

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики



«ГРЕКИ» ДЛЯ АНАЛІЗУ ЧУТЛИВОСТІ ТА ПРОВЕДЕННЯ ХЕДЖУВАННЯ

**Текстова частина до курсової роботи
за спеціальністю 113 „Прикладна математика”**

Керівник курсової роботи
к.ф.-м.н., доц. Щестюк Н.Ю.

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконала
студентка 4 курсу
факультету інформатики
Ронська Д.Р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України
 НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
 Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
 Зав.кафедри математики,
 проф., д.ф-м.н.
 _____ Олійник Б.В.
 (підпис)
 „_____” _____ 2019 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
 на курсову роботу

студентки Ронської Дарини Романівни факультету інформатики 4-го курсу
 ТЕМА. «Греки» для аналізу чутливості та проведення хеджування.

Вихідні дані:

- розраховані ціни колл- та пут- опціонів на основі історичних даних корпорації Starbucks за моделлю ціноутворення Блека-Шоулза;
- розраховані основні «греки» (дельта, гамма, вега, тета та ро) для даних корпорації Starbucks, інтерпретація отриманих значень;
- реалізація дельта-хеджування цін акцій Starbucks за перші 25 тижнів 2020 року.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Зміст

Анотація

Вступ

1 Основні поняття: модель Блека-Шоулза

2 Греки

3 Розрахунок «греків» та дельта-хеджування для Starbucks

Висновки

Список використаних джерел

Додатки

Дата видачі „_____” _____ 2019 р.

Керівник
 _____ Щестюк Н.Ю.
 (підпис)

Завдання отримала
 _____ Ронська Д.Р.
 (підпис)

Тема: «Греки» для аналізу чутливості та проведення хеджування.

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	10.10.2019	
2.	Пошук та збір технічної літератури за темою роботи.	15.11. 2019	
3.	Огляд відповідних матеріалів та створення структури роботи.	25.11. 2019	
3.	Написання вступу та плану роботи.	30.12. 2019	
4.	Вивчення матеріалів на тему опціонів та їх типів, моделі ціноутворення Блека-Шоулза, написання першого розділу.	15.01. 2020	
5.	Вивчення основних типів «греків», написання другого розділу.	20.01. 2020	
6.	Збір та обробка наборів даних цін акцій та опціонів Starbucks.	21.01. 2020	
7.	Розрахунок колл- та пут-опціонів для даних Starbucks.	25.01. 2020	
8.	Розрахунок «греків» для даних Starbucks.	26.01. 2020	
9.	Проведення дельта-хеджування даних Starbucks.	27.01. 2020	
10.	Написання третього розділу: оформлення результатів розрахунків в пунктах 7-9.	25.03. 2020	
11.	Коректне оформлення роботи відповідно до вимог написання курсової роботи.	1.04. 2020	
12.	Створення презентації та написання доповіді для захисту роботи.	17.04. 2020	
13.	Подання та аналіз попередньої версії з керівником.	19.04. 2020	
14.	Корегування роботи згідно із зауваженнями керівника.	19.04. 2020	

Студент
Ронська Д.Р.

Керівник
Щестюк Н.Ю.

“ _____ ”

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	5
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. Основні поняття: модель Блека-Шоулза	7
1.1 Початкові припущення моделі Блека-Шоулза	7
1.2 Рівняння Блека-Шоулза	8
1.3 Ціни пут- так колл-опціонів за формулою Блека-Шоулза.....	9
РОЗДІЛ 2. Греки.....	11
2.1 Дельта	11
2.2 Гамма	11
2.3 Вега	12
2.4 Тета	12
2.5 Ро	12
2.6 Дельта хеджування	13
РОЗДІЛ 3. Розрахунок «греків» та дельта-хеджування для Starbucks	15
3.1 Розрахунок «греків» та аналіз чутливості (SBUX)	15
3.2 Дельта-хеджування (SBUX)	18
ВИСНОВКИ	20
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	21
ДОДАТОК А. Розрахунок «греків» та реалізація дельта-хеджування на Python	22

АНОТАЦІЯ

Опціон є нелінійним інструментом, вартість якого може сильно змінюватися в залежності від різних обставин. «Греки» опціону демонструють чутливість премії до зміни таких параметрів, як волатильність, час або вартість базового активу.

В даній роботі розглянуті основні «греки», їх формули та інтерпретація. Практична частина містить приклад аналізу чутливості за допомогою «греків» та дельта-хеджування історичних даних цін акцій та опціонів корпорації Starbucks.

ВСТУП

Фінансові установи, які продають опціони клієнтам в позабіржовому ринку стикаються з проблемою управління своїм ризиком. Якщо опціон є таким самим як і той, який торгуються на біржі, фінансова установа може нейтралізувати свою позицію, купуючи на біржі той же опціон, який вона продала. Але коли опціон був адаптований до потреб клієнта і не відповідає стандартизованим продуктам, що торгуються на біржах, хеджування впливу набагато складніше. У цій роботі представлені альтернативні підходи до цієї проблеми – аналіз чутливості та хеджування за допомогою «греків» (часткових похідних від моделі ціноутворення опціонів) . Кожен «грек» оцінює різні виміри ризику в опціоні і мета трейдера використати «греки», так щоб всі ризики були прийнятними. Аналіз, представлений у цій роботі, застосовується маркет-мейкерами опціонів на біржі, а також трейдерами, що працюють на позабіржовому ринку для фінансових установ. В роботі розглянуті «греки» європейських опціонів для моделі ціноутворення Блека-Шоулза.

Практична частина включає в себе аналіз чутливості опціонів корпорації Starbucks за допомогою «греків», їх розрахунок та інтерпретація отриманих результатів, а також приклад дельта-хеджування для тижневих даних Starbucks.

Метою роботи є дослідити використання «греків» для оцінки ризику на прикладі історичних даних цін акцій та опціонів Starbucks.

У першому розділі наведені основні поняття, необхідні для розуміння утворення «греків» - модель і рівняння Блека-Шоулза, розрахунок ціни колл-і пут-опціонів.

Другий розділ містить терміни та формули для «греків».

Третій розділ містить результати практичної реалізації оцінки чутливості з використанням «греків» та оцінки стратегії за допомогою дельта-хеджування на прикладі історичних даних Starbucks.

РОЗДІЛ 1. Основні поняття: модель Блека-Шоулза

1.1 Початкові припущення моделі Блека-Шоулза

До початкових припущень, на яких ґрунтується модель ціноутворення опціонів Блека-Шоулза, відносяться:

- 1) Відсутність арбітражу. Жоден з учасників ринку не може отримати прибуток за рахунок різниці цін на один і той самий актив на різних ринках. Іншими словами, ціна активу однакова на всіх ринках.
- 2) Безризикова процентна ставка. Будь-який учасник ринку може взяти в борг або позичити будь-яку суму в будь-який момент часу під безризикову процентну ставку.
- 3) Відсутність обмежень на торгівлю. У будь-який момент часу в учасників ринку є можливість купити або продати будь-яку кількість акцій, в тому числі дробову. Також не існує обмежень на короткий продаж.
- 4) Ціна активу змінюється випадковим чином. Спочатку передбачається, що курс акцій змінюється випадковим чином (підпорядковується закону нормального розподілу) зі сталим напрямком і волатильністю.
- 5) Відсутність дивідендів. Передбачається, що за акцією, що є базовим активом для опціону, не виплачуються дивіденди.
- 6) Нейтральність до ризику. Всі учасники ринку є нейтральними по відношенню до ризику, тобто приймають рішення на користь активу з максимальною прибутковістю не беручи при цьому до уваги фактор ризику. Іншими словами, якщо існує два активи з однаковою прибутковістю, але різним рівнем ризику, нейтральному до ризику інвестору буде байдуже який з них вибрати. При цьому, не схильний до ризику інвестор (англ. Risk Averse Investor) вибере актив з меншим ризиком, а схильний до ризику інвестор (англ. Risk Seeking Investor) зупиниться на активі з великим ризиком.

За умови виконання всіх цих припущень модель Блека-Шоулза показує, що існує можливість формування портфеля шляхом продажу колл-опціону і придбання акцій, вартість якого не буде залежати від курсу акцій.

З розвитком і доповненням моделі деякі з цих початкових припущень були виключені. В сучасних варіаціях моделі Блека-Шоулза враховується динамічна зміна процентних ставок, транзакційні витрати, податки і виплата дивідендів.

1.2 Рівняння Блека-Шоулза

Рівняння Блека-Шоулза є диференціальним рівнянням з частковими похідними (англ. Partial Differential Equation), яке описує ціну колл-опціону в часі. Головна ідея рівняння полягає в тому, що існує можливість ідеально хеджувати опціон, правильним способом купуючи і продаючи базовий актив, тобто усунути ризик. Таке хеджування, в свою чергу, передбачає, що існує тільки одна істинна ціна колл-опціону, яка розраховується за формулою Блека-Шоулза.

У загальному вигляді рівняння Блека-Шоулза може бути записане так:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

де V – ціна опціону як функція від часу і ціни базової акції;

t – час в роках (в цей момент дорівнює 0, але при закінченні терміну дії ціна опціону дорівнює T);

σ – волатильність прибутковості акції (середньоквадратичне відхилення прибутковості, розраховане за вибіркою цін акції за певний період);

S – ціна акції;

r – річна безризикова процентна ставка (безперервно нараховується).

З урахуванням початкових припущень моделі Блека-Шоулза, це диференціальне рівняння з частковими похідними підходить для будь-якого типу опціонів, поки його функція ціни (V) двічі диференційовна по S і один раз по t . Різні формули ціноутворення для різних опціонів виникають в

залежності від вибору функції виплати при закінченні терміну дії і відповідних граничних умов.

1.3 Ціни пут- так колл-опціонів за формулою Блека-Шоулза

Формула Блека-Шоулза дозволяє розрахувати ціну колл-опціону європейського типу. Вона виводиться з наведеного вище рівняння в результаті його рішення при відповідних граничних і граничних умовах.

Ціна колл-опціону $C(S_t, t)$ для базової акції, по якій не виплачуються дивіденди, розраховується за формулою:

$$C(S_t, t) = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-r(T-t)},$$

де S_t – спотова ціна базового актива в момент часу t ;

K – ціна виконання опціону (англ. Strike Price);

e – константа (число Ейлера), приблизно рівна 2,718281828;

r – річна безризикова процентна ставка;

$(T - t)$ – час до закінчення терміну дії опціону в роках.

$N(d_1)$ є ймовірністю того, що колл-опціон виявиться «у грошах», тобто спотова ціна базового активу на момент виконання T буде вище або дорівнювати страйку ($S_t \geq K$). У свою чергу $N(d_2)$ є ймовірністю того, що колл-опціон виявиться «поза грошей», тобто ($S_t < K$).

$N(x)$ є інтегральною функцією стандартного нормального розподілу (математичне сподівання дорівнює 0, середньоквадратичне відхилення дорівнює 1) виду:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Для розрахунку значення параметрів d_1 і d_2 використовується наступна формула:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}};$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

або

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t},$$

де σ – середньоквадратичне відхилення прибутковості базової акції.

Формула для розрахунку ціну відповідного пут-опціону виводиться з рівняння пут-кол парітета:

$$P(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} - S_t + C(S_t, t)$$

або

$$P(S_t, t) = N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S_t.$$

РОЗДІЛ 2. Греки

Так звані «греки» використовуються для оцінки чутливості вартості опціону до зміни одного з параметрів, в той час як інші параметри залишаються незмінними. Вони застосовуються трейдерами і фінансовими інститутами для оцінки і управління ризиками. У граничних умовах моделі Блека-Шоулза формули для розрахунку греків опціонів колл і пут європейського типу наведені нижче.

2.1 Дельта

Дельта (англ. Delta) вважається найбільш важливою з «греків», оскільки вона оцінює чутливість ціни опціону до зміни ціни базового активу:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Наприклад, якщо дельта опціону колл дорівнює 0,75, і ціна базової акції збільшується на \$1, то ціна цього опціону збільшиться на \$0,75.

Для розрахунку значення цього коефіцієнта використовуються наступні формули:

$$\begin{aligned}\Delta_{call} &= N(d_1), \\ \Delta_{put} &= -N(-d_1) = N(d_1) - 1.\end{aligned}$$

2.2 Гамма

Гамма (англ. Gamma) є першою похідною від дельти опціону і оцінює швидкість її зміни при зміні ціни базового активу на 1 пункт (зазвичай \$0,01):

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Наприклад, якщо гамма опціону дорівнює 2, то при зростанні ціни базового активу на 1 пункт, дельта опціону виросте на 2 пункти.

Виходячи з пут-колл паритету гамма однакова для опціону колл і відповідного опціону пут:

$$\Gamma_{call} = \Gamma_{put} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T - t}},$$

де $N'(x)$ – функція щільності ймовірності.

2.3 Вега

Вега (англ. Vega) використовується для оцінки чутливості ціни опціону до зміни середньоквадратичного відхилення прибутковості базового активу. Цей коефіцієнт показує на скільки зміниться ціна опціону при зміні середнього відхилення на 1%. Наприклад, якщо вега дорівнює 0,5, то при зміні середньоквадратичного відхилення з 11% до 12% ціна опціону виросте на \$0,5:

$$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Виходячи з пут-колл паритету вега однакова для опціону колл і відповідного опціону пут.

$$v_{call} = v_{put} = S_t N'(d_1) \sqrt{T - t}.$$

2.4 Тета

Тета (англ. Theta) є коефіцієнтом, який характеризує зміну ціни опціону в міру наближення дати його експірації. Наприклад, якщо тета опціону дорівнює 0,75, то на наступний день його ціна повинна знизитися на \$0,75:

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Для розрахунку тети опціону колл і відповідного опціону пут використовуються наступні формули:

$$\begin{aligned}\theta_{call} &= \frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T - t}} - r K e^{-r(T-t)} N(d_2), \\ \theta_{put} &= \frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T - t}} + r K e^{-r(T-t)} N(-d_2).\end{aligned}$$

2.5 Ро

Ро (англ. Rho) використовується як міра чутливості опціону до зміни безризикової процентної ставки, в якості якої зазвичай використовують ставку по Казначейським вексями США (англ. Treasury Bill, T-bill):

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Формула для її розрахунку виглядає наступним чином:

$$\rho_{call} = K(T - t)e^{-r(T-t)}N(d_2),$$

$$\rho_{put} = -K(T - t)e^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

2.6 Дельта хеджування

Дельта (Δ) опціону як швидкість зміни ціни опціону щодо ціни базового активу. Саме нахил кривої пов'язує ціну опціону з базовою ціною активів.

Припустимо, дельта опції виклику на акції дорівнює 0.6. Це означає, що коли ціна акцій змінюється на невелику суму, ціна опціону змінюється приблизно на 60% від цієї суми.

Припустимо, що ціна акцій становить \$100, а ціна опціону - \$10. Уявіть інвестора, який продав опціони колл, щоб придбати 2000 акцій (тобто продав 20 контрактів колл-опціонів).

Позицію інвестора можна було б захистити, купивши $0.6 * 2000 = 1200$ акцій. Тоді прибуток (збиток) на фондовій позиції буде, як правило, встановлювати збиток (прибуток) на опціонній позиції. Наприклад, якщо ціна акцій подорожчає на 1 долар (даючи приріст у розмірі 1200 доларів від придбаних акцій), ціна опціону, як правило, зростає на $0.6 * 1 = \$0.60$ (що призведе до втрати 1200 доларів від опціонів); якщо ціна акцій знизиться на 1 долар (що призведе до втрати 1200 доларів від придбаних акцій), ціна опціону буде знижуватися на 0.60 долара (даючи приріст у розмірі 1200 доларів за записаними опціонами).

У цьому прикладі дельта короткої позиції торговця у 2000 опціонів дорівнює

$$0.6 * (-2,000) = -1,200$$

Це означає, що торговець втрачає $1200\Delta S$ на позиції опціону, коли ціна акцій зростає на S . Дельта однієї акції становить 1,0, так що довга позиція розміром у 1,200 акцій має дельту +1,200. Отже, дельта загальної позиції торговця дорівнює нулю. Дельта положення акцій встановлює дельту положення опціону. Позиція з дельтою нуль називається *дельта-нейтральною*.

Важливо розуміти, що, оскільки дельта опціону не залишається постійною, позиція трейдера залишається дельта-хеджованою (або дельта-нейтральною)

лише порівняно короткий проміжок часу. Хеджування потрібно періодично коригувати. Це є відомим як балансування. В цьому прикладі до кінця 1 дня ціна акцій може зрости до 110 доларів. Як показано на рисунку 19.2, збільшення ціни акцій призводить до збільшення дельти. Припустимо, дельта зростає з 0,60 до 0,65. Після цього потрібно буде придбати додаткові $0.05 * 2000 = 100$ акцій для підтримки хеджування. Така процедура, як ця, коли хеджування коригується регулярно, називається динамічним хеджуванням. Це може протиставлятися статичному хеджуванню, коли хедж встановлюється спочатку і ніколи не коригується. Статичне хеджування іноді також називають "хеджуванням та забуттям".

РОЗДІЛ 3. Розрахунок «греків» та дельта-хеджування для Starbucks

3.1 Розрахунок «греків» та аналіз чутливості (SBUX)

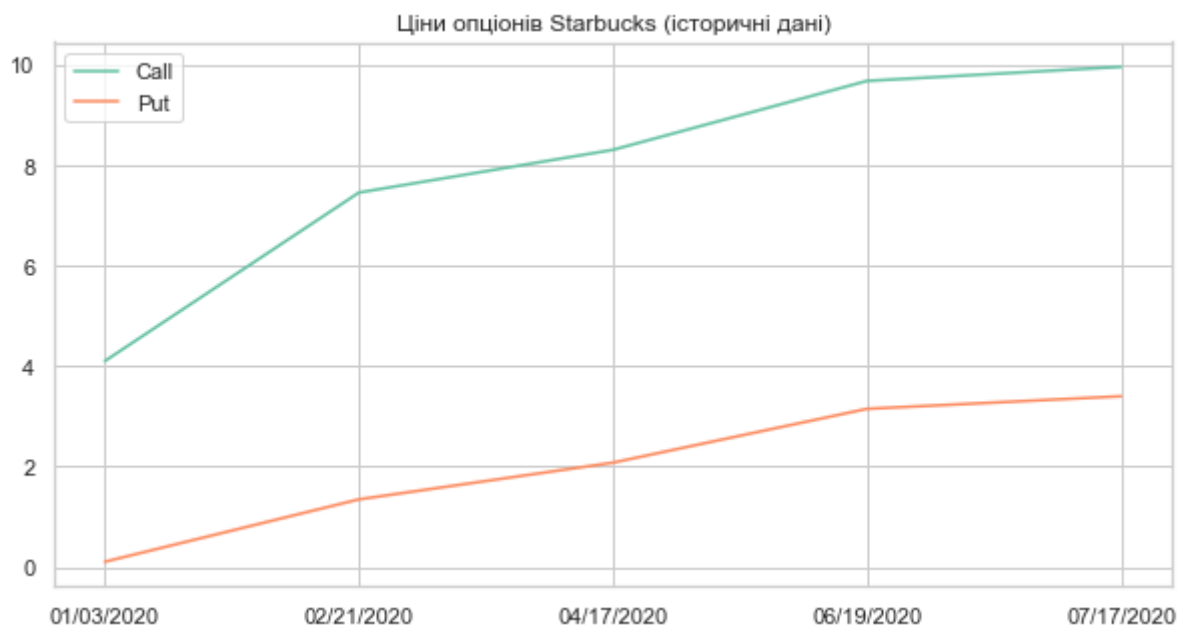
Для розрахунку «греків» візьмемо історичні данні з Nasdaq – ланцюг опціонів звичайних акцій корпорації Starbucks (англ. Starbucks Corporation Common Stock Option Chain) [7], а також історичні дані цін акцій за 01/02/19 - 12/10/19 [8]. З даних опціонів візьмемо 5 днів 2020 року. Для розрахунків використаємо значення на кінець дня (last) для відповідних пар колл- та пут-опціонів.

Маємо наступну таблицю (табл. 3.1.1) та графік (рис. 3.1.1) для колл- та пут-опціонів.

Таблиця 3.1.1

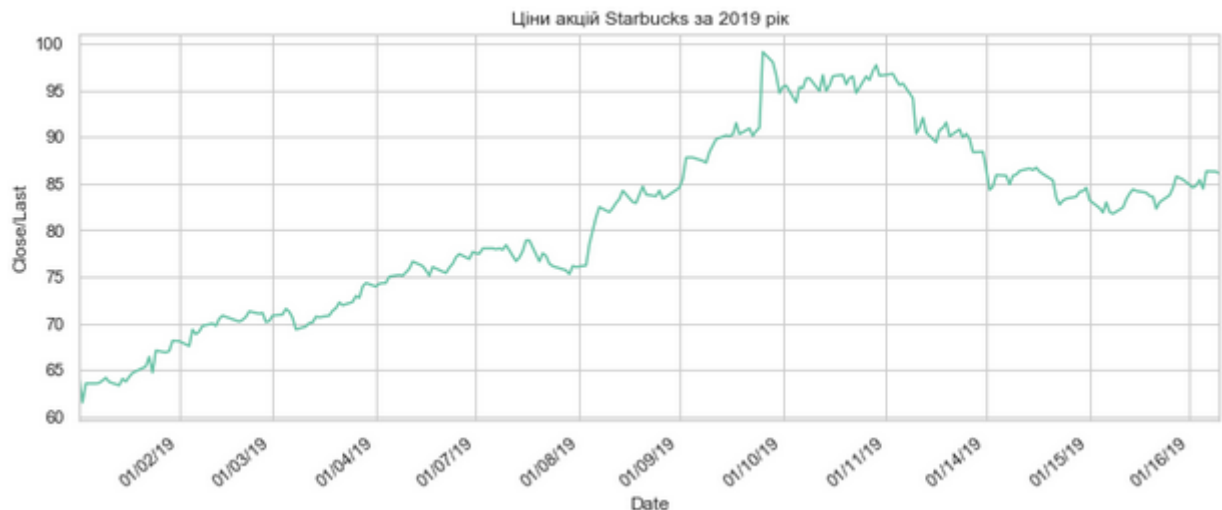
Date	Call	Put
01/03/2020	4.100000	0.110000
02/21/2020	7.450000	1.350000
04/17/2020	8.300000	2.080000
06/19/2020	9.670000	3.150000
07/17/2020	9.950000	3.400000

Рисунок 3.1.1



Та графік для цін акцій (рис. 3.1.2).

Рисунок 3.1.2



Обрахуємо за формулами необхідні для обчислень колл- та пут-опціонів значення за формулами наведеними у першому розділі.

Додатково зазначимо, що волатильність та процентна ставка були обчислені за формулами $\sigma^2 = \frac{Var(V)}{\Delta t}$ та $r = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$, де $\Delta t = 1/252$. Також, $T = \frac{n}{252}$, де n – порядковий номер дня робочого року.

За результатом обчислень маємо $\sigma = 0.195$, $r = 0.00008$.

$S = 86.3092$ (поточна ціна на 11.12.2019 17:19), тоді нехай страйк $K = 80$.

Скориставшись також формулами для d_1 і d_2 , маємо наступну таблицю (табл. 3.1.2).

Таблиця 3.1.2

Date	Call	Put	Day number	T	d1	d2
01/03/2020	4.100000	0.110000	2	0.007937	4.378146	4.360773
02/21/2020	7.450000	1.350000	37	0.146825	1.053390	0.978666
04/17/2020	8.300000	2.080000	77	0.305556	0.758322	0.650526
06/19/2020	9.670000	3.150000	122	0.484127	0.627577	0.491890
07/17/2020	9.950000	3.400000	142	0.563492	0.592058	0.445671

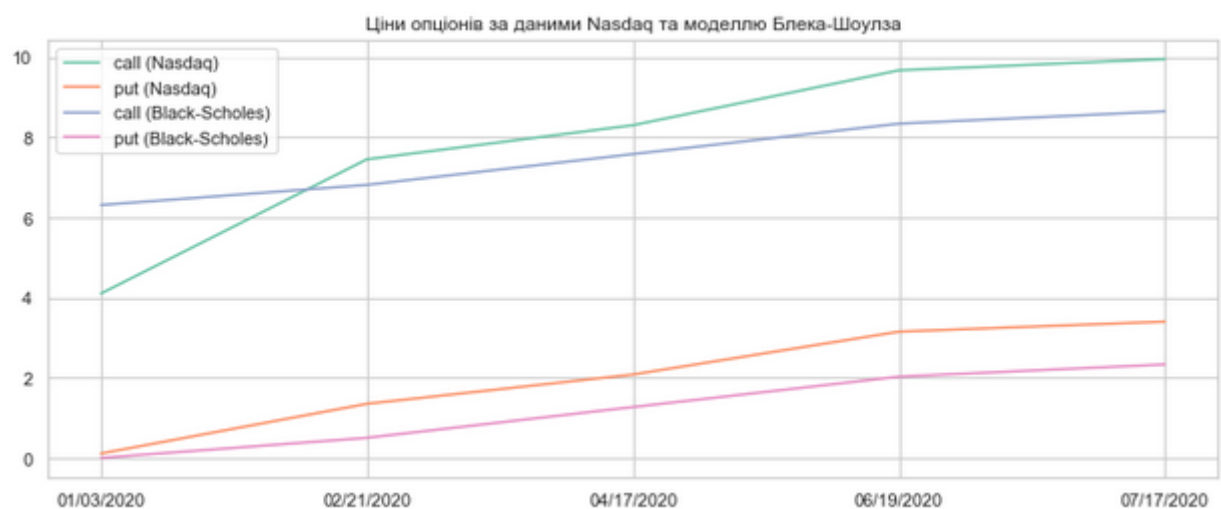
Розрахуємо за формулами наведеними у першому розділі ціни колл- та пут-опціонів (табл. 3.1.3).

Таблиця 3.1.3

Date	Call	Put	Day number	T	d1	d2	C_call	C_put
01/03/2020	4.100000	0.110000	2	0.00793	4.37814	4.36077	6.30925	0.00000
02/21/2020	7.450000	1.350000	37	0.14682	1.05339	0.97866	6.81163	0.50149
04/17/2020	8.300000	2.080000	77	0.30555	0.75832	0.65052	7.58035	1.26919
06/19/2020	9.670000	3.150000	122	0.48412	0.62757	0.49189	8.33915	2.02684
07/17/2020	9.950000	3.400000	142	0.56349	0.59205	0.44567	8.64549	2.33267

Нанесемо на графік історичні дані та отримані за моделлю Блека-Шоулза (рис. 3.1.3).

Рисунок 3.1.3



Розрахуємо за формулами, наведеними в другому розділі, «греки» для цих даних (табл. 3.1.4).

Таблиця 3.1.4

Дата	01/03/2020	02/21/2020	04/17/2020	06/19/2020	07/17/2020
Δ_{call}	0.999994	0.853919	0.775871	0.734860	0.723094
Δ_{put}	-0.000006	-0.146081	-0.224129	-0.265140	-0.276906
v	0.000211	7.575558	14.277142	19.675360	21.691719
Θ_{call}	-0.009018	-5.036219	-4.560717	-3.967123	-3.757795
Θ_{put}	-0.002593	-5.029794	-4.554293	-3.960698	-3.751371
ρ_{call}	0.634916	9.821065	18.145245	26.668613	30.295681
ρ_{put}	-0.000004	-1.924829	-6.298599	-12.060040	-14.781644
Γ	0.000018	0.035517	0.032165	0.027976	0.026499

Станом на 07/17/2020 можемо зробити такі висновки за кожним із «греків»:

- Δ . Зі збільшенням цін на акції на \$1 ціна колл-опціону збільшиться на \$0.72, а пут-опціону зменшиться на \$0.27;
- v . При зміні середньоквадратичного відхилення на 1% ціна опціонів виросте на \$21.69;
- Θ . Наступного дня ціна колл- та пут-опціонів повинна збільшитися на \$3.75.
- ρ . Якщо процентна ставка зміниться на 1%, то ціна колл-опціону збільшиться на \$30.29, а пут-опціону зменшиться на \$14.78.
- Γ . При збільшенні ціни акцій на \$1 Δ опціонів виросте приблизно на \$0.02.

3.2 Дельта-хеджування (SBUX)

Для прикладу дельта-хеджування використаємо історичні дані цін акцій Starbucks [8], а саме дані за перші 25 п'ятниць 2020 року.

Нехай необхідною кількістю акцій є $n = 100\,000$, а страйк $K = 65$.

Порахуємо Δ для цих 25 записів. Початкове значення Δ дорівнює 0.15036.

Це означає, що початкове значення Δ опціону $100\,000 * 0.15036 = 15\,036$.

Необхідно купити 15 036 акцій за ціною \$63.57 необхідно \$956 156.37, і це є дельта нейтральною позицією.

Другого тижня ціна акцій зростає до \$63.73. Δ зростає до 0.29098, тобто нова дельта позиція опціону 29 098. Це означає, що необхідно придати 14 061 акцій для того, щоб зберегти дельта нейтральну позицію. Стратегія реалізує \$896107.53 в кеш, і кумулятивні витрати становлять \$1,851,946.05.

Аналогічно продовжимо для всіх 25 тижнів (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Date	Close	Time to maturity	Delta call	Delta put	Shares purchased	Cost of shares purchased	Cumulative cost with interest	Interest cost
1/4/2019	63.57	0.0119	0.15037	-0.84963	15036	955,838.52	955,838.52	1.523
1/11/2019	63.73	0.03175	0.29098	-0.70902	14061	896,107.53	1,851,946.05	2.95082
1/18/2019	64.7	0.05159	0.46721	-0.53279	17622	1,140,143.40	2,992,089.45	4.76748
1/25/2019	67.09	0.07143	0.73673	-0.26327	26952	1,808,209.68	4,800,299.13	7.64861
2/1/2019	68.11	0.09127	0.79468	-0.20532	5795	394,697.45	5,194,996.58	8.27751
2/8/2019	69.75	0.11111	0.86812	-0.13188	7343	512,174.25	5,707,170.83	9.09359
2/15/2019	70.71	0.13095	0.89036	-0.10964	2224	157,259.04	5,864,429.87	9.34416
2/22/2019	71.3	0.15079	0.89607	-0.10393	571	40,712.30	5,905,142.17	9.40903
3/1/2019	70.85	0.17063	0.86652	-0.13348	-2955	-209,361.75	5,695,780.42	9.07544
3/8/2019	69.36	0.19048	0.7897	-0.2103	-7681	-532,754.16	5,163,026.26	8.22657
3/15/2019	70.67	0.21032	0.83643	-0.16357	4672	330,170.24	5,493,196.50	8.75265
3/22/2019	71.96	0.23016	0.87162	-0.12838	3519	253,227.24	5,746,423.74	9.15613
3/29/2019	74.34	0.25	0.92303	-0.07697	5140	382,107.60	6,128,531.34	9.76496
4/5/2019	75.03	0.26984	0.92884	-0.07116	581	43,592.43	6,172,123.77	9.83442
4/12/2019	76.65	0.28968	0.94773	-0.05227	1888	144,715.20	6,316,838.97	10.06501
4/26/2019	77.45	0.32937	0.94758	-0.05242	-15	-1,161.75	6,315,677.22	10.06316
5/3/2019	78.05	0.34921	0.95005	-0.04995	246	19,200.30	6,334,877.52	10.09375
5/10/2019	78.42	0.36905	0.94987	-0.05013	-17	-1,333.14	6,333,544.38	10.09162
5/17/2019	78.91	0.38889	0.95108	-0.04892	121	9,548.11	6,343,092.49	10.10684
5/24/2019	76.15	0.40873	0.9086	-0.0914	-4247	-323,409.05	6,019,683.44	9.59153
5/31/2019	76.06	0.42857	0.90229	-0.09771	-631	-47,993.86	5,971,689.58	9.51506
6/7/2019	82.48	0.44841	0.97056	-0.02944	6827	563,090.96	6,534,780.54	10.41227
6/14/2019	84.24	0.46825	0.97777	-0.02223	720	60,652.80	6,595,433.34	10.50891
6/21/2019	83.82	0.4881	0.97348	-0.02652	-429	-35,958.78	6,559,474.56	10.45161
6/28/2019	83.83	0.50794	0.97128	-0.02872	-219	-18,358.77	6,541,115.79	10.42236

Ближче до 25 тижня, можна побачити, що хеджер має майже повністю покрити позицію. Хеджер отримує \$6 541 279.48 за утриманні акції, а загальні витрати становлять \$1 170 331.26.

ВИСНОВКИ

Спроба передбачити, що відбудеться з ціною одного варіанта чи позиції, що передбачає кілька варіантів, оскільки зміни на ринку можуть бути складним завданням. Оскільки ціна опціону не завжди рухається разом із ціною базового активу, важливо зрозуміти, які фактори сприяють руху ціни опціону та ефекту, який вони мають.

«Греки» охоплюють багато змінних. До них відносяться дельта, тета, гамма, вега та ро. Кожна з цих змінних / греків показує число, і це число повідомляє торговцям щось про те, як змінюється опціон або ризик, пов'язаний з цим опціоном. Первинні греки (Дельта, Вега, Тета та Ро) обчислюються як перша часткова похідна від моделі ціноутворення опціонів (наприклад, модель Блек-Шоулса), а вторинні (Гамма) як друга часткова похідна.

Число або значення, обчислені за формулами «греків», змінюються з часом. Тому трейдери опціонами можуть щодня обчислювати ці значення, щоб оцінити будь-які зміни, які можуть вплинути на їх позицію чи прогноз, або перевірити, чи потрібно їм збалансувати портфель.

Дельта-хеджування - це стратегія торгівлі опціонами, яка спрямована на зменшення або хеджування спрямованого ризику, пов'язаного з рухом цін на базовому активі. Підхід використовує варіанти для компенсації ризику або для одного опціону, або для всього портфеля акцій. Інвестор намагається досягти дельта-нейтрального стану і не мати спрямованого зміщення в хеджуванні. Дельта-хеджування прагне бути нейтрально спрямованою, встановлюючи зміщення довгих і коротких позицій. Зменшуючи спрямований ризик, дельта-хеджування може допомогти уникнути наслідків зміни волатильності для торговця опціонами.

Одним з недоліків дельта-хеджування є необхідність постійного спостереження та коригування займаних позицій. Це також може призвести до торгових витрат, оскільки дельта-хеджування додаються та видаляються в міру зміни основної ціни.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Hayes A. Greeks [Електронний ресурс] / Adam Hayes – Режим доступу до ресурсу: <https://www.investopedia.com/terms/g/greeks.asp>.
2. Chen J. Delta Hedging [Електронний ресурс] / James Chen – Режим доступу до ресурсу:
<https://www.investopedia.com/terms/d/deltahedging.asp>.
3. Hall M. Using the "Greeks" to Understand Options [Електронний ресурс] / Mary Hall – Режим доступу до ресурсу:
<https://www.investopedia.com/trading/using-the-greeks-to-understand-options/>.
4. Hull J. The Greek letters / John Hull // Options, futures, and other derivatives / John Hull., 2015. – (Ninth edition). – С. 399–430.
5. Модель Блэка-Шоулза [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://allfi.biz/model-bljeka-shoulza/>.
6. Paolucci R. Black-Scholes Algorithmic Delta Hedging [Електронний ресурс] / Roman Paolucci – Режим доступу до ресурсу:
<https://medium.com/swlh/black-scholes-algorithmic-delta-hedging-c2cdd42ce175>.
7. Starbucks Corporation Common Stock (SBUX) Option Chain [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу:
<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/sbux/option-chain>.
8. Starbucks Corporation Common Stock (SBUX) Historical Data [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу:
<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/sbux/historical>.

ДОДАТОК А. Розрахунок «греків» та реалізація дельта-хеджування на Python

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

# In[1]:

import pandas as pd
import numpy as np
import datetime as dt
import statsmodels.api as sm
import scipy.stats as stats
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# In[2]:

sns.set(style='whitegrid', palette='Set2')

# In[3]:

pd.options.display.float_format = '{:,.6f}'.format

# In[4]:

df_hist = pd.read_csv(
    'SbuxHistoricalQuotes.csv',
    #     delimiter='\t',
    parse_dates = ['Date'],
    thousands = ',',
)

# In[5]:

df_hist.head()

# In[6]:

df_hist.columns = [col.strip() for col in df_hist.columns]

# In[8]:

for col in ['Close/Last', 'Open', 'High', 'Low']:
    df_hist[col] = df_hist[col].str.strip('$').astype(float)

# In[9]:

df_hist = df_hist.set_index('Date').sort_index()

# In[10]:
```

```

df_hist.head()

# In[11]:

df_hist.info()

# ## 1. Estimation of Starbucks' stock over 01/02/19 - 12/10/19

# In[12]:

fig, ax = plt.subplots(figsize=(13,5))
df_hist['Close/Last'].plot()
ax.set_xticklabels([x.strftime("%D") for x in df_hist.index.tolist()], rotation=40)
ax.set_ylabel('Close/Last');
# ax.set_ylim(0, 100)
ax.set_title('Ціни акцій Starbucks за 2019 рік')

# In[13]:

df_hist['Close/Last'][df_hist['Close/Last'] == df_hist['Close/Last'].min()]

# In[14]:

df_hist['Close/Last'][df_hist['Close/Last'] == df_hist['Close/Last'].max()]

# In[15]:

print(df_hist.index.min().strftime("%D"), '-', df_hist.index.max().strftime("%D"))

# ## 2. Log-returns calculations

# In[16]:

h = np.log(df_hist['Close/Last'] / df_hist['Close/Last'].shift(1))
h.plot();
plt.ylabel('log returns');

# In[17]:

h.head(30)

# ## 3. Calculation of Sample Mean and Sample Variance

# In[18]:

n = h.shape[0]
mu = h.sum() / n
s_2 = ((h - mu) ** 2).sum() / (n - 1)

# In[19]:

```

```

mu

# In[20]:

s_2

# ## 4. Calculate annual average volatility:

# In[21]:

delta_t = 1. / 252
avg_volat = np.sqrt(s_2 / delta_t)
avg_volat

# ## 5. Examination of the log returns for normality

# In[22]:

h.hist()

# In[23]:

sm.qqplot(h)
plt.show()

# In[24]:

alpha = 0.05
if stats.kstest(h[h.notna()], 'norm')[1] > alpha:
    print(f'pvalue > {alpha}. normal')
else:
    print(f'pvalue <= {alpha}. not normal')

# In[25]:

stats.kstest(h[h.notna()], 'norm')

# ## 6. Building the tree

# In[26]:

U = np.exp(np.sqrt(delta_t))
D = 1 / U

# In[27]:

U

# In[28]:

D

```



```

# In[29]:

def build_tree_day(s0, u, d, n):
    stage = [s0 * (d**k) * (u**(n-k)) for k in range(n+1)]
    return np.array(stage)

# In[30]:

def build_tree(s0, u, d, n):
    tree = [build_tree_day(s0, u, d, k) for k in range(n+1)]
    return np.array(tree)

# In[31]:

S0 = df_hist['Close/Last'].iloc[0]
assert(S0 == build_tree_day(S0, U, D, 0))

# In[32]:

n = 9
df_tree = pd.DataFrame(columns = range(n))

# In[33]:

tree = dict(enumerate(build_tree(S0, U, D, n)))

# In[34]:

df_tree = pd.DataFrame(dict([ (k,pd.Series(v)) for k,v in tree.items() ]))

# In[35]:

df_tree

# In[36]:

for i in range(n+1):
    plt.scatter([i+1 for _ in range(n+1)], df_tree[i])
plt.xlabel('Days')

# ## 7. European put and call option prices in a case of the Black Scholes model

# In[37]:

# strike - 80
K = 80

# https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/sbox/option-chain
option_chain = {
    # date : ({call, put})
    '01/03/2020': {'Call': 4.1, 'Put': 0.11},
    '02/21/2020': {'Call': 7.45, 'Put': 1.35},

```

```

    '04/17/2020': {'Call': 8.3, 'Put': 2.08},
    '06/19/2020': {'Call': 9.67, 'Put': 3.15},
    '07/17/2020': {'Call': 9.95, 'Put': 3.4}
}

# In[38]:

def parse_date(date_str, date_format = '%m/%d/%Y'):
    return dt.datetime.strptime(date_str, date_format).date()

# In[39]:

option_chain = pd.DataFrame(option_chain).T
option_chain.index.name = 'Date'

# In[40]:

option_chain

# In[41]:

option_chain['n_workday'] = option_chain.index.map(
    lambda x: np.busday_count(parse_date('01/01/2020'), parse_date(x)))
option_chain['T'] = option_chain['n_workday'] / 252.

# In[42]:

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(option_chain.index, option_chain['Call'], label='Call')
plt.plot(option_chain.index, option_chain['Put'], label='Put')
plt.legend()
plt.title('Ціни опціонів Starbucks (історичні дані)')

# In[43]:

R = (mu + (avg_volat**2) / 2) / 252.
print('{:,.8f}'.format(R))

# In[44]:

def get_d1(S, K, r, sigma, T):
    return (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

def get_d2(S, K, r, sigma, T):
    return (np.log(S / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

def get_black_scholes(S, K, T, r, sigma, option = 'call'):
    #S: spot price
    #K: strike price
    #T: time to maturity
    #r: interest rate
    #sigma: volatility of underlying asset

    d1 = get_d1(S, K, r, sigma, T)
    d2 = get_d2(S, K, r, sigma, T)

```

```

    if option == 'call':
        result = S * stats.norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * stats.norm.cdf(d2)
    if option == 'put':
        result = K * np.exp(-r * T) * stats.norm.cdf(-d2) - S * stats.norm.cdf(-d1)

    return result

# In[45]:

S = 86.3092 # current price 11.12.2019 17:19

# In[46]:

option_chain['d1'] = option_chain['T'].apply(lambda T: get_d1(S, K, R, avg_volat, T))
option_chain['d2'] = option_chain['T'].apply(lambda T: get_d2(S, K, R, avg_volat, T))

# option_chain['delta_d1'] = option_chain['d1'].apply(lambda d: get_cdf(d))
# option_chain['delta_d2'] = option_chain['d2'].apply(lambda d: get_cdf(d))

# In[47]:

option_chain

# In[48]:

option_chain['C_call'] = option_chain['T'].apply(lambda T: get_black_scholes(S, K, T,
R, avg_volat, 'call'))
option_chain['C_put'] = option_chain['T'].apply(lambda T: get_black_scholes(S, K, T,
R, avg_volat, 'put'))

# In[49]:

option_chain

# In[50]:

plt.figure(figsize=(13,5))
plt.plot(option_chain.index, option_chain['Call'], label='call (Nasdaq)')
plt.plot(option_chain.index, option_chain['Put'], label='put (Nasdaq)')

plt.plot(option_chain.index, option_chain['C_call'], label='call (Black-Scholes)')
plt.plot(option_chain.index, option_chain['C_put'], label='put (Black-Scholes)')
plt.title('Ціни опціонів за даними Nasdaq та моделлю Блека-Шоулза')
plt.legend()

# ## 8. Greeks

# In[52]:

# option type: 1 if call, -1 if put
def delta(d1, option_type):
    return option_type * stats.norm.cdf(option_type*d1)

def vega(d1, S, T):
    return S * stats.norm.pdf(d1) * np.sqrt(T)

```

```

def theta(S, r, T, K, sigma, d1, d2, option_type):
    pdf = stats.norm.pdf(d1)
    cdf = stats.norm.cdf(option_type*d2)
    a = 0.5 * S * pdf * sigma / np.sqrt(T)
    b = r * K * np.e**(-r*T) * cdf
    return -a-option_type*b

def rho(r, T, K, d2, option_type):
    coef = np.exp(-r * T)
    return option_type*K * T * coef * stats.norm.cdf(option_type*d2)

def gamma(T, d1, S, sigma):
    pdf = stats.norm.pdf(d1)
    b = S*sigma*np.sqrt(T)
    return pdf/b

# In[53]:

option_chain['delta_call'] = option_chain.apply(
    lambda row: delta(row['d1'], 1), axis=1)
option_chain['delta_put'] = option_chain.apply(
    lambda row: delta(row['d1'], -1), axis=1)

# In[54]:

option_chain['vega'] = option_chain.apply(
    lambda row: vega(row['d1'], S, row['T']), axis=1)

# In[55]:

option_chain['theta_call'] = option_chain.apply(
    lambda row: theta(S, R, row['T'], K, avg_volat, row['d1'], row['d2'], 1), axis=1)
option_chain['theta_put'] = option_chain.apply(
    lambda row: theta(S, R, row['T'], K, avg_volat, row['d1'], row['d2'], -1), axis=1)

# In[56]:

option_chain['rho_call'] = option_chain.apply(
    lambda row: rho(R, row['T'], K, row['d2'], 1), axis=1)
option_chain['rho_put'] = option_chain.apply(
    lambda row: rho(R, row['T'], K, row['d2'], -1), axis=1)

# In[57]:

option_chain['gamma'] = option_chain.apply(
    lambda row: gamma(row['T'], row['d1'], S, avg_volat), axis=1)

# In[58]:

greeks = ['delta_call', 'delta_put', 'vega', 'theta_call', 'theta_put', 'rho_call',
          'rho_put', 'gamma']

# In[59]:

option_chain[greeks].T

```

```

# In[60]:

option_chain

# ## 9. Delta Hedging

# In[135]:

df_hedg = df_hist[['Close/Last']][df_hist.index.weekday == 4].iloc[:25].copy()
df_hedg.rename(columns = {'Close/Last' : 'Close'}, inplace=True)
df_hedg.index = df_hedg.index.astype(str)

# In[136]:

df_hedg

# In[137]:

df_hedg['n_workday'] = df_hedg.index.map(
    lambda x: np.busday_count(parse_date('01/01/2019'), parse_date(x, '%Y-%m-%d')))
df_hedg['Time to maturity'] = df_hedg['n_workday'] / 252.

del df_hedg['n_workday']

# In[138]:

r_weekly = R * (5 / 252.)
# r_weekly = R * 5
n = 10**5
premium = 10**5
S = df_hedg['Close'].iloc[-1]
K=65

# In[139]:

df_hedg['Delta call'] = df_hedg.apply(
    lambda row : delta(
        get_d1(row['Close'], K, r_weekly, avg_volat, row['Time to maturity']),1),
    axis=1)
df_hedg['Delta put'] = df_hedg['Delta call'] - 1

# In[140]:

# df_hedg['shares_purchased']=df_hedg.apply(
#     lambda x: int(n*x['delta_call']) if np.isnan(x['delta_call_diff']) else
#     int(n*x['delta_call_diff']),axis=1)

delta_call_diff = df_hedg['Delta call'].diff()
df_hedg['Shares purchased'] = np.where(
    delta_call_diff.isna(),
    n*df_hedg['Delta call'],
    n*delta_call_diff
).astype(int)

```

```

# In[141]:

df_hedg['Cost of shares purchased']=df_hedg['Close']*df_hedg['Shares purchased']

# In[146]:

pd.options.display.float_format = '{:,.5f}'.format
df_hedg['Cumulative cost with interest']=df_hedg['Cost of shares
purchased'].expanding().sum()
df_hedg['Interest cost'] = df_hedg['Cumulative cost with interest'] *r_weekly
df_hedg

# In[125]:

# shares_purchased = df_hedg.loc[df_hedg['Shares purchased']>0, 'Shares
purchased'].sum()
# shares_sold = df_hedg.loc[df_hedg['Shares purchased']<0, 'Shares purchased'].sum()
# gain=(shares_purchased+shares_sold)*df_hedg.iloc[-1]['Close']
# loss = df_hedg.iloc[-1]['Cumulative cost with interest']
# results = {
#     'Number of shares bought':shares_purchased,
#     'Number of shares sold':shares_sold,
#     'Share price residual':shares_purchased+shares_sold,
#     'Gain @ purchase':gain,
#     'Loss @ trading':loss,
#     'Win/Loss @ replicating strategy':gain-loss,
#     'Premium':premium,
#     'Total win/loss':(gain-loss)+premium
# }
# results

# In[ ]:

```