

УДК 517.986.9

Каши́ровський О. І. Стрілець О. В.

ПРОСТОРИ «ГЛАДКИХ» ВЕКТОРІВ ДЕЯКИХ СІМЕЙСТВ НЕОБМЕЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Встановлено зв'язок між просторами «гладких» векторів сімейств, породжених операторами диференціювання і множення на незалежну змінну, та просторами Л. Шварца і Г. Є. Шилова типу S.

Проблема визначення степеневих рядів від елементів алгебри або сім'ї необмежених операторів (див., наприклад, [1-6] та інші), побудова просторів основних та узагальнених функцій, дослідження за їх допомогою задач для диференціальних рівнянь у звичайних та частинних похідних (див. [7] та інші), а також проблеми теорії апроксимації та її застосування для побудови чисельних методів (див. [8-12]) приводять до поняття гладких векторів необмежених операторів.

Хоча опубліковано чимало робіт, присвячених застосуванню гладких векторів, у цій тематиці залишається багато нерозв'язаних проблем. Зокрема, навіть для досить простих операторів не одержано повного опису класів гладких векторів.

У даній роботі вивчаються деякі класи гладких векторів сімейств операторів у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$, породжених операторами $Q = x$, $P = i \frac{d}{dx}$, та їх зв'язок з просторами Л. Шварца і Г. Є. Шилова типу S.

1. У цьому пункті наведемо необхідні загальні означення. Нехай $\mathcal{A}$ — деяке сімейство необмежених операторів у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, які допускають замикання. Вектор $f \in \mathcal{H}$ називаємо C^∞ -вектором сімейства $\mathcal{A}$, якщо для будь-якого впорядкованого набору $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ операторів з $\mathcal{A}$

$$A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n} f \in \mathcal{H}.$$

Простір C^∞ -векторів сімейства $\mathcal{A}$ будемо позначати $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, або коротко $\mathcal{D}$. Ми припускаємо, що

простір $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ є щільним в $\mathcal{H}$. Зауважимо також, що простір $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ інваріантний відносно дії довільних скінченних добутків операторів з сімейства $\mathcal{A}$. Введемо в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ топологію проективної границі за системою частково впорядкованих напівнорм $\rho_n(v) = \rho_n(v; \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\rho_n(v; \mathcal{A}) := \sup_{W \in \mathcal{W}_n} \|Wv\|_{\mathcal{H}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\rho_0(v; \mathcal{A}) := \|v\|_{\mathcal{H}},$$

де $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n(\mathcal{A})$ — множина всіх можливих добутків n довільних операторів з сімейства $\mathcal{A}$.

Вужчі простори «гладких» векторів визначаємо таким означенням (див. [13]).

Означення 1. Нехай $m_n > 0$ — деяка послідовність. Позначимо

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\{m_n\}}(\mathcal{A}; s) &= \\ &= \{v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \rho_n(v) \leq s^n m_n\}, \\ &\quad s > 0 \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{D}}_{\{m_n\}}(\mathcal{A}) = \bigcap_{s>0} \mathcal{D}_{\{m_n\}}(\mathcal{A}; s),$$

$$\check{\mathcal{D}}_{\{m_n\}}(\mathcal{A}) = \bigcup_{s>0} \mathcal{D}_{\{m_n\}}(\mathcal{A}; s).$$

Наступне означення дає простори «гладких» векторів у термінах рядів, що може в певних випадках бути зручнішим.

Означення 2. Нехай $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ — деяка монотонно зростаюча послідовність додатних чисел. Позначимо $\mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h)$ — банахів простір гладких векторів $v \in \mathcal{D}(A)$ з нормою

$$\rho(v; A, \{m_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n(v; A)}{m_n} h^n, \quad h > 0.$$

Зв'язок цих двох означень дає таке твердження.

Твердження 1. $\mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h) \subset \mathcal{D}_{\{m_n\}}(A, 1/h) \subset \mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h/2)$.

Доведення. Доведення дослівно повторює доведення [13, Proposition 1].

Як наслідок цього твердження отримаємо, що індуктивна границя просторів $\mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h)$ при $h \rightarrow \infty$

$$\check{\mathcal{D}}_{\{m_n\}}^*(A) = \bigcup_{h>0} \mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h)$$

збігається з $\check{\mathcal{D}}_{\{m_n\}}(A)$, а проєктивна границя просторів $\mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h)$ при $h \rightarrow 0$

$$\hat{\mathcal{D}}_{\{m_n\}}^*(A) = \bigcap_{h>0} \mathcal{D}_{\{m_n\}}^*(A, h)$$

збігається з $\hat{\mathcal{D}}_{\{m_n\}}(A)$.

Зауваження 1. Для багатьох змістовних прикладів простори «гладких» векторів нетривіальні тільки у випадку

$$\frac{m_n}{a^n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall a > 1.$$

Така умова виконується, наприклад, для послідовності $m_n = n^{\alpha n}$ при $\alpha > 0$. Простори «гладких» векторів $\check{\mathcal{D}}_{\alpha}(A) := \check{\mathcal{D}}_{\{n^{\alpha n}\}}(A)$ та $\hat{\mathcal{D}}_{\alpha}(A) := \hat{\mathcal{D}}_{\{n^{\alpha n}\}}(A)$ у цьому випадку ми назвемо просторами Жевре порядку α типу Рум'є та Берлінга, відповідно, для сімейства операторів A . На векторах з $\check{\mathcal{D}}_{\alpha}(A)$, $\hat{\mathcal{D}}_{\alpha}(A)$ можуть бути визначені цілі функції порядку α від операторів сімейства A . Такі функції виникають, наприклад, при дослідженні операторно-диференціальних рівнянь з некомутовими операторними коефіцієнтами типу

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_2 y = 0,$$

де A_1 та A_2 — необмежені некомутові оператори в $\mathcal{H}$.

Простір $\check{\mathcal{D}}_1(A)$ природно назвати простором аналітичних векторів сімейства A , $\hat{\mathcal{D}}_1(A)$ — простором цілих векторів сімейства A (див. [1, 3, 13]), а елементи простору

$$\check{\mathcal{D}}_0(A) = \{v \in \mathcal{D}(A) \mid \exists C, h > 0 : \rho_n(v) \leq Ch^n, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

природно називати цілими векторами експоненціального типу (див. [14]) або обмеженими векторами сімейства A ,

Для сімейства A , що складається з одного необмеженого самоспряженого оператора, подібні простори «гладких» векторів досліджувалися в [7] за допомогою спектральної міри. У цьому випадку всі перелічені простори гладких векторів є нетривіальними і щільні в $\mathcal{H}$. Якщо сімейство A складається з нормальних комутуючих операторів $A_1, A_2, \dots, A_d$, то гладкі вектори сімейства збігаються з гладкими векторами $\Delta^{1/2}$, де Δ — узагальнений лапласіан

$$\Delta = \sum_{j=1}^d A_j^2.$$

У [6] розглядалися простори обмежених, аналітичних та цілих векторів для зліченної сім'ї комутуючих самоспряжених операторів (КСО). У цьому випадку також доведено, що вже простір обмежених векторів є щільним в $\mathcal{H}$.

Для некомутативного сімейства операторів A , які є генераторами алгебри Лі, сумісні аналітичні та цілі вектори розглядалися в [1-5]. У цьому випадку простір аналітичних векторів A збігається з простором аналітичних векторів оператора $\Delta^{1/2}$.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, ці простори не завжди нетривіальні (див. приклади в [13]) і навіть для одного несамоспряженого замкнутого оператора питання про щільність та нетривіальність просторів «гладких» векторів є складним і в багатьох випадках не дослідженим.

Наявність щільного в $\mathcal{H}$ простору аналітичних векторів симетричного оператора A є необхідною і достатньою умовою його істотної самоспряженості (див [1]).

Якщо оператор A — генератор аналітичної напівгрупи в $\mathcal{H}$, то, як показав ще в 1939 році І. М. Гельфанд, оператор A має щільний простір аналітичних векторів. Якщо A генератор неаналітичної напівгрупи класу $\mathcal{C}_0$, то A може взагалі не мати нетривіальних аналітичних векторів, але простори Жевре $\check{\mathcal{D}}_{\alpha}(\{A\})$, $\alpha > 1$ щільні в $\mathcal{H}$ (див. [15]).

У цій роботі ми також наведемо нові приклади ситуацій, коли простори «гладких» векторів не є щільними або навіть є тривіальними.

2. Розглянемо сімейство двох операторів

$$A = \left\{ Q = x, P = i \frac{d}{dx} \right\}$$

у гільбертовому просторі $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1, dx)$.

Лема 2. Нехай у деякому добутку $W = A_1 A_2 \dots A_n \in \mathcal{W}_n$, $A_j \in \mathcal{A}$ k множників Q та l множників P , $n = k + l$. Тоді

$$W = \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_j Q^{k-j} P^{l-j}, \quad (1)$$

де коефіцієнти $C_j = C_j(W)$ допускають оцінки

$$|C_j(W)| \leq \frac{k!}{(k-j)!} \cdot \frac{l!}{j!(l-j)!} \quad (2)$$

Доведення. Доведення проводитимемо математичною індукцією по $n = k + l$. Базис індукції: у випадках $k = 1, l = 0$ та $k = 0, l = 1$ представлення (1) з оцінками (2) є очевидними. Припустимо, що ми довели (1), (2) для всіх $W \in \mathcal{W}_n$. Покажемо, що (1), (2) справедливо для довільного $W' \in \mathcal{W}_{n+1}$. Є дві можливості: або $W' = QW$, або $W' = PW$, для деякого $W \in \mathcal{W}_n$. Нехай W складається з k множників Q та l множників P .

Якщо $k < l$, то покладемо $C_{k+1} = 0$.

Тоді для випадку $W' = QW$ маємо

$$\begin{aligned} W' &= \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_j Q^{k+1-j} P^{l-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{\min(k+1,l)} C_j Q^{k+1-j} P^{l-j}, \end{aligned}$$

крім того

$$\begin{aligned} |C_j| &\leq \frac{k!}{(k-j)!} \cdot \frac{l!}{j!(l-j)!} \leq \\ &\leq \frac{(k+1)!}{(k+1-j)!} \cdot \frac{(l+1)!}{j!(l+1-j)!}, \end{aligned}$$

для $0 \leq j \leq \min(k+1, l)$.

Перед тим як розглянути випадок $W' = PW$, доведемо безпосередньо формулу для випадку $l = 0$:

$$PQ^k = Q^k P + ikQ^{k-1}, \quad (3)$$

яка узгоджена з формулами (2). Дійсно, для довільної $f \in \mathcal{D}$ і $k \geq 0$

$$\begin{aligned} (PQ^k f)(x) &= i \frac{d}{dx} \left(x^k f(x) \right) = \\ &= ikx^{k-1} f(x) + ix^k f'(x) = \\ &= ((ikQ^{k-1} + Q^k P)f)(x). \end{aligned}$$

Якщо $l < k$, то покладемо $C_{l+1} = 0$.

Тоді, скориставшись формулою (3), отримаємо

$$W' = PW = \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_j PQ^{k-j} P^{l-j} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_j Q^{k-j} P^{l+1-j} + \\ &+ \sum_{j=0}^{\min(k-1,l)} iC_j(k-j)Q^{k-1-j}P^{l-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_j Q^{k-j} P^{l+1-j} + \\ &+ \sum_{j=1}^{\min(k,l+1)} iC_{j-1}(k-j+1)Q^{k-j}P^{l+1-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{\min(k,l+1)} C'_j Q^{k-j} P^{l+1-j}, \end{aligned}$$

де $C'_0 = C_0$ і $C'_j = C_j + i(k-j+1)C_{j-1}$ ($1 \leq j \leq \min(k, l+1)$). Отже $|C'_0| \leq 1$, а

$$\begin{aligned} |C'_j| &\leq |C_j| + (k-j+1)|C_{j-1}| \leq \\ &\leq \frac{k!}{(k-j)!} \frac{l!}{j!(l-j)!} + (k-j+1) \times \\ &\times \frac{k!}{(k-j+1)!} \frac{l!}{(j-1)!(l-j+1)!} = \\ &= \frac{k!}{(k-j)!} \frac{l!}{(j-1)!(l-j)!} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{l+1-j} \right) = \\ &= \frac{k!}{(k-j)!} \frac{(l+1)!}{j!(l+1-j)!}. \end{aligned}$$

Таким чином лему доведено.

Зауваження 2. У випадку $W = P^l Q^k$ можна побачити, що в (2) мають місце рівності, які є наслідком формули Лейбніца. Отже, отримані оцінки є точними.

Нехай тепер $s \in \gamma_s \subset \{1, 2, \dots, s\}$ та $r \in \eta_r \subset \{1, 2, \dots, r\}$, $r, s \in \mathbb{N}$. У гільбертовому просторі $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1, dx)$ розглянемо сімейство операторів

$$\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s} = \{P^j\}_{j \in \gamma_s} \cup \{Q^j\}_{j \in \eta_r}.$$

Зауважимо, що $\mathcal{A}$ збігається з $\mathcal{A}_{\eta_1}^{\gamma_1}$.

Для вивчення гладких векторів сімейства $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ нам потрібен аналог лема 2:

Лема 3. Якщо в добутку $W \in \mathcal{W}_n(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ q множників є степенями Q та p множників є степенями P , ($p+q = n$), тоді W допускає представлення (1), де k є сумою показників степенів оператора Q , а l – сумою показників степенів оператора P . Причому $k \leq rq$, $l \leq sr$ та $k/r + l/s \leq n$, і для коефіцієнтів $C_j = C_j(W)$ мають місце оцінки

$$|C_j| \leq l^j C_k^j \quad (4)$$

Доведення. Справді, нехай k — кількість операторів Q , а l — кількість операторів P у добутку W . Тоді, очевидно, $k \leq r_q$ та $l \leq s_p$, і ми маємо представлення (1) з оцінкою (2), якщо її огрубити, то отримаємо

$$|C_j| \leq l^j C_k^j$$

Отже, лему доведено.

Зауваження 3. Лема 2 зводить оцінювання Wf , $f \in \mathcal{W}_n(A)$, $f \in \mathcal{D}(A)$ до оцінювання суми однотипних виразів $Q^{k-j}P^{l-j}f$. Лема 3 дає змогу робити те ж саме для добутків $W \in \mathcal{W}(A_{\eta_r}^*)$. Завдяки лемі 3 є не істотним спосіб запису W як добутку елементів з $A_{\eta_r}^*$. Істотними є суми показників степенів P і Q , тобто числа k і l .

2. У цьому пункті ми нагадаємо означення та властивості просторів типу S , що складаються з заданих на $\mathbb{R}^1$ функцій, які є одночасно гладкими відносно операторів P та Q .

Простір Л. Шварца S складається з нескінченно диференційованих швидко спадаючих на нескінченності функцій $f(x)$, для яких [16]

$$\tau_m^n(f) = \|Q^m P^n f\|_{L_2(\mathbb{R}^1, dx)} < +\infty$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

В S вводиться топологія проективної границі по сімейству напівнорм $\tau_m^n(\cdot)$. Зауважимо, що, як правило, в S вводять сімейство напівнорм з використанням рівномірної метрики

$$\tilde{\tau}_m^n(f) = \max_{x \in \mathbb{R}^1} |x^m f^{(n)}(x)|, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Вужчі простори типу S були введені в [17] (див. також [18]) і досліджувалися в [19]. Дамо їх означення за допомогою напівнорм $\tau_m^n(\cdot)$ (див., наприклад, [7]).

$$S_\alpha = \left\{ f \in S \mid \exists h > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \right.$$

$$\left. \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\tau_m^n(f)}{h^m m^{\alpha m}} < +\infty \right\},$$

$$S^\beta = \{ f \in S \mid \exists h > 0, \forall m \in \mathbb{N} :$$

$$\left. \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\tau_m^n(f)}{h^n n^{\beta n}} < +\infty \right\},$$

$$S_\alpha^\beta = \{ f \in S \mid \exists h > 0 :$$

$$\left. \sup_{n, m \in \mathbb{N}} \frac{\tau_m^n(f)}{h^{m+n} m^{\alpha m} n^{\beta n}} < +\infty \right\},$$

для довільних $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Можна вважати, що $S_\alpha = S_{+\infty}^\alpha$, $S^\beta = S_{+\infty}^\beta$ і $S = S_{+\infty}^{+\infty}$. Для $\alpha + \beta \geq 1$ простори S_α^β щільні в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1, dx)$, а

при $0 \leq \alpha + \beta < 1$ ці простори, внаслідок теореми Фрагмена—Лінделефа, тривіальні — $S_\alpha^\beta = \{0\}$ [19].

З означень просторів типу S випливає включення $S_\alpha^\beta \subset S_\alpha \cap S^\beta$. У [19, с. 210] було поставлено проблему: чи збігаються S_α^β чи $S_\alpha \cap S^\beta$ як множини? Спочатку в [20] було дано негативну відповідь на це питання для випадку $\alpha > 0, \beta > 1$. Але пізніше з'ясувалося, що проблема має позитивне розв'язання [21]

$$S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta. \quad (5)$$

Для всіх $\alpha, \beta \geq 0$, у контрприкладі [20] було знайдено помилку [22].

Щоб довести рівність (5), в [21] було одержано оцінку норм $\tau_m^n(\cdot)$, $m, n \in \mathbb{N}$, через напівнорми $\rho_l(\cdot; \{P\}) = \tau_0^l(\cdot)$ та $\rho_k(\cdot; \{Q\}) = \tau_k^0(\cdot)$, $k, l \in \mathbb{N}$. Для цього застосовано формулу інтегрування по частинах функцій, які на $\pm\infty$ обертаються в нуль, формулу Лейбніца диференціювання добутку та нерівність Коші—Буняковського (див. також [7, с. 144])

$$\begin{aligned} (\tau_m^n(f))^2 &= \|Q^m P^n f\|_{L_2(\mathbb{R}^1, dx)}^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} |f^{(n)}(x)|^2 dx = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2m} f^{(n)}(x)) \cdot \overline{f(x)} dx \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} \cdot \sum_{j=0}^k C_n^j \frac{(2m)!}{(2m-j)!} \times \right. \\ &\quad \left. \times x^{2m-j} f^{(2n-j)}(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^k j! C_n^j C_{2m}^j \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m-2j} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(2n-j)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^k C_i^j k^j \cdot \rho_{2m-j}(f; \{Q\}) \rho_{2n-j}(f; \{P\}), \end{aligned} \quad (6)$$

де $k = \min(2m, n)$, $l = \max(2m, n)$, $f \in S$.

Для $\alpha + \beta \geq 1$ та $f \in S_\alpha \cap S^\beta$ з останньої оцінки випливає, що $f \in S_\alpha^\beta$, тобто має місце (5). Насправді з (6) випливає сильніше твердження

$$S_\alpha^\beta = \check{D}_\alpha(\{Q\}) \cap \check{D}_\beta(\{P\}). \quad (7)$$

Для $\alpha + \beta < 1$ рівності (5) та (7) випливають з теорем Фрагмена—Лінделефа та Ляпунова (простори $\check{D}_\alpha(\{Q\}) \cap \check{D}_\beta(\{P\})$, $S_\alpha \cap S^\beta$ та S_α^β тривіальні).

Отже, $f \in S_\alpha^\beta$ тоді і тільки тоді, коли вона одночасно належить простору Жевре порядку α оператора Q та простору Жевре порядку β оператора P . Таким чином

$$S_\alpha^\beta = \{f \in S \mid \exists h > 0 : \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\rho_m(f; \{Q\})}{h^m m^{\alpha m}} < +\infty, \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(f; \{P\})}{h^n n^{\beta n}} < +\infty\}, \quad (8)$$

для довільних $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

З оцінки (6) випливає також, що простір S є перетином просторів C^∞ -векторів операторів P і Q

$$S = \mathcal{D}(\{P\}) \cap \mathcal{D}(\{Q\}). \quad (9)$$

Нагадаємо коротко властивості функцій з S_α^β . Індекс α «відповідає» за гладкість функцій з $f(x) \in S_\alpha^\beta$ при $x \rightarrow \pm\infty$. При $\alpha > 0, \alpha + \beta \geq 1$ функції $f \in S_\alpha^\beta$ мають на $+\infty$ експоненціальний порядок спадання $1/\alpha$, тобто існують додатні C та a такі, що

$$|f(x)| \leq C \exp(-|x|^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Індекс β «відповідає» за гладкість відносно оператора P . Функції $f \in S_\alpha^\beta, \alpha + \beta \geq 1$ належать до класу нескінченно-диференційовних функцій Жевре порядку β . При $0 < \beta < 1, \alpha + \beta \geq 1$ функції $f \in S_\alpha^\beta$ допускають аналітичне продовження до цілої функції порядку $(1 - \beta)^{-1}$, причому при деяких додатніх C, a та $b > 0$ має місце оцінка:

$$|f(x + iy)| \leq C \exp(-a|x|^{\frac{1}{\alpha}} + b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}).$$

При $\beta = 1$ функції з S_α^β допускають аналітичне продовження в деяку смугу комплексної площини

$$\Pi_\delta = \{z : |\operatorname{Im} z| < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

При $\beta > 1$ простір S_α^β містить у собі фінітні функції, які обертаються в нуль зовні деякого проміжку $[a, b]$. Так, функція

$$\Phi_p(x) = \begin{cases} \exp(-(1-x^2)^{-p}), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

при $p > 0$ є нескінченно-диференційовною функцією, що належить простору $S_\alpha^{1+p^{-1}}$ [23, с. 161] при будь-якому $\alpha \geq 0$.

3. У цьому пункті покажемо, що гладкі вектори сімейства операторів $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ є просторами типу S .

Одним з інструментів при доведенні двох наступних теорем є частковий випадок нерівності для моментів (див., наприклад [24]). Нехай $A = Q$ або

$A = P, n, m \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{D}(A^{nm})$, тоді правильною є оцінка

$$\rho_n(f; \{A\}) \leq \|f\|^{(m-1)/m} \rho_n^{1/m}(f; \{A^m\}) \quad (10)$$

Теорема 1. Простір C^∞ -векторів сімейства операторів $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ збігається з простором Л. Шварца S :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) = S.$$

Доведення. 1) Покажемо, що $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) \subset S$. Якщо $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$, то для довільного добутку W операторів з $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ довжини n

$$\|Wf\| \leq \rho_n(f; \mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) < +\infty. \quad (11)$$

Зокрема (11) виконується для $W = (P^s)^n$ та $W = (Q^r)^n, n \in \mathbb{N}$. Отже, внаслідок (6) та (10) $f \in S$.

2) Покажемо, що $S \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$. Якщо $f \in S$, то

$$\tau_m^n(f) < +\infty, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Тоді для довільного добутку $W \in \mathcal{W}_n(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}), n \in \mathbb{N}$, внаслідок леми 3 одержимо:

$$\|Wf\| \leq \sum_{j=0}^{\min(k,l)} l^j C_k^j \tau_{k-j}^{l-j}(f) < +\infty,$$

для деяких $k \leq nr$ та $l \leq ns$.

Отже,

$$\rho_n(f; \mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) = \max_{W \in \mathcal{W}_n} \|Wf\| < +\infty$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$.

Оскільки ми довели включення $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) \subset S$ та $S \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$, то теорему 1 доведено.

Теорема 2. Для будь-якого $\alpha > 0$ простір Жевре $\check{\mathcal{D}}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ збігається з простором $S_{\alpha/r}^{\alpha/s}$:

$$\check{\mathcal{D}}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) = S_{\alpha/r}^{\alpha/s}. \quad (12)$$

Доведення. Спочатку доведемо послідовність вкладень:

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{D}}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) &\subset \bigcap_{j \in \eta_r} \check{\mathcal{D}}_\alpha(\{Q^j\}) \cap \bigcap_{j \in \gamma_s} \check{\mathcal{D}}_\alpha(\{P^j\}) \subset \\ &\subset \bigcap_{j \in \eta_r} \check{\mathcal{D}}_{\alpha/j}(\{Q\}) \cap \bigcap_{j \in \gamma_s} \check{\mathcal{D}}_{\alpha/j}(\{P\}) \subset \\ &\subset \check{\mathcal{D}}_{\alpha/r}(\{Q\}) \cap \check{\mathcal{D}}_{\alpha/s}(\{P\}) = S_{\alpha/r}^{\alpha/s}. \end{aligned}$$

Перше вкладення є очевидним за означенням просторів $\check{\mathcal{D}}_\alpha$. Друге є наслідком нерівності (10). Третє вкладення виконується, оскільки $r \in \eta_r$ та $s \in \gamma_s$. Останню рівність маємо за формулою (7).

Отже, ми довели $\check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) \subset S_{\alpha/r}^{\alpha/s}$.

У випадку $\alpha(\frac{1}{s} + \frac{1}{r}) < 1$ простір $S_{\alpha/r}^{\alpha/s}$ складається тільки з нульової функції (див. [19]), отже, рівність (12) виконується.

Доведемо зворотнє вклядення $\check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) \supset S_{\alpha/r}^{\alpha/s}$ у випадку $\alpha(\frac{1}{s} + \frac{1}{r}) \geq 1$. Нехай функція $f \in S_{\alpha/r}^{\alpha/s}$, тобто для деяких $C, h > 0$

$$\tau_m^n(f) \leq Ch^{m+n} m^{(\alpha/r)m} n^{(\alpha/s)n},$$

для всіх $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді для довільного добутку $W \in \mathcal{W}_n$ внаслідок леми 3 матимемо

$$\begin{aligned} \|Wf\| &\leq \sum_{j=0}^{\min(k,l)} l^j C_k^j \tau_{k-j}^{l-j}(f) \leq \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_k^j h^{k+l-2j} \times \\ &\quad \times k^{(\alpha/r)(k-j)} l^{(\alpha/s)(l-j)+j}, \end{aligned}$$

для деяких k та l . Враховуючи, що $\frac{k}{r} + \frac{l}{s} \leq n$ та $\alpha(\frac{1}{s} + \frac{1}{r}) \geq 1$, отримаємо

$$\begin{aligned} \|Wf\| &\leq C \sum_{j=0}^{\min(k,l)} C_k^j (h^{r+s} r^\alpha s^{\alpha+s})^n \times \\ &\quad \times n^{\alpha(\frac{k}{r} + \frac{l}{s}) - j(\alpha(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}) - 1)} \end{aligned}$$

Отже, для достатньо великого n маємо

$$\rho_n(f; \mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) = \max_{W \in \mathcal{W}_n} \|Wf\| \leq h_1^n n^{\alpha n},$$

де $h_1 = 2^r h^{r+s} r^\alpha s^{\alpha+s}$. Таким чином, $f \in \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$.

Отже, $\check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ є нетривіальним при

$$\alpha \geq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)^{-1}.$$

Якщо $(\frac{1}{r} + \frac{1}{s})^{-1} \leq \alpha < s$, то для функцій $f \in \mathcal{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ існує аналітичне продовження до цілої функції порядку $s(s - \alpha)^{-1}$, причому при деяких додатних C, a, b має місце оцінка:

$$|f(x + iy)| \leq C \exp(-a|x|^{\frac{s}{s-\alpha}} + b|y|^{\frac{s}{s-\alpha}}).$$

При $\alpha = s$ функції $f \in \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ допускають аналітичне продовження в деяку смугу площини $\Pi_\delta = \{z : |\operatorname{Im} z| < \delta\}$.

При цьому при деяких додатних C, a, b виконується оцінка:

$$|f(x + iy)| \leq C \exp(-a|x|) \quad \text{для } x + iy = z \in \Pi_\delta.$$

Для $\alpha > s$ $\check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ містить у собі фінітні функції, зокрема $\Phi_p(x)$ належать $\check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ при $p = \frac{s}{\alpha-s}$.

Зауваження 4. З теореми 2 випливає узагальнення рівності $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ для просторів Жевре сімейства $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$:

$$\begin{aligned} \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}) &= \bigcap_{A \in \mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}} \check{D}_\alpha(\{A\}) = \\ &= \check{D}_\alpha(\{P^s\}) \cap \check{D}_\alpha(\{Q^r\}). \end{aligned}$$

Отже, для $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ «сумісна» гладкість еквівалентна одночасній «роздільній» гладкості відносно всіх операторів $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$. З останньої рівності випливає також, що основну роль для сім'ї $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ відіграють оператори Q^r та P^s .

Зауваження 5. Нехай до сім'ї $\mathcal{A}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ додали скінченну кількість добутків вигляду:

$$\begin{aligned} Q^{k_1} P^{l_1} \dots Q^{k_d} P^{l_d}, \quad d \in \mathbb{N}, k_j, l_j \in \mathbb{N}, \\ k_1, l_d \in \mathbb{N}_0, \sum_{j=0}^d k_j \neq 0, \sum_{j=0}^d l_j \neq 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Позначимо нову сім'ю $\check{\mathcal{A}}_{\eta_r}^{\gamma_s}$, $r' = \max_{j=1}^d k_j$, $s' = \max_{j=1}^d l_j$, де максимум береться по всіх добутках, які ми додали. Припускаємо, що $r'/r + s'/s \leq 1$. Нехай для $W \in \mathcal{W}_n(\check{\mathcal{A}}_{\eta_r}^{\gamma_s})$ p та q такі ж, як у леми 3. Позначимо через t кількість множників, які є степенями операторів вигляду (13), $p + q + t = n$. Тоді $k \leq rq + r't$ та $l \leq sp + s't$, отже,

$$\frac{k}{r} + \frac{l}{s} \leq q + p + \left(\frac{r'}{r} + \frac{s'}{s} \right) t \leq n.$$

Тоді для W виконується представлення (1) з оцінкою (4) і, як наслідок, ми отримуємо доведення аналогів теорем 1 та 2 для сім'ї $\check{\mathcal{A}}_{\eta_r}^{\gamma_s}$.

Теореми 1 та 2 також не зміняться, якщо до сім'ї $\check{\mathcal{A}}_{\eta_r}^{\gamma_s}$ додати скінченну кількість лінійних комбінацій елементів з сім'ї (див. [13, Proposition 2]).

Зауваження 6. З теореми 2 випливає інше означення S_α^β . Множину всіх можливих добутків W довжини $n + m$, в яких m множників Q та n множників P , позначимо як $\mathcal{W}_m^n$, тоді

$$\begin{aligned} S_\alpha^\beta &= \left\{ f : f \in S \exists h > 0 \right. \\ &\quad \left. \sup_{n,m \in \mathbb{N}} \max_{W \in \mathcal{W}_m^n} \frac{\|Wf\|}{h^{m+n} m^{\alpha m} n^{\beta n}} \right\}, \end{aligned}$$

для довільних $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Зауваження 7. За допомогою теореми 2 можна досліджувати гладкі вектори диференціального оператора в $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$

$$L_m^n = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + x^{2m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

який є лапласіаном для $\mathcal{A}_{\{2n\}}^{\{2m\}}$. З теореми 2 випливає, що

$$\begin{aligned} S_{\alpha/(2m)}^{\alpha/(2n)} &= \check{D}_\alpha(\{P^{2n}, Q^{2m}\}) = \\ &= \check{D}_\alpha(\{P^{2n} + Q^{2m}, P^{2n} - Q^{2m}\}) \subset \\ &\subset \check{D}_\alpha(\{L_m^n\}), \end{aligned}$$

для $\alpha \geq (\frac{1}{2m} + \frac{1}{2n})^{-1}$. Якщо $\min(m, n) = 1$, то має місце рівність (див. [3, 25])

$$S_{\alpha/(2m)}^{\alpha/(2n)} = \check{D}_\alpha(\{L_m^n\}), \quad \alpha \geq \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}\right)^{-1}$$

4. Позначимо через Q_a оператор множення на $x + ia$, $a \in \mathbb{R}$. Розглянемо сім'ю з двох операторів

$$\mathcal{A}_{\omega, a}^1 = \{P, Q_a^\omega\},$$

де ω (в цій формулі й до кінця пункту) належить множині $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$.

Для цієї сім'ї є правильним аналог леми 3:

Лема 4. Для довільних $a \in \mathbb{R}^1$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ та довільного $W \in \mathcal{W}_{k+l}(\mathcal{A}_{\omega, a}^1)$, такого, що в ньому k добутоків Q_a^ω та l добутоків P , має місце представлення

$$W = \sum_{j=0}^l C_j Q^{k\omega-j} P^{l-j}, \quad (14)$$

де $C_j = C_j(W)$ допускають оцінки

$$|C_j| \leq C_l^j (k|\omega| + j)^j \quad (15)$$

Доведення. Доведення очевидним чином повторює доведення леми 2.

Можна показати, що у випадку $a \neq 0$, $\omega > 0$

$$\check{D}_\alpha(\{P\}) \cap \check{D}_\alpha(\{Q_a^\omega\}) = S_{\alpha/\omega}^\alpha,$$

для довільного $\alpha \geq 0$. Отже, для $\alpha \geq \frac{\omega}{\omega+1}$ цей перетин є нетривіальним. З іншого боку, за допомогою леми 4 можна довести аналог теореми 2 для $\mathcal{A}_{\omega, a}^1$ в такому вигляді

$$\begin{aligned} \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, a}^1) &= S_{\alpha/\omega}^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \\ \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, a}^1) &= \{0\}, \quad \alpha < 1. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо $\frac{\omega}{\omega+1} \leq \alpha < 1$, то

$$\check{D}_\alpha(\{P\}) \cap \check{D}_\alpha(\{Q_a^\omega\}) \neq \check{D}_\alpha(\{P, Q_a^\omega\}),$$

отже, отримано нетривіальний приклад ситуації, коли «сумісна» гладкість не є еквівалентною одночасній «роздільній» гладкості. Зауважимо також, що у випадку $a \neq 0$, $\omega < 0$ маємо

$$\begin{aligned} \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, a}^1) &= \check{D}_\alpha(\{P\}), \quad \alpha \geq 1, \\ \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, a}^1) &= \{0\}, \quad \alpha < 1. \end{aligned}$$

У випадку $a = 0$ функція $f \in S$ буде C^∞ -вектором сімейства $\mathcal{A}_{\omega, a}^1$ тоді й тільки тоді, коли функція $f(x)$ та всі її похідні рівні 0 в точці $x = 0$. Позначимо через $\mathcal{D}(\{P\}; 0)$ — підпростір $\mathcal{D}(\{P\})$, який складається з функцій f , таких, що $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0$. Тоді для $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, a}^1) &= S_{\alpha/\omega}^\alpha \cap \mathcal{D}(\{P\}; 0), \quad \alpha > 1, \\ \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, a}^1) &= \{0\}, \quad \alpha \leq 1, \end{aligned}$$

а для $\omega < 0$

$$\begin{aligned} \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, 0}^1) &= \check{D}_\alpha(\{P\}) \cap \mathcal{D}(\{P\}; 0), \quad \alpha < 1, \\ \check{D}_\alpha(\mathcal{A}_{\omega, 0}^1) &= \{0\}, \quad \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

1. Nelson E. Analytic Vectors // Ann. of Math.- 1959- Vol. 70, № 3.- P. 572-615.
2. Nelson E., Stinespring W. F. Representation of Elliptic Operators in an Enveloping Algebra // Amer. J. Math.- 1959.- Vol. 81, № 3.- P. 547-560.
3. Goodman R. Analytic and Entire Vectors for Representations of Lie Groups // Trans. of the Amer. Math. Soc.- 1969.- Vol. 143.- P. 55-76.
4. Goodman R. Complex Fourier Analysis on a Nilpotent Lie Group // Trans. of the Amer. Math. Soc.- 1971.- Vol. 160.- P. 373-391.
5. Flato M., Simon J., Snellman H., Sterneimer D. Simple Facts About Analytic Vectors and Integrability // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.- 1972.- Vol. 5, № 3.- P. 423-434.

6. Самойленко Ю. С. Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— К.: Наукова думка, 1984.— 232 с. I
7. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наукова думка, 1984— 284 с.
8. Горбачук М. Л., Городецкий В. В. О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Успехи мат. наук.- 1984.- Т. 39, № 4.- С. 140.
9. Бабин А. В. Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // Мат. сб.- 1984.- Т. 123, № 2.- С. 147-174.
10. Gavriluk /., Makarov V. Representation and Approximation for the Solution of an Initial Value Problem for a First Order Differential Equation in Banach Space. Universitaet Leipzig, NTZ. Preprint Nr 9/95.

11. *Каши́ровський О. І., Митник Ю. В.* Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів // Укр. мат. журнал.— 1998.— Т. 50, № 11.—С. 1506–1516.
12. *Каши́ровський О. І.* Апроксимація гладких розв'язків операторно-диференціальних рівнянь // Наукові записки НаУКМА. Фіз.-мат. науки.— 2002.— Т. 20.— С. 16–21.
13. *Samoilenko Yu.S., Strelets A. V.* On "Good" Vectors for a Family of Unbounded Operators and their Application // Methods of Funct Anal, and Topology. – 2002. – Vol. 8, № 2. – P. 88–100.
14. *Радько Я.В.* Пространства векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 55–76.
15. *Гельфанд ИМ.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве // ДАН СССР. — 1939. — Т. 25, №9. –С. 711–718.
16. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 357с.
17. *Шилов Г. Е.* Об одной проблеме квазианалитичности // ДАН СССР. – 1955. – Т. 102, № 5. – С. 893–896.
18. *Паламодов В. П.* Работы Г. Е. Шилова по теории обобщенных функций и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33, № 4. – С. 189–202.
19. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 307 с.
20. *Зобин НМ.* О несовпадении пространств S_{ρ} (S^{∞} и δ , ($a > 0, \beta > 1$)) // Функци. анализ и приложения. — 1973. — Т. 7, № 4. – С. 72–73.
21. *Каши́ровский А. И.* О совпадении пространств S_{ρ} P^5 и S_a // Функци. анализ и приложения. — 1980. — Т. 14, № 2. — С. 60.
22. *Зобин Н. М.* Письмо в редакцию // Функци. анализ и приложения. – 1979. – Т. 13, № 4. – С. 120.
23. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. — М.: Физматгиз, 1960. – 388 с.
24. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И.* Шкалы банаховых пространств // Успехи мат. наук. — 1966. — Т. 21, Xs 2. — С. 89–168.
25. *Каши́ровский А. И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1981. – 18 с.

O. I. Kashpirovskiy, A. V. Strelets

SPACES OF «SMOOTHES» VECTORS FOR SOME FAMILIES OF UNBOUNDED OPERATORS

Obtained a collection of spaces «smoothes» vectors of families generated by operators of differentiation and multiplication on free variable with spaces of L. Schwartz and G. E. Shilov of type S.