Комбінаторна теорема про нулі

Дацько Юлія

Червень 2024

Вступ

Метою даної кваліфікаційної роботи є детальний аналіз комбінаторної теореми про нулі. Дослідження спрямоване на виявлення нових методів розв’язання різного роду задач, що пов’язані з комбінаторикою, теорією множин та графів.

Конкретні завдання дослідження передбачають:

- Зробити огляд основних понять з теорії многочленів та формулювання комбінаторної теореми про нулі, продемонструвати її застосування у альтернативному доведені теорем.
- Розглянути постановку задачі з існування магічної розмітки графів у полі $\mathbb{Z}_p$ та її застосування на часткових прикладах.

Комбінаторна теорема про нулі I

Нехай F – довільне поле та $f = f(x_1, \dots, x_n)$ в полі многочленів від n змінних $F[x_1, \dots, x_n]$. Нехай $S_1, \dots, S_n$ непорожні підмножини F, тоді визначимо многочлен від змінної x_i: $g_i = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$. Якщо многочлен f рівний нулю в кожній точці, координати якої є коренями $g_1, \dots, g_n$ (так, що $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ для всіх $s \in S_i$), то існують такі многочлени $h_1, \dots, h_n \in F[x_1, \dots, x_n]$, що

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$$

та задовольняють умову $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$.

Комбінаторна теорема про нулі II

Нехай F – довільне поле та $f = f(x_1, \dots, x_n)$ в полі многочленів від n змінних $F[x_1, \dots, x_n]$. Припустимо, що степінь $\deg(f) = \sum_{i=i}^{n} k_i$, де кожне k_i – невід'ємне ціле число, а коефіцієнт $\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$ є ненульовим. Тоді для довільних підмножин $S_1, \dots, S_n \subseteq F$ таких, що $|S_i| > k_i$, існують такі $s_i \in S_i$, які задовольняють твердження

$$f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$$

Задача 1

Для двох довільних множин A, B їхня сума $A + B$ визначається $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Тоді для довільного простого числа p та $A, B \in \mathbb{Z}_p$

$$|A + B| \geq min\{p, |A| + |B| - 1\}$$

При проведенні доведення, визначаємо многочлен:

$$f(x, y) = \prod_{c \in C} (x + y - c)$$

Задача 2

Нехай $(a_1, \ldots, a_{2p-1})$ є послідовністю чисел в $\mathbb{Z}_p$, де p – просте число. Тоді існує така підпослідовність довжини p, що сума її елементів рівна нулю.

1) При $a_{i+p-1} = a_i$ твердження $a_i = \ldots = a_{i+p-1}$ є очевидним так, що $a_i + \ldots + a_{i+p-1} =$

$$= pa_i \equiv 0 (mod\ p)$$

2) При $a_{i+p-1} > a_i$ варто розглянути такі множини $A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$:

$$|A_1 + \ldots + A_{p-1}| \geq p$$

Задача 3

Нехай $k, n \in \mathbb{N}$ та p – просте число. Тоді існують такі $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$

$$x_1^k + \ldots + x_k^k \equiv n\ (mod\ p)$$

При проведенні доведення, визначаємо многочлен:

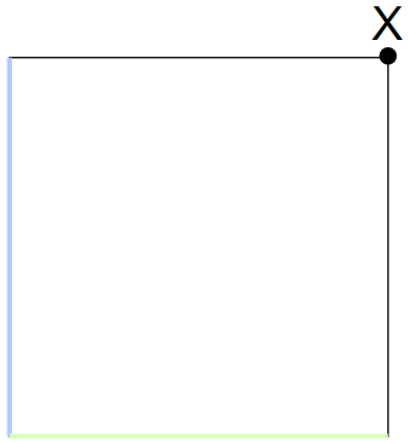
$$f(x_1^k, \ldots, x_k^k) = \prod_{j \in \mathbb{Z}_p \setminus \{n\}} (x_1^k + \ldots + x_k^k - j)$$

Задача 4

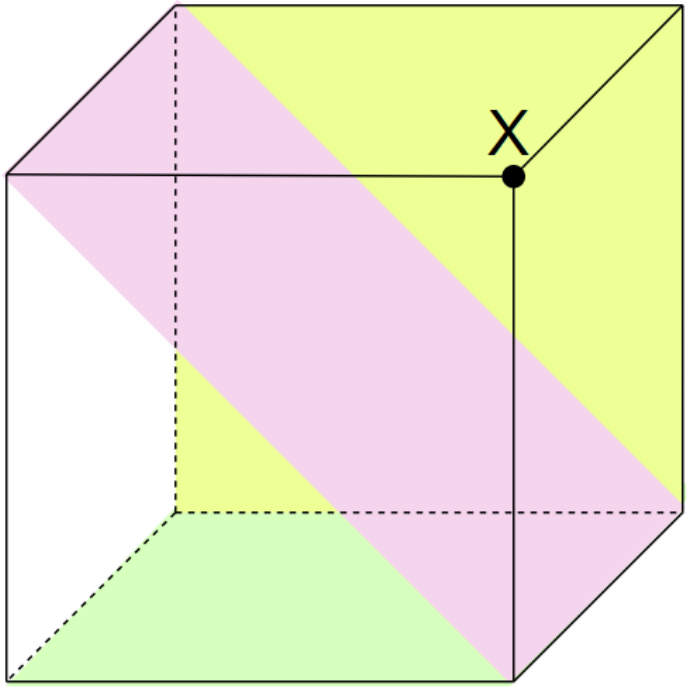
Нехай $H_1, \dots, H_m$ – сімейство гіперплощин в R^n, що покривають всі вершини одиничного куба $\{0,1\}^n$, окрім однієї. Доведіть, що $m \geq n$.

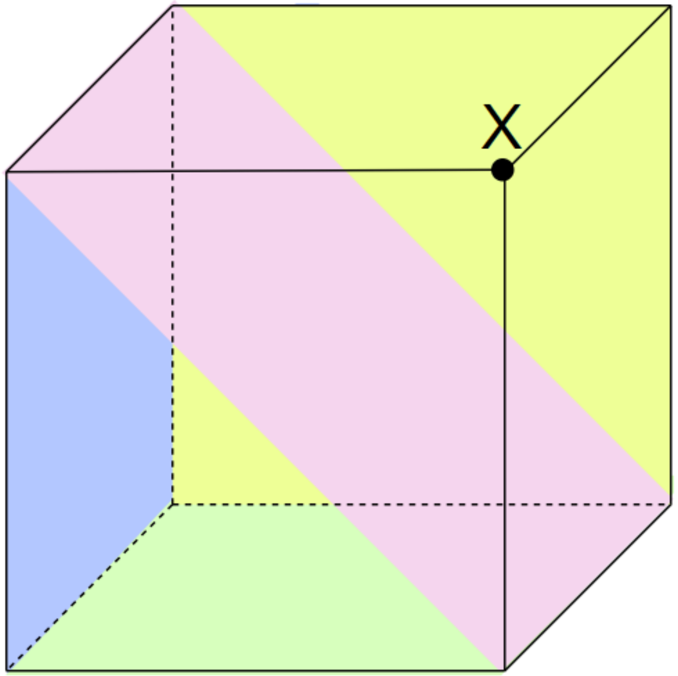
При проведенні доведення, визначаємо многочлен:

$$P(x) = (-1)^{n+m} \prod_{j=1}^{m} b_j \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) - \prod_{i=1}^{m} [(a_i, x) - b_i]$$



Задача 4





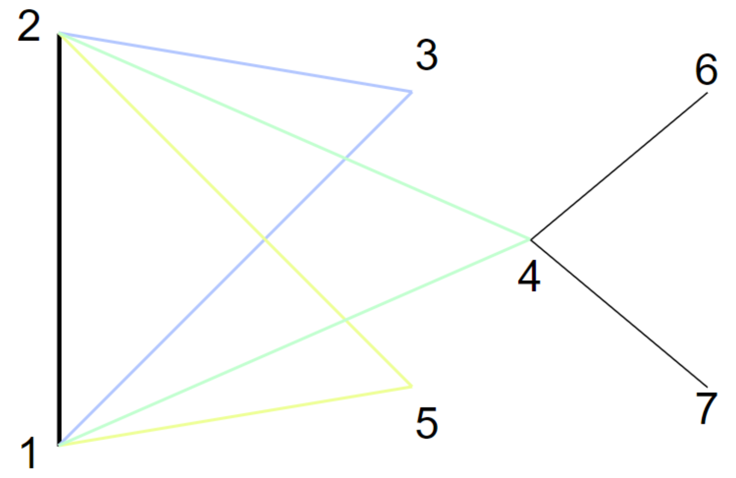
Задача 5

Нехай p – просте число і $G(V,E)$ – граф, в якому множину вершин можна описати $|V| > d(p-1)$. Доведіть існування непорожньої множини U вершин G такої, що кількість клік графа G, що мають хоча б d вершин в U, ділиться на p.

При проведенні доведення, визначаємо многочлени:

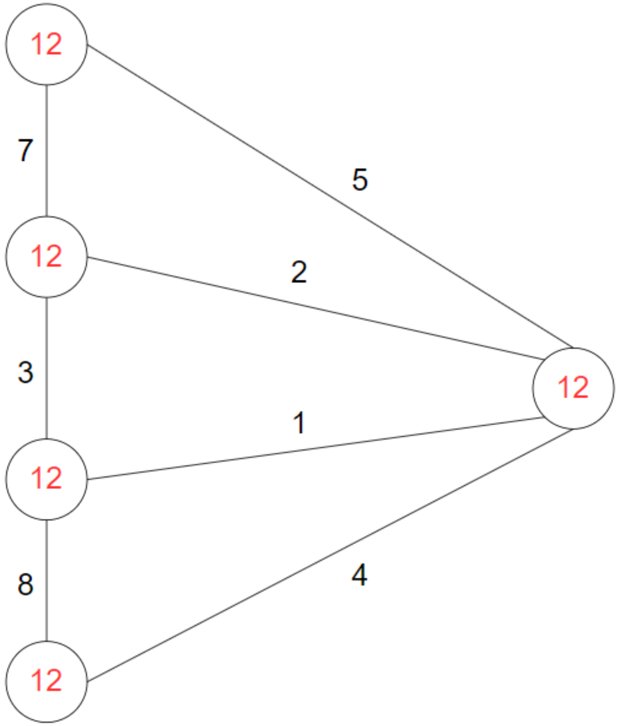
$$F = \prod_{v\in V}(1-x_v) - 1 + G,$$

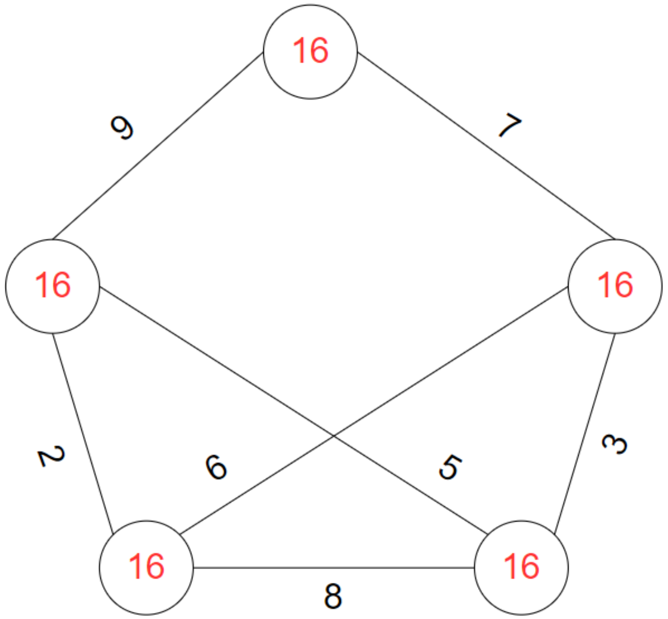
де $G = \left[\sum_{\emptyset\neq I\subset V}(-1)^{|I|+1}K(I)\prod_{i\in I}x_i\right]^{p-1}$

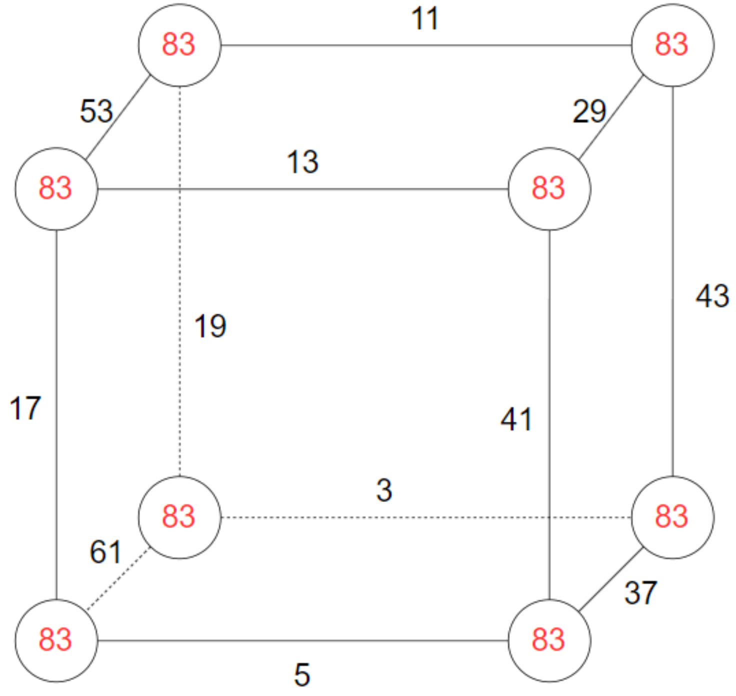


Магічна розмітка графів

Магічний граф – це вид графів, ребра якого позначені цілими додатними числами x_i так, що сума чисел на ребрах, інцидентній кожній вершині v_i для $i = \overline{1, n}$, є однаковою.







Магічна розмітка графів

Нехай $G = (V, E), |V(G)| = n$ – кількість вершин графу G, а $|E(G)| = m$ – кількість ребер у полі $\mathbb{Z}_p$, де $p \geq 3$ є простим числом. Оскільки $E = \{x_1, \ldots, x_m\}$, можемо записати формулу многочленів $f_t(x_1, \ldots, x_m)$:

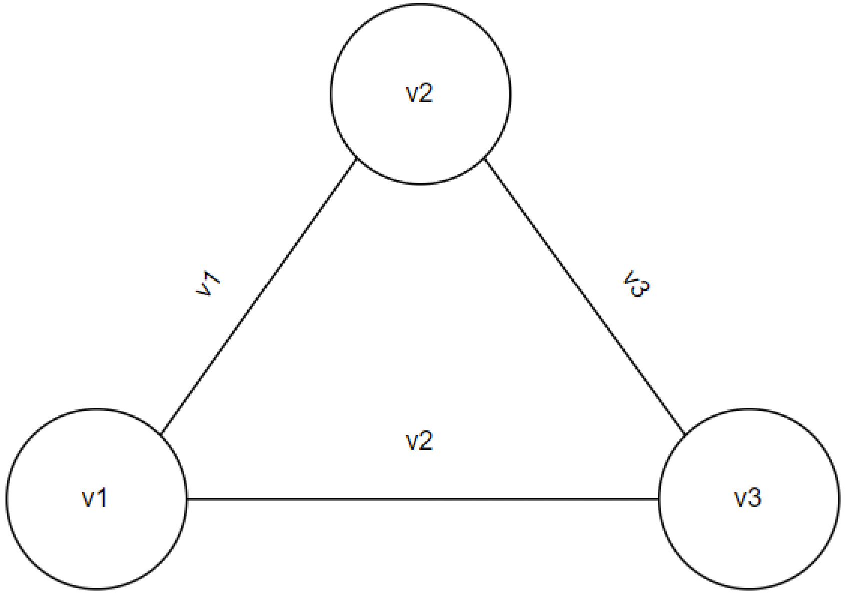
$$f_t(\hat{x}) = f_t(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{v \in V} (1 - (t - \sum_{v \in x_i} x_i)^{p-1})$$

Магічний граф G(3,3) в $\mathbb{Z}_3$

$$f_1(\hat{x}) = (1 - (1 - (x_1 + x_2))^2) \cdot (1 - (1 - (x_1 + x_3))^2) \cdot (1 - (1 - (x_2 + x_3))^2)$$

Варто зауважити, що $deg(f_1(\hat{x})) = 6$.

{-x1^4 x2^2, - 2 x1^3 x2^3, - x1^2 x2^4, - 2 x1^4 x2 x3
- 6 x1^3 x2^2 x3, - 6 x1^2 x2^3 x3, - 2 x1 x2^4 x3,
- x1^4 x3^2, - 6 x1^3 x2 x3^2, **- 10 x1^2 x2^2 x3^2**,
- 6 x1 x2^3 x3^2, - x2^4 x3^2, - 2 x1^3 x3^3,
- 6 x1^2 x2 x3^3, - 6 x1 x2^2 x3^3, - 2 x2^3 x3^3,
- x1^2 x3^4, - 2 x1 x2 x3^4, - x2^2 x3^4}

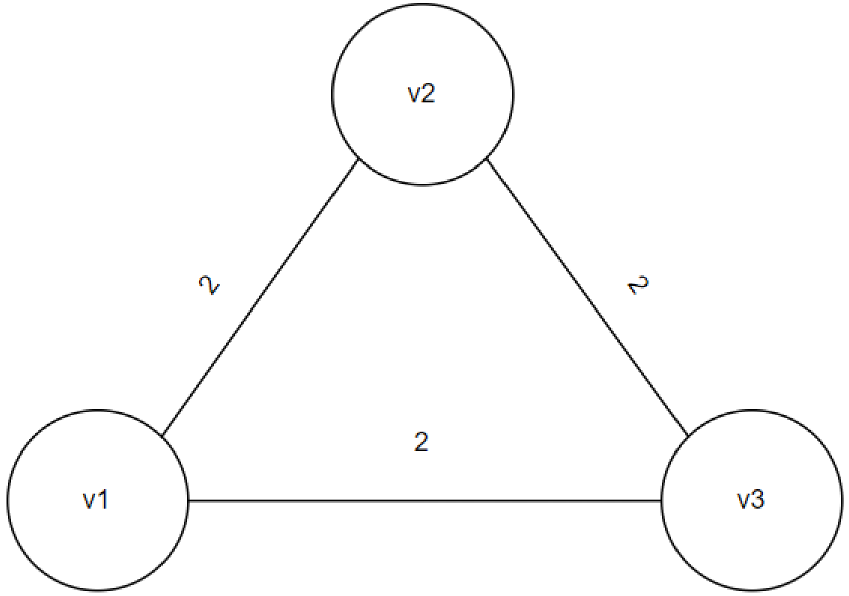


Приклад одночлена: $2x_1^2x_2^2x_3^2$

Магічний граф G(3,3) в $\mathbb{Z}_3$

$$f_1(\hat{x}) = (1 - (1 - (x_1 + x_2))^2) \cdot (1 - (1 - (x_1 + x_3))^2) \cdot (1 - (1 - (x_2 + x_3))^2)$$

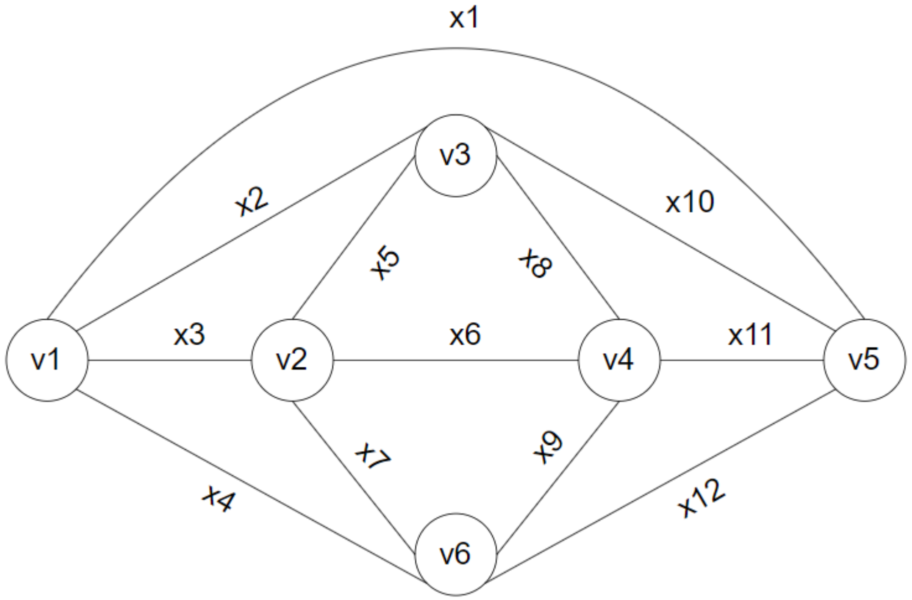
Маємо, що $S_i = \{1, 2\}$ для $i = 1, 2, 3$. Проте такі S_i не можуть існувати тому, що $|S_i| = 3$ для $i = 1, 2, 3$. Звідси, можемо зробити висновок про неможливість застосування Комбінаторної теореми про нулі до даного прикладу.

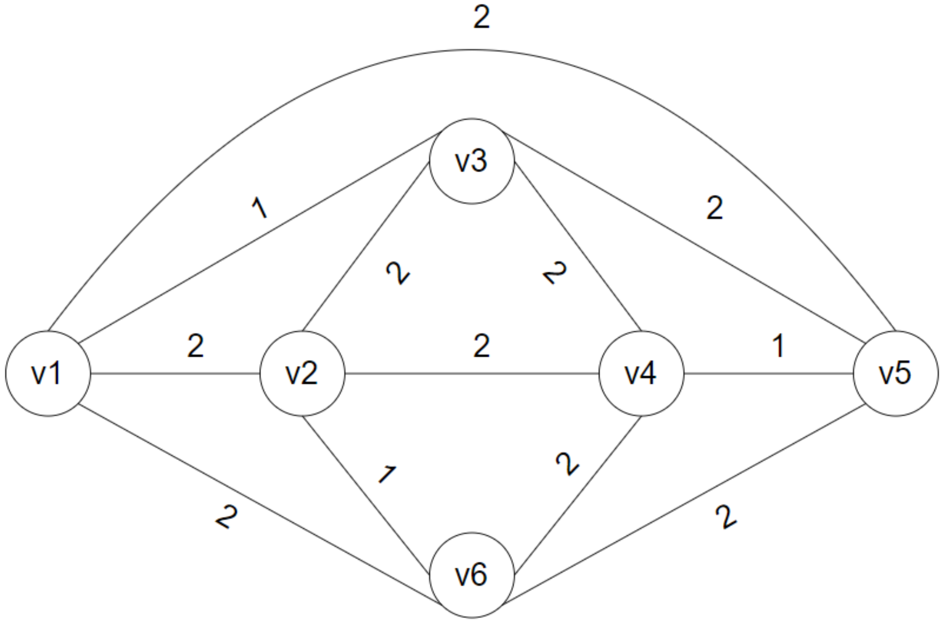


Приклад одночлена: $2x_1^2 x_2^2 x_3^2$

Магічний граф G(6,12) в $\mathbb{Z}_3$

$$f_1(\hat{x}) = (1-(0-(x_1+x_2+x_3+x_4))^2)\cdot(1-(1-(x_3+x_5+x_6+x_7))^2)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_2+x_5+x_8+x_{10}))^2)\cdot(1-(1-(x_6+x_8+x_9+x_{11}))^2)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_1+x_{10}+x_{11}+x_{12}))^2)\cdot(1-(1-(x_4+x_7+x_9+x_{12}))^2)$$

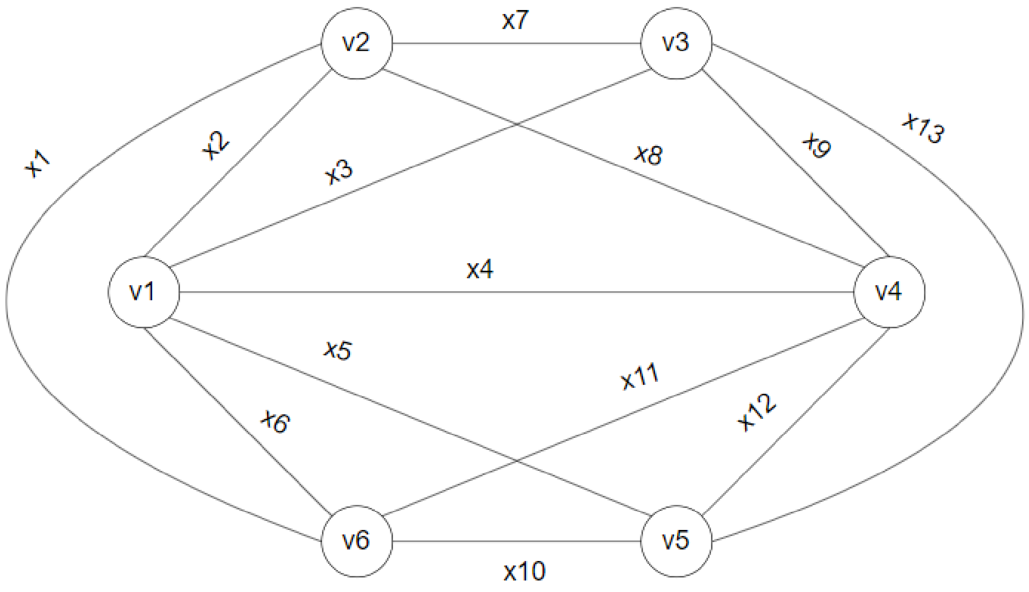


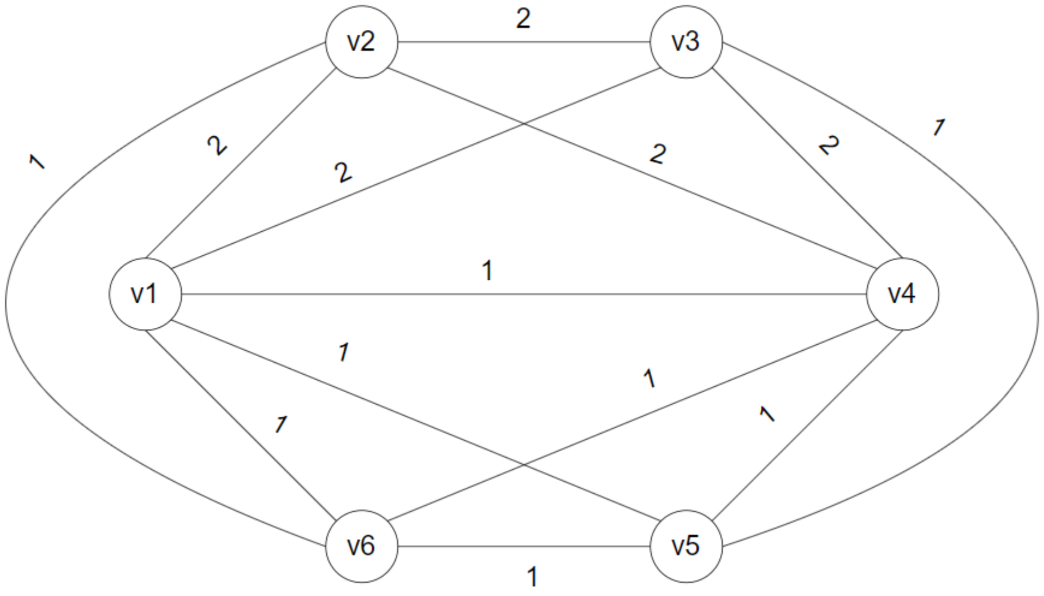


Приклад одночлена: $2x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}$

Магічний граф G(6,13) в $\mathbb{Z}_3$

$$f_1(\hat{x}) = (1-(1-(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6))^2)\cdot(1-(1-(x_1+x_2+x_7+x_8))^2)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_3+x_7+x_9+x_{13}))^2)\cdot(1-(1-(x_4+x_8+x_9+x_{11}+x_{12}))^2)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_5+x_{10}+x_{12}+x_{13}))^2)\cdot(1-(1-(x_1+x_6+x_{10}+x_{11}))^2)$$

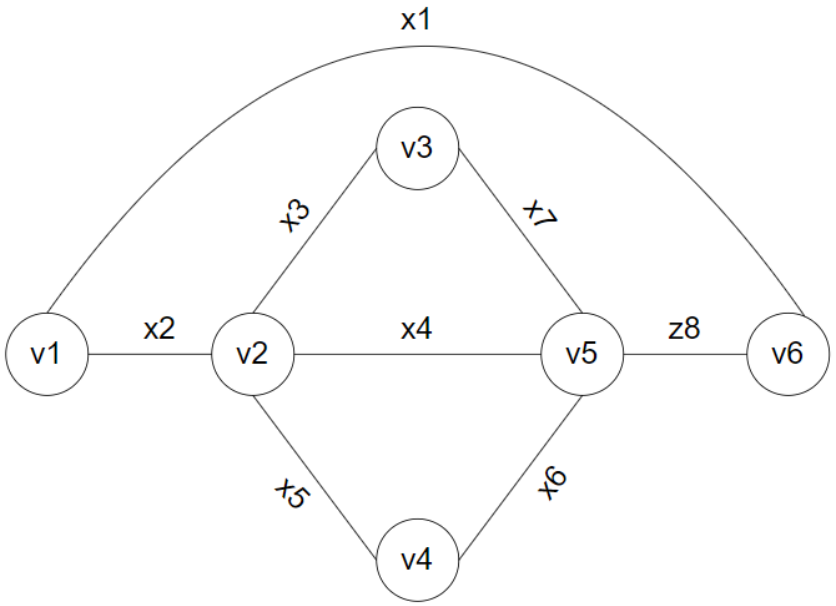


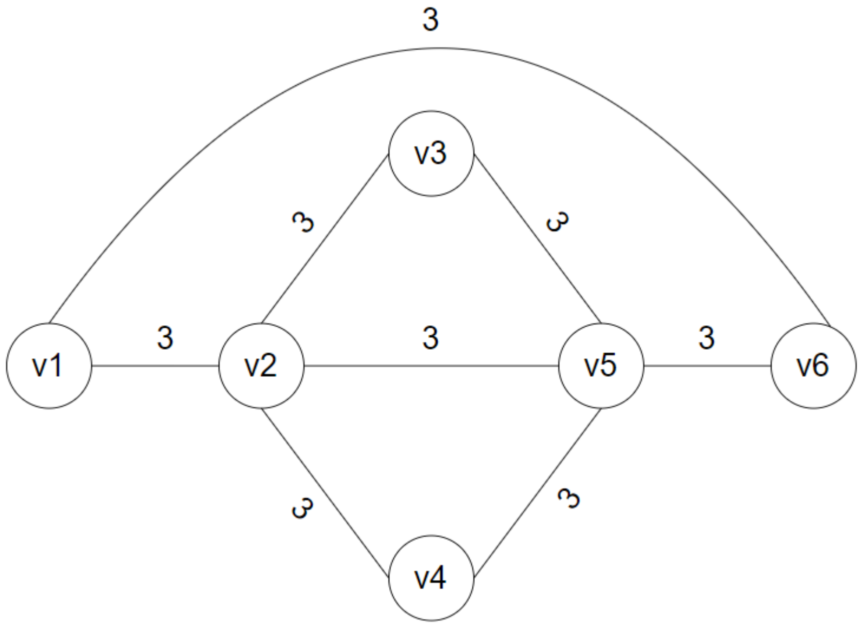


Приклад одночлена: $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{12}x_{13}$

Магічний граф G(6,8) в $\mathbb{Z}_5$

$$f_1(\hat{x}) = (1-(1-(x_1+x_2))^4)\cdot(1-(1-(x_2+x_3+x_4+x_5))^4)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_3+x_7))^4)\cdot(1-(1-(x_5+x_6))^4)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_4+x_6+x_7+x_8))^4)\cdot(1-(1-(x_1+x_8))^4)$$

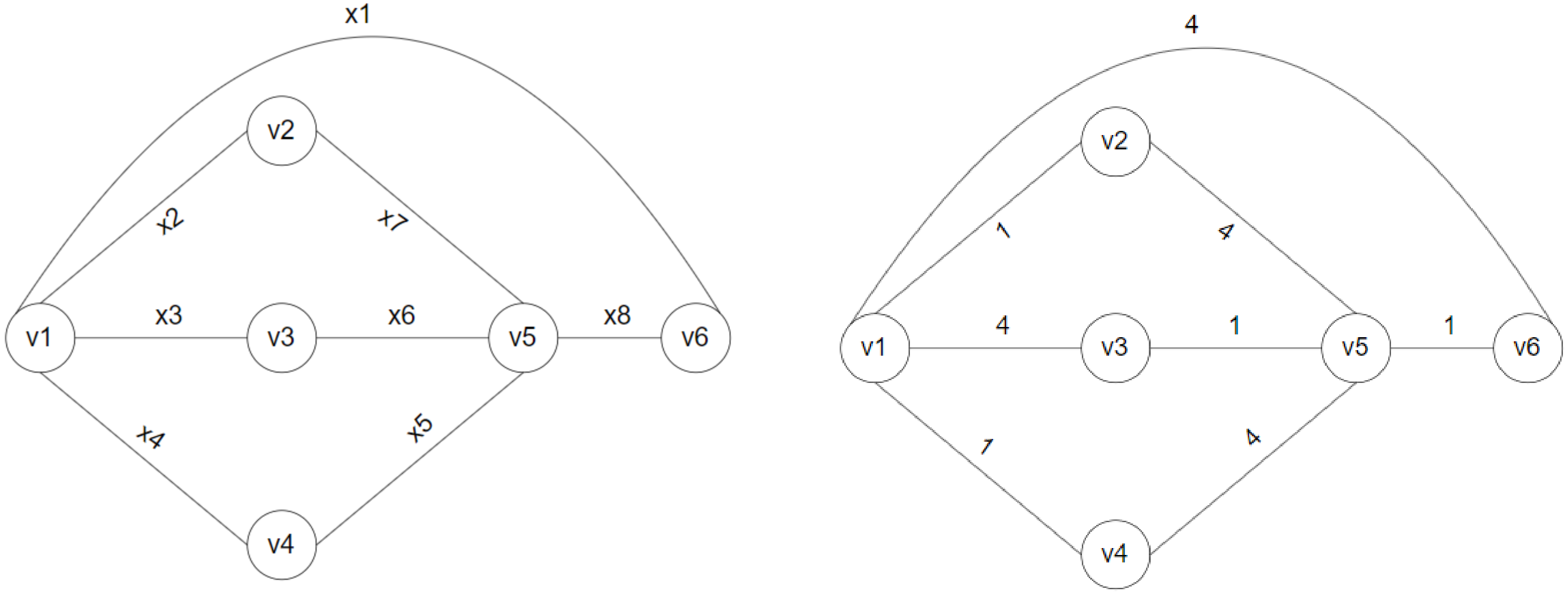




Приклад одночлена:$x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3x_5^3x_6^3x_7^3x_8^3$

Магічний граф G(6,8) в $\mathbb{Z}_5$

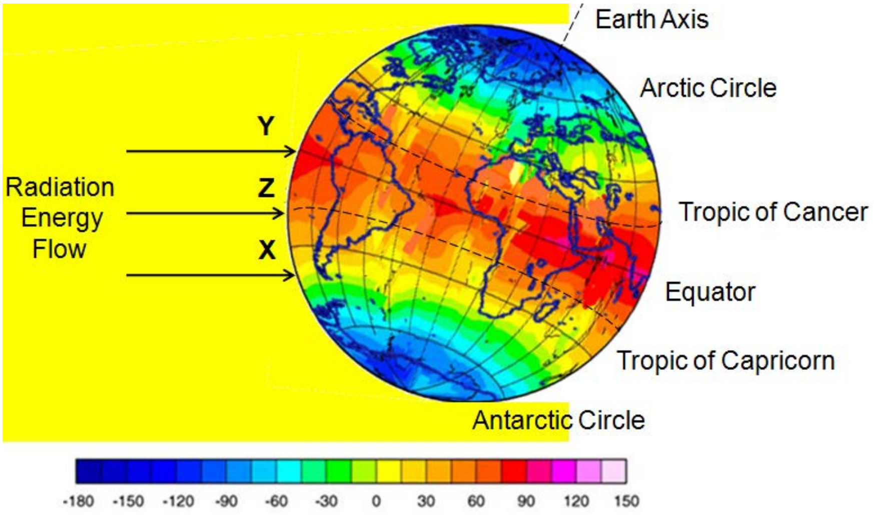
$$f_0(\hat{x}) = (1-(0-(x_1+x_2+x_3+x_4))^4)\cdot(1-(0-(x_2+x_7))^4)\cdot$$
$$\cdot(1-(0-(x_3+x_6))^4)\cdot(1-(0-(x_4+x_5))^4)\cdot$$
$$\cdot(1-(0-(x_5+x_6+x_7+x_8))^4)\cdot(1-(0-(x_1+x_8))^4)$$



Приклад одночлена:0

Прикладні застосування

- Застосування при доведенні багатьох теорем (Бухбергера, Стікельбергера, Акса-Гротендіка, Борсука-Улама)
- Coq – програмне забезпечення, дозволяючи записувати математичні теореми і їхні доведення, починаючи гіпотези
- Напіввизначене програмування – галузь, що використовується для оптимізації лінійних цільових функцій



Список літератури

1. Alon N. Combinatorial Nullstellensatz. Combinatorics, Probability and Computing. 1999. Vol. 8, no. 1-2.

2. Hilbert D. Ueber die vollen Invariantensysteme. Mathematische Annalen. 1893. Vol. 42.

3. Goel K., Patil D., Verma J. Nullstellensätze and Applications. 2022

4. Sturmfels B. Solving Systems of Polynomial Equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. 2002. Vol. 97

5. What is Coq

https://coq.inria.fr/

6. Gács A., Héger T., Nagy Z., Pálvölgyi D. Permutations, hyperplanes and polynomials over finite fields. 2010. Vol. 16

7. Akbari S., Daemi A., Hatami O., Javanmard A., Mehrabian A. Zero-Sum Flows in Regular Graphs. Graphs and Combinatorics. 2010. Vol. 26

Список літератури

8. Cox D., Little J., O’Shea D. Using algebraic geometry. 1998

9. Jukha S. External Combinatorics With Application in Computer Science Second Edition. 2001

10. Herstein I. N. Topics in Algebra Second Edition. 1975

11. Alon N. Additive Latin Transversals. Israel Journal of Mathematics. 2000. Vol. 117

12. Alon N., Füredi Z. Covering the Cube by Affine Hyperplanes, European Journal of Combinatorics. 1993. Vol. 14, no.2

13. Orlik P., Terao H. Arrangements of Hyperplanes. Springer Science & Business Media. 1992

14. Rosen Kenneth Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition. 2011

15. Magic graph

https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_graph

16. Lee S., Sun H., Wen I. On group magic graphs. J. Combin. Math. Combin. Comput. 2001

Дякую за увагу!