НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИМИ ПОТОКАМИ В МЕРЕЖІ

Виконала студентка
БП «Прикладна математика»-3
Гак Софія Володимирівна

Фото: Szabo, Viktor. “roundabout”

ЗМІСТ

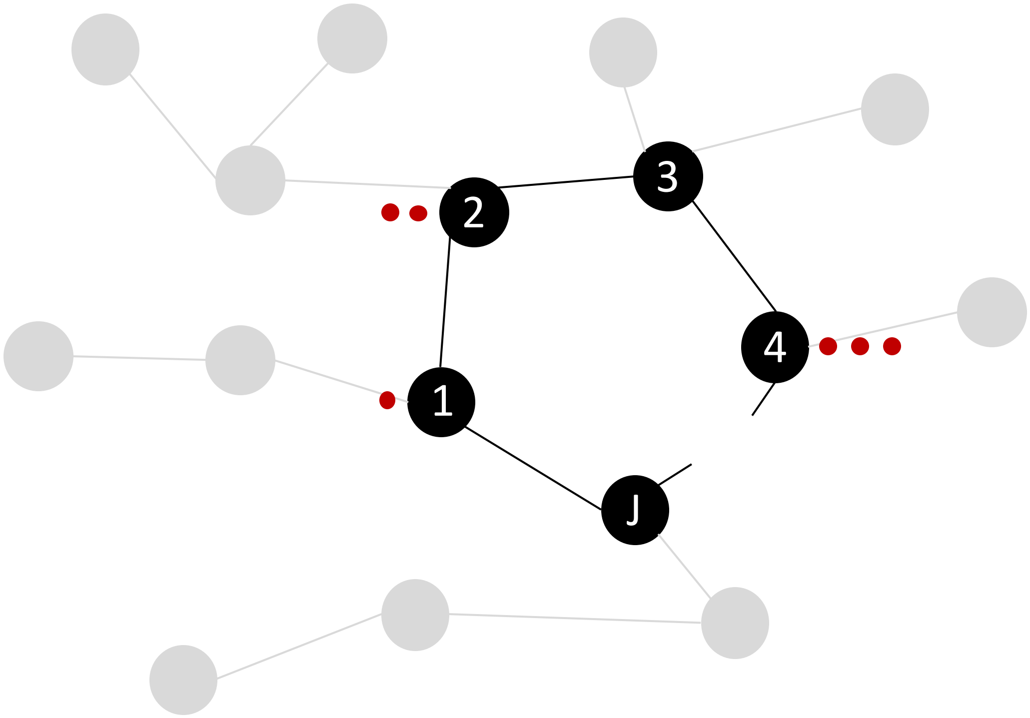
Модель

Структура

- $\boldsymbol{\Gamma = (V, B)}$ – неорієнтований циклічний граф
- $\boldsymbol{\{k, j\}}$ – ребро між вершинами k, j
- $\mathbf{N(k)} = \{j : \{k, j\} \in B\}$ – окіл вершини k
- $\mathbf{\tilde{N}(k)} = N(k) \cup \{k\}$ – повний окіл вершини k

Модель

Рух



- J вузлів: $\mathbf{V} = \{1, 2, \ldots, J\}$
- $\mathbf{B} = \{\{j, j+1\} : j = 1, \ldots, J\}; J + 1 := 1, 1 - 1 := J$
- $\mathbf{N(j)} = \{j-1, j+1\}$
- **K вимог**
- **First-Come-First-Served**
- $\mathbf{X_i} = \{x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\}$ – локальний простір станів у вершині i
- $\mathbf{x_k} := (x_k, k \in K)$ – маргінальний опис стану у вершинах $K \subset V$

Керований марковський процес

Марковське випадкове поле з дискретним часом

Марковське випадкове поле із синхронними компонентами, що взаємодіють локально

$$P(\xi_K^{t+1} = x_K^{t+1} / \xi^t = x^t) = \prod_{k \in K} P(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} / \xi^t_{\tilde{N}(k)} = x^t_{\tilde{N}(k)}), \quad t \in \mathbb{N}.$$

$$K \subset V, x^t, x^{t+1} \in X.$$

- **Марковість** $P(\xi_k = x_k / \xi_{V-\{k\}} = x_{V-\{k\}}) = P(\xi_k = x_k / \xi_{N(k)} = x_{N(k)}), \forall x \in X,$
- **Локальність** $P(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} / \xi^t = x^t, ..., \xi^0 = x^0) = P(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} / \xi^t_{\tilde{N}(k)} = x^t_{\tilde{N}(k)}) \ \forall k \in V, x^0, ..., x^{t+1} \in X$
- **Синхронність** $P(\xi_K^{t+1} = x_K^{t+1} / \xi^t = x^t) = \prod_{k \in K} P(\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} / \xi^t = x^t), \quad \forall K \subset V, x^t, x^{t+1} \in X$

Керований марковський процес

Кероване марковське поле

Керований марковський процес із синхронними компонентами, що взаємодіють локально

- Множина допустимих рішень для всієї системи в момент t $U^t(x) = \times_{i \in V} U_i^t(x_{\tilde{N}(i)})$
- Допустима локальна стаціонарна Марковськівська стратегія $\delta\colon\ \delta_i = \{\Delta_i^t, t \geq 0\}$
  - Локальність $\Delta_i^t = \Delta_i^t(x^0_{\tilde{N}(i)}, \ldots, x^t_{\tilde{N}(i)}) =$
  - Марковість $= \Delta_i^t(x^t_{\tilde{N}(i)}) =$
  - Синхронність $= \Delta_i^{t'}(x_{\tilde{N}(i)}),$
  - Допустимість $\Delta_i^{t'}(x_{\tilde{N}(i)}) \in U_i^t(x_{\tilde{N}(i)}),$

Керований марковський процес

Кероване марковське поле

Керований марковський процес із синхронними компонентами, що взаємодіють локально

$$(\xi, \delta)$$

$\xi = (\xi^t : t \geq 0)$ – марковське випадкове поле з дискретним часом із простором станів $X = \times_{i \in V} X_i$

$\delta = (\delta_i : i \in V)$ – допустима локальна стаціонарна марковська стратегія

$P(\xi_S^{t+1} = x_S / \xi^0 = x^0, \Delta^0(\xi^0) = u^0, \dots, \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = u) = Q_S(x_S / y, u)$ – ядра (ймовірності) переходу

Задача пошуку оптимальної стратегії

$$Q_T^\delta(y) = E_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t) := E_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t))$$

$$R_y^\delta = \lim_{T \to \infty} Q_T^\delta(y)$$

$$\rho(y) = \inf_\delta R_y^\delta$$

Оптимальність

$$\rho(y) = R_y^{\delta^*} \ \forall y \in X$$