніяка трійка з них не були знайомі.

$$ex(150, K_3) = \left\lfloor \frac{150^2}{4} \right\rfloor = 5625$$

Отриманий граф це граф Турана $T(150, K_3)$, тобто дводольний граф, в якому з'єднані ребрами лише вершини з різних долей. В даному графі клікове число (1.2.37) дорівнюватиме двом, а в шуканому графі максимальна по розміру кліка повинна містити три вершини та бути єдиною. Таким чином, щоб гарантовано знайшлась трійка знайомих, в такому графі повинна з'явитися підмножина вершин, в якій три вершини попарно з'єднані ребрами. Для цього між довільними двома вершинами з однієї долі потрібно провести одне ребро, тобто познайти ще одну пару студентів. Отже відповідь — 5626.

2. На перший курс бакалаврату факультету економіки в Києво-Могилянській академії було прийнято 235 абітурієнтів. Скільки пар першокурсників на факультеті достатньо перезнайти так, щоб на факультеті гарантовано з'явилася четвірка попарно знайомих студентів?

Розв'язок

Нехай першокурсники це вершини деякого графа, дві вершини з'єднуються ребром, якщо відповідні першокурсники познайомились. Якщо серед усіх абітурієнтів немає четвірки попарно знайомих, то граф, який зобразить статус всіх першокурсників факультету не міститиме повних графів на чотирьох вершинах. Це випадок теореми Турана для K_4 . Для знаходження кількості ребер в такому графі використовується формула з теореми (2.2.1).

$$ex(235, K_4) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

де $n = 4, p = 235, r = p \bmod (n-1) = 1$

$$ex(235, K_4) = \frac{(4-2)(235^2 - 1^2)}{2(4-1)} + \frac{1(1-1)}{2} = \frac{2(235^2 - 1)}{6} = 18408$$

В даному графі клікове число (1.2.37) дорівнюватиме трьом, а в шуканому графі максимальна по розміру кліка повинна містити чотири вершини та бути

єдиною. Таким чином, щоб гарантовано знайшлась четвірка знайомих, в такому графі повинна з'явитися підмножина вершин, в якій чотири вершини попарно з'єднані ребрами. Для цього між довільними двома вершинами з однієї долі потрібно провести одне ребро, тобто познайомити ще одну пару студентів. Отже відповідь — 18409.

Висновки

В екстремальній теорії графів одна з фундаментальних теорем — теорема Турана. Ця теорема має декілька формулювань в різних термінах теорії графів та різні прикладні застосування. В цій роботі зібрано основні відомості про такий напрям теорії графів, як екстремальна теорія графів, а особливо її прикладні застосування. Зокрема проблема кліки та сфери її використання. А також відомості про теорему Турана та графи Турана. Також розбір використання теореми та елементів екстремальної теорії графів для розв'язання певних задач цього розділу та власносформульованих задач.

Список літератури

- [1] А. Ю. Зубов. О некоторых классах экстремальных ориентированных графов. ПДМ, 2015, номер 4(30), 83–90. <https://doi.org/10.17223/20710410/30/8>
- [2] Chong-Yun Chao, George A. Novacky. On maximally saturated graphs. Discrete Mathematics, Volume 41, Issue 2, 1982, Pages 139-143. ISSN 0012-365X. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(82\)90200-X](https://doi.org/10.1016/0012-365X(82)90200-X).
- [3] Attila Pór, David R Wood. Proc. Int. Symp. Graph Drawing (GD 2004). Lecture Notes in Computer Science no. 3383, Springer-Verlag, 2005. С. 395–402. <https://doi.org/10.1007/b105810>.
- [4] H. S. Witsenhausen. On the maximum of the sum of squared distances under a diameter constraint *American Mathematical Monthly*. The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 10, 1974. Т. 81. С. 1100–1101. <https://doi.org/10.2307/2319046>.
- [5] Vladimir Nikiforov. Eigenvalue problems of Nordhaus-Gaddum type. 2005. <https://arxiv.org/abs/math/0506260>.
- [6] Craig Falls, Bradford Powell, Jack Snoeyink. Computing high-stringency COGs using Turán type graphs <http://www.cs.unc.edu/~snoeyink/comp145/cogs.pdf>.
- [7] Граф Турана. ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2013 - 2020. <http://poivs.tsput.ru/ru/Math/DiscreteMath/GraphTheory/CountOfTuran>
- [8] А. А. Разборов. Об интерпретации Фон-Дер-Флаасса экстремальных примеров для (3,4)-проблемы Турана. Алгоритмические вопросы алгебры и логики, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Труды МИАН, 274, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2011, 269–290

- [9] Magyar Életrajzi Lexikon, Turán Pál (in Hungarian). Magyar Elektronikus Könyvtár (Hungarian Electronic Library). Retrieved 21 June 2008. <http://mek.oszk.hu/00300/00355/html/ABC15363/16089.htm>
- [10] Экстремальная теория графов. ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2013 - 2020. <http://poivs.tsput.ru/ru/Math/DiscreteMath/GraphTheory/ExtremeGraphTheory>
- [11] Бондарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики (для студентів-інформатиків). К.: НаУКМА, 2007. 138.
- [12] Трохимчук Р.М., Нікітченко М.С. Дискретна математика у прикладах і задачах. Київський університет, 2017, 248с. ISBN: 978-966-439-929-3.
- [13] Регулярний граф https://znaimo.com.ua/\T2A\CYRR\T2A\cyre\T2A\cyrg\T2A\cyru\T2A\cyrl\T2A\cyrya\T2A\cyrr\T2A\cyrn\T2A\cyri\T2A\cyrishrt_\T2A\cyrg\T2A\cyrr\T2A\cyra\T2A\cyrf
- [14] Наследственные свойства графов. Экстремальные графы. Наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством. Наибольшее число ребер в планарных графах. Наибольшее число ребер в графах без полного подграфа с n вершинами. <https://mk.cs.msu.ru/images/4/48/Gip-asp-16-selezn.pdf>
- [15] Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах: Навчальний посібник. К.: ВПЦ "Київський університет 2004.
- [16] Оре О. Теория графов. 2-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 336с.
- [17] Chapter 6 - The Threshold Dimension, Editor(s): N.V.R. Mahadev, U.N. Peled, Annals of Discrete Mathematics, Elsevier Volume 56, 1995, Pages 123-138. ISSN 0167-5060, ISBN 9780444892874. [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(06\)80008-7](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(06)80008-7)

- [18] Louis Esperet. Boxicity of graphs with bounded degree. *European Journal of Combinatorics*, Volume 30, Issue 5, 2009, Pages 1277-1280. ISSN 0195-6698. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2008.10.003>
- [19] Кограф, или дополнительно сводимый граф, или свободный от P_4 граф кратко. <https://intellect.icu/kograf-ili-dopolnitelno-svodimyj-graf-ili-svobodnyj-ot-p4-graf-4282>
- [20] Д.В.Карпов. Теория графов https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf
- [21] И.В.Яковлев. Экстремальные характеристики графов <https://mathus.ru/math/graphs-extr.pdf>
- [22] F. S. Roberts. *Recent Progress in Combinatorics*. Academic Press, 1969. С. 301–310.
- [23] А.М.Райгородский. Математические модели интернета. "Квант" №4. 2012. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/431792/Matematicheskie_modeli_interneta
- [24] Gribkov M., Alexeevski A., Ivanova D., Karyagina A. Spirin S. Life Core, program for classification of 3D structures of macromolecules. *Biophysics* (Moscow). 2004, Vol.48. Suppl.1. P.157–166.
- [25] Грибков М.А. Программа для выявления геометрического ядра и классификации пространственных структур эволюционно родственных белков. *Московский инженерно-физический институт (Государственный университет)* https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2004/Pdf/Bibi.pdf
- [26] С. В. Листровой, В. М. Бутенко, В. А. Брыксин, А. В. Головки. Разработка метода определения максимальных клик в неориентированных графах. 2017. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.111056>.

[27] И.В.Яковлев. Теорема Турана <https://mathus.ru/math/teorema-turana.pdf>