

МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ

Д.О. МИРОШНІЧЕНКО

Аналітична геометрія робить вагомий внесок в розв'язок типових задач механіки та фізики. Так, наприклад, диференціальна геометрія є потужним інструментом у моделюванні фізичних процесів: вона широко застосовується для обчислення траєкторій руху частинок чи матеріальних точок.

Одним з основних елементів диференціальної геометрії є крива. Криву на поверхні характеризують дві компоненти її кривини – нормальна та геодезична.

Означення 1. Криву називають геодезичною лінією, якщо геодезична кривина кривої перетворюється в нуль у кожній її точці.

Теорема 1. *Через будь-яку точку на регулярній поверхні у будь-якому напрямі можна провести геодезичну лінію, при тому лише одну.*

Зауваження 1. Механічна інтерпретація цього явища диференціальної геометрії полягає у тому, що геодезична лінія сполучає дві точки на поверхні за найкоротшою відстанню і, спираючись на Теорему 1, є єдиною для конкретної точки, тож часто виступає як траєкторія руху.

Приклад 1. *Розглянемо рух частинки з масою m та зарядом q в електромагнітному полі. Закон її руху задає рівняння:*

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r * \left(\frac{dr}{dt}\right)) \frac{1}{\rho^3},$$

де k – константа, r – радіус-вектор частинки, $\rho = r$ – полярна вісь.

Зауваження 2. З рівняння можна отримати, що рух частинки відбувається на круговому конусі, з кутом при вершині $2(\pi - \varphi)$. Траєкторія є геодезичною лінією конуса. В залежності від кута при вершині, визначається наявність самоперетину геодезичної лінії (кут $\leq 60^\circ$ гарантує його наявність). Узагальнюючи, частинка в електромагнітному полі рухається за геодезичною лінією, що є найвигіднішою для неї траєкторією.

Приклад 2. *Доведено, що рух матеріальної точки в полі дії сил тяжіння відбувається за конічним перерізом (по еліпсу, параболі або гіперболі) та, аналогічно до Прикладу 1, траєкторія в полі дії сил тяжіння*

відповідає полярному рівнянню конічного перерізу з фокусом в полюсі:

$$\frac{1}{\rho} = C_3 + \sqrt{C_3} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

де φ , C_3 — певні константи.

Зауваження 3. Для тіла, що рухається під дією сил тяжіння, аналогічно, найвигіднішою траєкторією є геодезична лінія. Тож для визначення руху балістичного снаряду необхідно спиратися на Приклад 2.

Геодезичні лінії можуть підкріпити аналітичні рівняння траєкторій руху балістичних снарядів, коли узагальнена модель руху виводиться емпірично.

Твердження 1. При розгортці поверхні геодезична лінія перетворюється у пряму.

Зауваження 4. Необхідно зазначити, що характеристика поля сил, в яке попадають піддослідні моделі, ідентичні — вони обидва є центральними полями сил. Звідси, можна зробити висновок, що траєкторія руху є плоска крива, яка спираючись на Твердження 1, перетвориться в пряму при розгортці поверхні. Це, в свою чергу, може підтвердити, що траєкторія є геодезичною лінією.

Наведені приклади та обґрунтування вказують на одну з найбільш практичних властивостей геодезичних ліній - вона є траєкторією руху матеріальної точки по гладкій поверхні.

Загалом, геодезичні лінії можуть бути потужним оператором для обчислення траєкторій. Вони можуть пояснити природу руху космічних тіл, поведінку заряджених частинок під дією поля електромагнітних сил або допомогти задати рівняння руху балістичних снарядів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Борисенко О. А. *Диференціальна геометрія і топологія..* — Харків: Основа , 1995. — 304с.
- [2] С.Ф. Пилипака, О.С. Породько, І.Р. Костенко. *Форма геодезичної лінії конуса в залежності від кута при його вершині // Збірник тез доповідей ХУ Міжнародної науково-практичної конференції “Обухівські читання”.*
- [3] Погорелов А.В. *Лекції з диференціальної геометрії..* — Харків: Видавництво Харківського державного університету , 1967. — 165 с.
- [4] Стеганцева П.Г., Стеганцев Є.В., Гречнева М.О. *Диференціальна геометрія і топологія: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика» — Запоріжжя: ЗНУ, 2019. — 160 с.*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: d.myroshnichenko.al31@kpi.ua