Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**ЕФЕКТ ПОСМІШКИ ВОЛАТИЛЬНОСТІ У МОДЕЛІ БЛЕКА-ШОУЛЗА.**»

Виконав: студент 3-го року навчання,
напряму підготовки
113 Прикладна математика

Зубріцька Дар’я Євгенівна
Керівник Щестюк Н.Ю.,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Рецензент___________________________
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою __________________________

Секретар ЕК ________________________
«____» ____________________ 20____ р.

Київ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Люди з давніх часів торгували опціонами. Купляли та продавали їх. Це вже тоді була велика та дуже важлива частина фінансового ринку. Але існувала критична проблема: не було єдиної системи для оцінювання опціонів. Не вистачало аналітичного методу, що зміг би нормалізувати ринок цінних паперів за єдиним стандартом. І саме це нам дала модель Блека-Шоулза. Це дозволило фінансовому ринку розвинутись до неймовірних, ніколи раніше не бачених, масштабів.

У наш час вже неможливо уявити світ без торгівлі як ми її знаємо. Вона є основною рушійною силою сучасної економіки. А з розвитком виробництва та технологій набирають популярності альтернативні види платежів. Це банкноти, чеки, векселі, електронні гроші, кредитні картки та багато нового з’являється майже щороку. На сьогоднішній день біржовий ринок стає все більш відкритим для усіх охочих, усюди неймовірна кількість сайтів та програм для торгівлі та не менша кількість реклами цих самих ресурсів. Усе це залучає до світу фінансів неймовірну кількість людей. І саме тому тепер кожен може дуже легко зайти у цей світ аби використовувати його і проводити там операції з великими сумами грошей.

За таких умов стає необхідним аналіз та розуміння показників цінних паперів для ефективної та вигідної торгівлі на біржі, постає мета цієї роботи, що полягає в більш детальному вивченні моделі Блека-Шоулза, якою повсюдно користуються, її проблем та їх наслідків. І як саме використовувати цю не ідеальність у реальному житті, щоб правильно використовувати біржу та на які саме дані, що знаходяться у вільному доступі на спеціалізованих сайтах, потрібно дивитися при використанні цих самих сайтів.

Мета зумовила наступне наукове завдання:

1. Змоделювати фінансовий ринок.

2. Розглянути перші дифузійні моделі та модель Блека-Шоулза.

3. Виявити недоліки дифузійної моделі Блека-Шоулза за допомогою порівняння розрахунків отриманих за допомогою калькулятору написаного мовою програмування Python та реальних статистичних даних.

4. З отриманих даних виділити та сформулювати приховану волатильність. Зробити висновки щодо причин недоліків моделі.

5. Проінтерпретувати «смайл-ефект» та вказати способи його використання у житті на розрахунках зроблених раніше.

Отриманий аналіз моделі дозволяє отримати розуміння того як правильно опрацьовувати дані для їх подальшого використання.

Робота складається з трьох розділів.

Перший розділ присвячено моделюванню фінансового ринку та першим дифузійним моделям. Розглянуто арифметичний та геометричний броунівський рух. Коротко вказані суті та цілі моделей. Описана формула для оцінювання деривативів. Зроблено висновки щодо чим саме модель Блека-Шоулза стала інноваційною.

В другому розділі розглянуто математичну формулу моделі Блека-Шоулза та розписано усі її параметри. Розрахунки реальних статистичних даних калькулятором на мові програмування Python. Розписано висновок щодо наявності недоліків та необхідності їх аналізу.

Третій розділ містить у собі припущення щодо недоліків моделі Блека-Шоулза та їх аналіз. Проінтерпретовано «смайл-ефект», розглянуто його використання для торгівлі на біржах. Зроблено висновок щодо того, що містить у собі цей ефект, чим він корисний та як за допомогою недоліку моделі можна отримати інструмент для вигідної торгівлі на біржі.

РОЗДІЛ 1: ФІНАНСОВИЙ РИНОК. РУХ РИЗИКОВИХ ТА БЕЗРИЗИКОВИХ АКТИВІВ

1.1. Моделювання фінансового ринку

Фінансове моделювання — це завдання побудови абстрактної моделі реальної світової фінансової ситуації.

Поняття математичної моделі фінансового ринку є основним для теми, що буде розглянута у цій роботі. Саме тому почати варто з того чим саме вона є та як використовується у реальному житті та реальному фінансовому ринку.

Математична модель є необхідністю, якщо потрібно побудувати представлення спрощеної версії того, як працює фінансовий ринок, його процесів. Вона представляє спрощену версію ефективності фінансового активу або портфеля бізнесу, проекту чи будь-яких інших інвестицій на ринку.

Тепер, коли було визначено у чому ж роль математичної моделі для фінансового ринку, необхідно розписати як же саме фінансові ринки впливають на світ.

Фінансові ринки є життєво важливими для сучасного світу. Вони суттєво впливають на функціонування капіталістичних економік, яких на разі у світі більшість. За допомогою них відбувається розподіл грошових ресурсів, створюється ліквідність для бізнесу, великого та малого. Вони надають можливості покупцям та продавцям з усього світу легко та вигідно торгувати фінансовими активами. Наприклад, фінансові ринки утворюють такий продукт як цінні папери. За рахунок них інвестори можуть отримати прибуток, у цей самий час надаючи необхідні грошові масиви на фінансування позичальникам, якими зазвичай виступають компанії з усього земного шару.

Фінансові ринки також наповнені багатьма видами фінансових інструментів, які активно приймають участь у купівлі та продажі на біржах: акції, облігації, валюти і багато іншого. Одним з важливих принципів, на яких побудовано фінансовий ринок – це інформаційна прозорість. Вона необхідна для встановлення чесних, відповідних та ефективних цін, хоча ринкові ціни часто не можуть надати інформації щодо їх внутрішньої ціни. Так відбувається через макроекономічні сили, що постійно впливають на ринок, такі як, наприклад, податки.

Для прикладу розглянемо облігації. Облігація – це цінний папір, у якому інвестор позичає гроші на визначений термін під заздалегідь встановлену процентну ставку. Кажучи більш простою мовою, облігації як і усі інші види товарів на фінансовому ринку грають роль посередників для постійного перетікання грошових потоків з одних рук у інші, від тих, хто хоче заробити з інвестицій, до тих, кому необхідні ці додаткові фінанси.

Не усі фінансові ринки мають велику активність, але існують й такі як Нью-Йоркська фондова біржа, де щодня, щогодини та щохвилини торгують цінними паперами великої вартості, що іноді сягає декількох трильйонів за один актив.

У цій роботі буде розглянуто звичайно не американський ринок, а європейський, але від цього масштаби процесу не змінюються. Чому ж саме цей ринок ми обираємо для опрацювання? Відповідь дуже проста: формула Блека-Шоулза побудована саме для процесів європейського фінансового ринку.

1.2. Використання арифметичного та геометричного броунівського руху

Броунівський рух – це фізичний феномен де маленькі частинки занурені у воду починають рухатися хаотично, також це математична модель, що описує хаотичний рух. Саме про друге визначення буде йтись у цьому розділі.

Арифметичний та геометричний броунівські рухи використовують для оцінювання ринку з ігноруванням ризиків. Моделі побудовані на них утворилися приблизно у той самий час, що й модель Блека-Шоулза, і розвивалися приблизно стільки ж.

На сьогоднішній день ринок крутиться довкола саме моделі Блека-Шоулза, хоча і має під собою основу з моделі побудованої на геометричному броунівському русі. У той же час арифметичний броунівський рух, що є більш простим та примітивним процесом майже не має уваги у професійному світі. Але все одно зміг зайняти нішу ідеального практичного завдання як для студентів економістів так і для майбутніх працівників біржі на Уолл Стріт.

Модель побудовану на арифметичному броунівському русі можна назвати наївною. На сьогоднішній день вже очевидно, що вона не описує багато важливих особливостей реального фінансового ринку.

Для її побудови виділяють три головних кроки: встановлення очікуваної прибутковості базового цінного паперу на безризиковій ставці; обчислення очікуваної виплати похідного інструменту в момент погашення; знизити результат другого кроку по безризиковій ставці;

Розпишемо у чому саме різниця безризикової моделі та моделі, що залежить від часу.

Отже, нехай процес утворення стокових цін залежить від арифметичного броунівського руху, а отже може бути описаний такою формулою:

$$dS_t = \sigma s W_t + \mu dt,$$

де σ та μ відповідно описують дрейф та волатильність, а W_t – стандартний вінерівський процес.

Далі розглянемо і побудуємо модель готівкових облігацій:

$$dB_t = B_t r dt,$$

де r – це константна безризикова процентна ставка.

Зазвичай у даних розрахунках у формулі процесу утворення стокових цін місце μ займає r, тоді отримуємо:

$$dS_t = \sigma dW_t^* + r dt$$

наступну формулу отримуємо інтегруванням попередньої:

$$S_T = S_t + r(T - t) + \sigma(W_T^* - W_t^*).$$

Необхідно відмітити, що $(W_T^* - W_t^*)$ розподілено як умовна нормаль з нульовим середнім значенням та варіативністю $N(0, T-t)$. Тоді ціну європейського колл опціону можна описати:

$$c_t = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(S_T - K, 0) \,|S_t] = e^{-r(T-t)} \sigma \sqrt{T-t}[dN(d) + n(d)]$$

Де Q – безризикова міра , K – страйкова ціна колл опціону,

$$d = \frac{S_t + r(T-t) - K}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$N(d)$ – кумулятивна функція розподілу, $n(d)$ – функція щільності.

Як і було сказано вище така модель є наївною, як наслідок її використання у реальному аналізі ринку буде дуже ненадійним.

Геометричний же броунівський рух, хоча і має схожі кроки, описує процеси коректніше. Відповідно до цієї моделі вартість активу буде оцінюватися за формулою Іто:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t W_t,$$

тут як і у формулі (1) σ та μ відповідно описують дрейф та волатильність, а W_t – стандартний вінерівський процес. Але це ще не кінець побудови цієї моделі, на даному етапі вона ще не описує важливі закономірності ринку.

На сьогоднішній день прийнято використовувати стохастичний процес, який можна описати формулою

$$R(t) = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t},$$

що описує відносний приріст цін акцій з часом.

Тепер, якщо ми врахуємо залежність змін цін у часі, то отримаємо формулу Іто такого вигляду:

$$dR_t = \mu(R,t)dt + \sigma(t)dW_t.$$

Тут на функції коефіцієнту дрейфа та дифузії стоять стандартні умови

$$D\big(\mu(R,t)\big) < \infty, t \to \infty$$
$$\sigma(t) < \infty, t \to \infty$$

Саме на основі залежної від часу моделі ми розглядаємо модель Блека-Шоулза. Саму модель буде розглянуто у наступному розділі.

1.3. Оцінювання деривативів

Що таке дериватив? Дериватив – це фінансовий контракт із вартістю, що базується на базовому активі, будь то цінні папери, товар, облігації та інше.

Вартість деривативів вираховується в залежності від того чим саме він представлений. Найпоширенішими з деривативів є ф'ючерс контракти, своп та опціони. Існують також незвичні, що залежать від, наприклад, викидів карбону в атмосферу.

У цій роботі ми будемо розглядати звичні деривативи, а саме опціони, що діляться на колл та пут. Саме на для їх розрахунку і аналізу ми будемо використовувати модель Блека-Шоулза.

І все ж варто хоча б коротко описати сутність інших деривативів.

Ф'ючерс контракти заключають у собі домовленість між покупцем та продавцем про майбутню покупку за конкретну ціну, що визначається у теперішньому та залежить від грошової вартості товару.

Такий дериватив часто може відрізнятися від грошової або спотової ціни на актив, що лежить у базі контракту. Основою цього контракту є різниця між готівковою ціною на товар на сьогодні та розрахованою для ф'ючерса потенційною ціною майбутнього. Також через цей часовий розрив якість, доставка та фактичні дані можуть також змінюватися та відрізнятися.

Своп – це похідні інструменти, що представляють собою угоду між двома сторонами на обмін серією грошових потоків. Ці деривативи надають велику гнучкість для розробки та структурування контрактів, де обидві сторони дають згоду. Саме через це подібний контракт надає неймовірну кількість варіантів обміну, де кожен служить певній цілі. Як приклад, одна сторона може обміняти фіксований грошовий потік на змінний, якщо його коливання за рахунок зміни процентних ставок їм буде вигідним. Також часто міняють грошові потоки, що мають зв'язок із процентними ставками в одній країні на інші.

Опціони є одними з найрозповсюджених видів деривативів. Вони надають право покупцеві купити або продати базовий актив за страйковою, вже вирішеною, ціною.

Опціони поділяються на колл та пут, різниця між ними не дуже значна, але все одно важлива.

Колл надає інвестору можливість та право, але не зобов'язання, придбати акції за визначеною ціною на певний період часу. З іншого боку продавець зобов'язаний продати акції за встановленою ціною до закінчення дати виконання.

Зазвичай опціон колл використовують для отримання вигоди від володіння цінними паперами. Часто їх можуть продати, коли ціна зросте та отримати вигоду. Наприклад, придбавши акції за 30 доларів, інвестор має право здійснити транзакцію протягом зазначеного в контракті строку. Він повинен до скінчення терміну скористатися опціоном, навіть якщо ціна акцій зросте.

Опціон пут надає інвестору можливість продати акції за встановленою ціною до дати закінчення терміну. Продавець зобов'язаний купити данні акції за контрактною ціною, навіть якщо їх ціна на сьогодні виявиться нижчою.

Пут використовують як спосіб зберегти свої гроші від падіння цін акцій на ринку. Бо навіть якщо ціна знизиться інвестор уникне збитків і навіть може отримати прибуток з різниці.

Головною ціллю опціонної торгівлі є вираховування ймовірності того, що опціон буде виконано. В математичних моделях для розрахунку теоретичної чесної ціни опціону використовують страйкову ціну, ціну виконання, волатильність, процентну ставку та кількість днів до виконання.

Саме опціони ми будемо розраховувати та досліджувати за допомогою моделі Блека-Шоулза, яка є найрозповсюдженішим інструментом для даних розрахунків.

1.4. Висновки розділу 1

Узагальнюючи цей розділ варто повторити головні визначення, процеси та їх призначення у світі економіки, фінансових ринків та торгівлі цінними паперами, банкнотами та іншими активами.

Моделювання фінансового ринку є процесом за якого будується абстрактна модель реальної фінансової ситуації у світі. Така модель використовуються для роботи з самими фінансовими ринками шляхом використання математичних формул.

Броунівський рух є основою багатьох математичних моделей фінансового ринку, використовуючи дослідження з фізики математики змогли виразити випадковість через формули. Саме завдяки цьому можливо розрахувати ціни, зважаючи на дані які на момент розрахунку. Звичайно моделі не описують випадковість ідеально, але все одно є вітальною частиною сучасного фінансового ринку і торгівлі опціонами.

Було також розглянуто декілька видів деривативів, у тому числі й опціони, що будуть головними даними для подальшого дослідження. Розглянувши ф’ючерс, своп та опціони, було проговорено механізми їх праці та мету їх використання, як наприклад ф’ючерси для гарантії закупівлі по договореній ціні у майбутньому, чи свопи для вигідного обміну грошовими потоками. Також більш детально було розглянуто колл та пут опціони, механізм їх виконання.

Колл та пут опціони використовують механізм придбання та продажу цінних паперів, граючи на збільшенні та зменшенні їх цін. Так, придбаючи папери за опціоном колл за встановленою цінною, інвестор може продати їх на підвищення ціни. А придбаючи папери опціоном пут за низькою ціною може потім продати їх за вже вищою та встановленою при придбанні ціні.

РОЗДІЛ 2: МОДЕЛЬ БЛЕКА-ШОУЛЗА ТА ПРИХОВАНА ВОЛАТИЛЬНІСТЬ

2.1. Математична формула. Її параметри

Математична модель Блека-Шоулза була розроблена у 1973 році трьома людьми: Фішер Блек, Роберт Мертон та Майрон Шоулз. Вона стала першою широко використовуваною моделлю математичного розрахунку цін опціонних контрактів. Спершу вона була представлена світові у 1973 році, а пізніше надрукована у статті під авторством Блека, Шоулза та з допомогою Мертона, що був її редактором для друку.

Формула використовує поточні ціни акцій, очікувані дивіденди, ціну виконання опціону, очікуванні процентні ставки, очікувану волатильність та кількість часу до скінчення дії опціону.

Модель Блека-Шоулза будується на ствердженні, що акції, ф’ючерси та інше матимуть логнормальний розподіл цін навіть після того як відбудеться їх коливання з постійним дрейфом та волатильністю. Враховуючи ще й інші змінні, що впливають на цінотворення, це рівняння надає можливість розрахувати ціну опціону зразка європейського фінансового ринку.

Варто більш детально розглянути припущення, що потрібні при використанні даної формули для розрахунків:

1. Дивіденди не виплачуються допоки опціон не закінчить свій термін дії;
2. Ціни на ринку мають випадкові зміни, а саме коливання ринку неможливо передбачити;
3. Купівля опціону відповідає зазначеній цінні, без врахування витрат на трансакційні виплати;
4. Волатильність та безризикова ставка є постійними та заздалегідь відомими;
5. Прибуток від базового активу розподіляється за логнормальним розподілом;
6. Опціон, що розраховується має бути європейським та виконується лише після скінчення терміну його дії;

З вищевказаних пунктів видно, що для повноцінного використання моделі необхідні деякі модифікації. Так, на ринку постійно враховують можливість виконання опціону до завершення строку його дії. А більшість тих, хто займається продажем опціонів вже як правило враховують таку можливість при утворені ціни.

Через це на перший погляд може здатися, що займатися цими розрахунками неймовірно складно. Математика при розрахунку формули Блека-Шоулза і справді дуже складна та заплутана, та може лякати того, хто має не дуже гарні навички. Але більшість трейдерів уже давно мають на озброєнні онлайн калькулятори, що приховують усі складні процеси від користувача. Для звичайного недосвідченого користувача усі потрібні дані вже виписуються у вигляді вже розрахованих та зручно відформатованих для сприйняття таблиць.

Розрахунок формули Блека-Шоулза для ціни опціонів включає у себе різницю між добутком ціни акцій з кумулятивною стандартною нормальною функцією розподілу та чистої теперішньої вартості також помноженої на кумулятивний нормальний розподіл.

Розписуючи у вигляді математичної формули її можна зобразити так:

$$C = S_t N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

Де d_1 та d_2 розраховуються таким чином:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma_v^2}{2})t}{\sigma_s \sqrt{t}}$$

та

$$d_2 = d_1 - \sigma_s \sqrt{t}.$$

Де C – ціна опціону колл, S – поточна ціна акції, K – ціна виконання, r – безризикова процентна ставка, t – час до завершення дії опціону, N – нормальний розподіл.

2.2. Побудова моделі мовою програмування Python

Як відомо з попереднього пункту ми маємо список аргументів, що входять до розрахунків формули Блека-Шоулза. Також вже було згадано про існування калькуляторів, які заміняють важку математичну працю. У цій роботі ми будемо використовувати не онлайн калькулятор, а бібліотеку Python – mibian.

За допомогою цієї бібліотеки ми можемо рахувати декілька моделей, але зосередимо свою увагу та будемо використовувати саме варіант для розрахування моделі Блека-Шоулза, що має синтаксис – mibian.BS([Underlying price, Strike price, Interest rate, Amount of days to expiration], Call price, Put price, volatility), оскільки саме її властивості необхідно дослідити згідно з метою цієї роботи. Ця функція повертає об'єкт, який має розраховані внутрішніми методами дані, що зазвичай виводяться з формули Блека-Шоулза.

Розглянемо синтаксис цієї функції більш детально. Для її використання необхідні такі обов'язкові змінні як: ціна базового активу, страйкова ціна, процентна ставка та кількість днів до кінцевої дати виконання опціону. Колл ціна, пут ціна та волатильність є змінними серед яких ми обираємо лише одну.

Що ж буде змінюватися в залежності від того яку із цих змінних ми обираємо? Це дозволяє виразити інші змінні через обрану. Так, наприклад, якщо ми підставимо волатильність то зможемо отримати ціну колл або ціну пут.

```
c = mibian.BS([8572, 8700, 0, 31], volatility=67.65)
print(c.callPrice)
print(c.putPrice)
```

А якщо підставити ціну колл або пут – зможемо вивести волатильність.

```
c = mibian.BS([8572, 8700, 0, 31], callPrice= 616.05)
```

```
print(c.impliedVolatility)

c = mibian.BS([8572, 8700, 0, 31], putPrice= 744.05)
print(c.impliedVolatility)
```

Очевидно, що більшість даних можливо узяти зі спеціалізованих онлайн та офлайн ресурсів. Зазвичай на таких ресурсах можна знайти дату кінця строку виконання опціону, базову ціну активу, страйкову ціну та ціни колл та пут. Але для побудування моделі нам усе ще не вистачає процентної ставки.

Процентна ставка – це сума, що сплачується кредитору, та вираховується як процент від основної суми. Розраховується процентна ставка на основі історичних даних за рік, а саме нам необхідні зміни у ціні обраного нами базового активу за рік. У більшості випадків подібні дані також легко знаходяться на спеціалізованих ресурсах, де вони зберігаються у вигляді таблиць чи графіків залежності ціни базового активу від часу.

Формула за допомогою якої розраховується процентна ставка виглядає так:

$$r = \bar{h} + \frac{\sigma^2}{2},$$

де $\bar{h}$ – середнє арифметичне від h_n, а σ – постійна річна волатильність у вигляді десяткового дробу.

Для знаходження необхідних h_n та σ нам потрібні ще дві формули. Перша – натуральний логарифм результату ділення ціни базового активу на n-ій позиції на ціну базового активу на $(n-1)$-й позиції:

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}},$$

звідси знаходимо середнє арифметичне, яке необхідне у формулі вище.

Другою необхідною формулою буде формула знаходження постійної річної волатильності σ. Для її знаходження нам знадобиться середній квадратичний розподіл h_n, який позначається як $\tilde{\sigma}$. А вже з середнього квадратичного відхилення та квадратного кореня кількості робочих днів за рік знаходимо постійну річну волатильність:

$$\sigma = \tilde{\sigma} * \sqrt{252}.$$

Вже маючи ці дані можливо починати їх аналіз.

2.3. Недолік моделі. Аналіз даних

На цьому етапі ми перейдемо до дослідження даних. Якщо брати за істину твердження, що модель Блека-Шоулза повністю описує ціноутворення на ринку опціонів, то за підстановки колл або пут цін у формулу ми зможемо виразити волатильності, що будуть рівні постійній річній волатильності.

Волатильність – це статистичний показник, що позначає собою те як розсіюються прибутки для конкретного цінного паперу або ринкового індексу. Зазвичай волатильність рахується як стандартне відхилення, чи як дисперсія між прибутковістю необхідного деривативу. Чим вище волатильність тим більш ризиковим буде такий цінний папер. Зазвичай на фінансовому ринку волатильність пов’язана з великими коливаннями. Така нестабільність ринку є одним з ключових факторів для ціноутворення.

З початку цього підрозділу ми встановили, що за істинністю твердження про ідеальність формули Блека-Шоулза ми б усюди отримали волатильності рівні постійній річній волатильності. Але якщо підставити замість теоретичної ціни реальну ми отримаємо зовсім іншу картину, де волатильності виражені через формулу Блека-Шоулза не будуть рівні постійній річній.

Очевидно, що цей недолік випливає з того факту, що насправді ринок більш хаотичний і може змінюватися значно непередбачуваніше ніж вважається у моделі

Блека-Шоулза. Так на ціноутворення будуть впливати такі фактори як час та постійні зміни у ринку.

Якщо ж про час все доволі зрозуміло, то чи можна відобразити, а потім і врахувати та зважати на зміни ринку все ще залишається питанням. Якщо пригадати означення волатильності, то можна зрозуміти, що саме ця змінна буде основним інструментом у передбаченні та врахуванні змін.

Для прикладу та розуміння необхідно перевірити як змінюється величина постійної волатильності в залежності від обраного періоду часу. Так у нашому випадку ми порівняємо отриману раніше величину з даних за один рік та розрахуємо постійну волатильність від шести місяців.

Для цього використаємо формулу розрахунку постійної волатильності, цього разу лише для половини року:

$$\sigma = \tilde{\sigma} * \sqrt{126},$$

де 126 – кількість робочих днів за пів року.

Тепер ми можемо побачити у чому полягає проблема з моделлю Блека-Шоулза. Так на прикладі історії зміни цін на ринку Microsoft Corporation Common Stock(MSFT) за шість місяців ми отримали волатильність розміром 11.82%. А отже маємо неприємну невідповідність: за цими даними виходить, що ринок Microsoft Corporation Common Stock(MSFT) коливається з постійною волатильністю в 11.82% за півроку та з постійною річною волатильністю розміром 26.85% одночасно.

Така невідповідність постійних волатильностей одного ринку опціонів свідчить про те що його непостійність впливає значно сильніше ніж може здатися на перший погляд. І модель Блека-Шоулза хоча і є потужним інструментом для роботи з ринком опціонів, але все ще потребує додаткового аналізу прихованих волатильностей, які є результатом підстановки у формулу Блека-Шоулза замість теоретичної ціни реальної.

2.4. Прихована волатильність та посмішка волатильності

З проблемою різниці між постійними волатильностями доволі легко розібратися, зробивши їх залежними від часу, як це зробив Мертон у 1973 році. Тоді ми отримаємо, що зміна з часом описана у формулі, та враховується при розрахунках, а точковий процес S у такому випадку керується наступним стохастичним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dS}{S} = r(t)dt + \sigma(t)dW,$$

де $r(t)$ – миттєва форвардна ставка погашення t, що випливає з кривої прибутковості.

Але залежність волатильності від ціни виконання для специфічного терміну строку дії опціону є значно складнішою за залежність від часу. Деякі дослідники намагалися удосконалити модель Блека-Шоулза для того, щоб вона враховувала так звану теоретичну посмішку волатильності. На жаль для цього необхідно враховувати неторгівельні джерела ризику. Через це втрачається повнота моделі, а саме зникає можливість використовувати цю модель для хеджування опціонів базовим активом.

У попередньому абзаці згадувалась також посмішка волатильності. Як зрозуміло з контексту вона описує зміну прихованої волатильності від ціни виконання. Такі залежності прийнято описувати графіком і цей випадок не є виключенням. А отже визначення посмішки волатильності можна сформулювати так: посмішка волатильності – стандартна форма графіку, що виникає у результаті побудови графіка залежності прихованої волатильності від ціни виконання. Важливо аби вони належали до однієї і тієї ж групи опціонів, що мають спільний термін виконання та ціну базового активу. Таку назву цей графік отримав через специфічну форму, якої він набуває у багатьох випадках. При візуалізації стає видно, що форма графіка дуже схожа на усміхнений рот (див. додаток А).

Посмішка волатильності, будучи залежною від зміни прихованої волатильності, не є передбаченою основною формулою в оцінені опціонів та інших деривативів, а саме формулою Блека-Шоулза. Інакше ми би одержували горизонтальну пряму замість посмішки на графіку. Це б значило, що прихована волатильність буде однаковою для усієї вибірки опціонів, що мають спільні ціну базового активу, дату скінчення терміну виконання, а зміна у ціні виконання не мала б ніякого впливу. Але у реальності це зовсім не так через кількість непередбачуваних факторів, які дуже складно враховувати, при тому притримуючись того, щоб формулу можна було зручно використовувати на ринках деривативів.

Також варто відмітити наявність ще один вид цього графіку – усмішка, де один з кінців нижче за другий, через що зникає повна U-подібність форми. Зазвичай це означає, що опціон має значно менше шансів утримувати стабільність.

Прихована волатильність зростає, коли ціна базового активу знаходиться ближче до out of the money або in the money, але є найнижчою у стані at the money. Для розуміння того, як саме аналізувати опціони за допомогою цього графіку необхідно трохи більше заглибитись у те, що значать ці стани.

Ці стани є такими індикаторами, що допомогають визначити чи принесе такий опціон прибуток, якщо його виконати одразу після придбання. Також для початку варто розписати чим є

Почнемо з out of money. Цей стан є таким, що його вартість завжди буде зовнішня, а Δ, що є показником ризику при оцінені ціни деривативу, меншою за 50.0. Зазвичай колл такого опціону буде мати ціну виконання вищою за ринкову, а опціон пут – нижчу.

З іншого боку in the money по суті є антонімічним станом. Вартість такого опціону завжди буде внутрішньою. За допомогою такого опціону отримають вигоду через використання співвідношення між його ціною виконання та ціною базового активу. Опціон колл такого типу можна купити за ціною нижчою ніж його поточна ринкова. У випадку з опціонами пут такий стан буде означати можливість продати цінний папір за вищою ніж ринкова базового активу ціною.

І нарешті at the money. Страйкова ціна такого опціону буде такою ж самою як і ціна базового активу. Δ такого опціону зазвичай рівна 0.5 зі знаком плюс для опціону колл та мінус для опціону пут.

2.5. Висновки розділу 2

Підведемо висновки для другого розділу, де ми розглянули як саме виглядає формула Блека-Шоулза, якими даними потрібно оперувати та виділили проблему, яка на перший погляд здається непомітною.

Формула Блека-Шоулза базується на деяких теоретичних припущеннях, пригадаємо їх знову:

1. Дивіденди не виплачуються допоки опціон не закінчить свій термін дії;
2. Ціни на ринку мають випадкові зміни, а саме коливання ринку неможливо передбачити;
3. Купівля опціону відповідає зазначеній цінні, без врахування витрат на трансакційні виплати;
4. Волатильність та безризикова ставка є постійними та заздалегідь відомими;
5. Прибуток від базового активу розподіляється за логнормальним розподілом;
6. Опціон, що розраховується має бути європейським та виконується лише після скінчення терміну його дії;

Але підставляючи у модель Блека-Шоулза реальні дані можна помітити, що зміни у ринку, а отже і волатильність не є постійними та відомими заздалегідь. Через це виникає відчуття наче ринок коливається з різною силою одночасно.

Щоб вияснити у чому лежить причина ми розрахували постійну річну волатильність і постійну волатильність за період розміром у півроку. Невідповідність цих результатів і стала відповіддю. Реальний ринок опціонів залежить від часу та не є ідеальним з точки зору флуктуації цін опціонів.

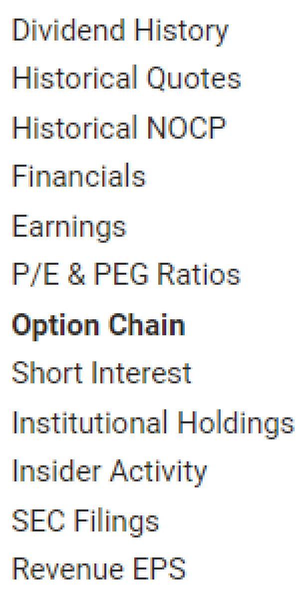
І хоча залежність від часу вирішується просто, флуктуації цін потребують додаткового аналізу. Для цього використовують так звані приховані волатильності та посмішку волатильності, що будується з їх залежності від страйкових цін. Саме завдяки ним з’являється можливість більш точно передбачати поведінку ринку для отримання прибутку та запобігання зайвим ризикам.

РОЗДІЛ 3: АНАЛІЗ РЕАЛЬНИХ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ PYTHON

3.1 Збір необхідних для аналізу даних

Як було зазначено у минулому розділі, для використання бібліотеки mibian на мові програмування Python нам потрібні специфічні дані: кількість днів до кінця строку виконання опціону, страйкова ціна, ціна базового активу та процентна ставка. Також нам знадобляться ціни колл та пут опціонів.

Для початку візьмемо усі дані, що можна знайти на спеціалізованих ресурсах. У нашому випадку це буде сайт Nasdaq.com та ринок опціонів Microsoft Corporation Common Stock(MSFT). Перейдемо до пункту меню, що називається option chain (див. малюнок 3.1).



Малюнок 3.1

Пункт меню, що потрібен для переходу на сторінку з даними про опціони

Тут ми можемо отримати дані щодо опціонів, їх дату виконання, ціни та багато інших деталей, що використовуються для аналізу фінансового ринку. Але зосередимося ми лише на необхідних нам даних.

З датою кінця строку виконання все просто. Для нашого прикладу обираємо у полі Date вересень 2022 року і бачимо дату 16 вересня (див. малюнок 3.2).

MSFT Option Chain

Date: September 2022 | Option: Composite | Calls & Puts: Calls & Puts | Moneyness: Near the Money | Type: All (Types)

	Calls							Puts					
Exp. Date	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.	Strike	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.
September 16, 2022													
Sep 16	33.40	--	32.70	36.60	--	326	245.00	9.01	+1.31 ▲	8.65	9.20	68	2868
Sep 16	30.00	-3.50 ▼	30.00	33.10	25	4063	250.00	10.30	+1.05 ▲	9.95	10.45	60	5061
Sep 16	27.30	-2.30 ▼	27.25	28.05	15	1045	255.00	12.05	+1.65 ▲	11.40	12.00	14	2792
Sep 16	24.75	-1.85 ▼	24.10	25.25	36	1306	260.00	13.55	+1.35 ▲	13.00	13.75	77	5371
Sep 16	20.94	-2.41 ▼	21.00	22.05	59	1336	265.00	15.52	+1.52 ▲	14.80	15.65	145	3142
Sep 16	18.22	-2.48 ▼	18.10	19.35	71	3620	270.00	17.71	+2.21 ▲	16.85	17.80	130	4228
Sep 16	15.50	-2.00 ▼	15.50	16.45	103	1188	275.00	20.15	+2.15 ▲	18.95	20.05	221	2499
Sep 16	12.60	-2.30 ▼	13.10	13.90	54	7979	280.00	22.58	+2.23 ▲	21.95	22.60	145	5751
Sep 16	11.10	-1.37 ▼	10.80	11.55	269	2703	285.00	25.25	+2.71 ▲	24.70	25.45	238	5067
Sep 16	8.96	-1.39 ▼	9.00	9.55	52	5381	290.00	27.85	-2.94 ▼	26.65	28.65	19	4641
Sep 16	7.37	-1.23 ▼	7.35	7.75	86	2226	295.00	32.00	+2.75 ▲	30.05	31.90	1	3140

LAST TRADE: $270.02 (AS OF JUN 3, 2022)

Малюнок 3.2

Приклад вигляду таблиці з даними про опціони на сайті Nasdaq.com

Це і є потрібна нам кінцева дата, зважаючи на те, що на момент розрахунків 23 травня, ми отримуємо першу змінну, яку у коді назвемо days_to_exp, а рівна вона 82 робочим дням між 23 травня та 16 вересня.

З отриманої нижче таблиці ми можемо узяти вибірку опціонів з їх страйковою ціною, ціною пут та ціною колл. Перша з них знаходиться у стовпчику Strike, а друга та третя відповідно Puts Last та Calls Last. На момент розрахунків ми отримали ось таку вибірку даних для аналізу (див. таблиця 1).

Таблиця 1

Ціни страйкова, пут та ласт опціонів ринку Microsoft Corporation Common Stock(MSFT) з кінцевою датою виконання 16 вересня

call last	strike	Put last
34.18	230	11.2
28.77	235	12.57
25.4	240	15.14
23.2	245	17.35
19.86	250	18.55
18.65	255	22.1
15.99	260	22.5
13.05	265	28.05
11.2	270	32.3
9.8	275	32.5

Залишилися ще декілька змінних: ціна базового активу та процентна ставка. Першу знайти легко, вона знаходиться згори відповідної сторінки, під нею завжди зазначене те яка зміна відбулася відносно попередньої вартості базового активу (див. малюнок 3.3).

Малюнок 3.3

Місцезнаходження інформації про ціну базового активу на сайті Nasdaq.com

Другу змінну доведеться рахувати, оскільки її нам не надають на сайті.

Для того аби розрахувати процентну ставку пригадаємо формулу: середнє арифметичне з логарифмів ділення ціни базового активу n-го порядку на $(n-1)$-го порядку додати квадрат постійної волатильності поділений на 2.

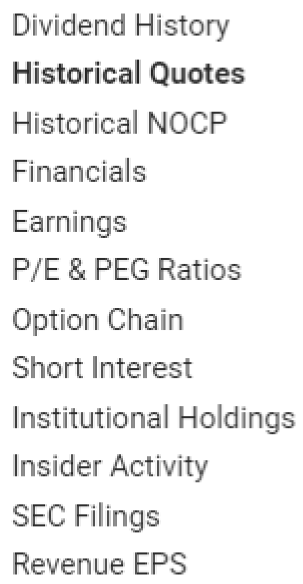
$$r = \bar{h} + \frac{\sigma^2}{2}$$

Пригадаємо також формули розрахунків для h_n та σ.

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}},$$

$$\sigma = \tilde{\sigma} * \sqrt{252}$$

Необхідні дані про історичні зміни у базовій ціні активу ми також можемо знайти на сайті Nasdaq.com. Для цього перейдемо у інший розділ меню, що називається historical quotes (див. малюнок 3.4).



Малюнок 3.4

Пункт меню, що потрібен для переходу на сторінку з історичними даними по змінам у ціні базового активу

Тут ми можемо побачити дані по цінам базового активу, відповідні дати та можливість обрати вибірку за різні строки. Для нашого дослідження ми обираємо дані за один рік. З них далі у коді буде розрахована процентна ставка.

MSFT Historical Data

1M 6M YTD 1Y 5Y MAX DOWNLOAD DATA

Date	Close/Last	Volume	Open	High	Low
06/03/2022	$270.02	28,058,960	$270.31	$273.45	$268.41
06/02/2022	$274.58	44,008,210	$264.45	$274.65	$261.6
06/01/2022	$272.42	25,292,170	$275.195	$277.69	$270.04
05/31/2022	$271.87	37,827,700	$272.53	$274.77	$268.93
05/27/2022	$273.24	26,910,810	$268.48	$273.34	$267.56
05/26/2022	$265.9	25,002,110	$262.27	$267.11	$261.4294
05/25/2022	$262.52	28,547,950	$258.14	$264.58	$257.125
05/24/2022	$259.62	29,043,900	$257.89	$261.33	$253.5
05/23/2022	$260.65	33,175,380	$255.49	$261.5	$253.43
05/20/2022	$252.56	39,199,280	$257.24	$258.54	$246.44
05/19/2022	$253.14	32,692,290	$253.9	$257.67	$251.88
05/18/2022	$254.08	31,355,990	$263	$263.6	$252.77
05/17/2022	$266.82	28,828,800	$266.11	$268.33	$262.46
05/16/2022	$261.5	32,550,930	$259.955	$265.82	$255.78
05/13/2022	$261.12	34,925,090	$257.35	$263.04	$255.35

Малюнок 3.5

Вигляд таблиці з історичними даними по змінам ціни базового активу

На цьому етапі збір даних, що можна знайти на ресурсі Nasdaq.com, завершено і саме час переходити до розрахунків за допомогою мови Python.

Для початку необхідно імпортувати бібліотеки, що ми будемо використовувати для роботи.

```
# Importing libraries
from math import log, e
try:
  from scipy.stats import norm
except ImportError:
  print('Mibian requires scipy to work properly')

# WARNING: All numbers should be floats -> x = 1.0
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot
!pip install mibian

import mibian
import pandas as pd
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import statistics
```

Як видно з цієї частини коду нам знадобляться такі бібліотеки як: mibian, pandas, math, mathplotlib.pyplot та statistics.

Бібліотеку pandas ми будемо використовувати для роботи з csv файлами, у які записані необхідні нам дані у вигляді таблиці.

```
data = pd.read_csv('Вибірка даних для перевірки з сайту Nasdaq.com.csv')
data.astype(float)

log = pd.read_csv('Вибірка даних по змінам у базовій ціні
активу за рік з сайту Nasdaq.com.csv')
log.astype(float)
```

Для запобігання серйозних проблем із втратою даних та розрахунками при роботі з числами ми обов'язково зводимо їх до типу даних float.

Наступним кроком є розрахунок середнього арифметичного з h_n та їх стандартного квадратичного відхилення, для яких використаємо вищезгадані бібліотеки math та statistics:

```
hni = []

for i in log.index:
  if i == 0:
    continue

  hn = math.log(log.iat[i,0]/log.iat[i-1,0])
  hni.append(hn)

hn_av = sum(hni)/len(hni)
st_dev = statistics.stdev(hni)
```

Також пропишемо вивід отриманих даних на екран для відстеження результатів.

```
print('Середнє з hn: ')
print(hn_av)
print('Стандартне квадратичне відхилення: ')
print(st_dev)
```

Отримані значення є $\bar{h}$ рівне -2.817842026830341e-05, а $\tilde{\sigma}$ рівне 0.016916052272321375.

Звідси будемо мати необхідні дані для розрахунку процентної ставки, а отже запишемо усі необхідні статичні дані окремим блоком, також зробивши вивід там, де відбуваються розрахунки, для їх контролю.

```
#Кількість робочих днів до строку виконання опціону
days_to_exp = 82
#underlying price
und_price = 254.72

#volatility and interest rate
vol = st_dev * math.sqrt(252)
vol_per = vol*100
print("Річна волатильність у процентах: ")
print(vol_per)
r = hn_av + math.pow(vol,2)/2
print("Процентна ставка: ")
print(r)
```

На вивід з цієї частини коду отримаємо такі значення: річна волатильність – 26.853400486518858, процентна ставка – 0.03602707746420026.

Тепер, маючи усі необхідні статичні дані перейдемо до роботи з бібліотекою mibian та її об’єктом, що будує модель Блека-Шоулза. Також додамо нові стовпчики до нашого масиву data, у яких будемо зберігати отримані від підстановки реальних цін приховані волатильності. Їх назви будуть відповідними до розрахунків через ціну колл чи пут: implied volatility call та implied volatility put. Також виведемо оновлену таблицю.

```
impl_vol_call = []
impl_vol_put = []

for ind in data.index:
  c = mibian.BS([und_price, data['strike'][ind], r, days_to_exp], callPrice = da
ta['call last'][ind])
  impl_vol_call.append(c.impliedVolatility)
  c = mibian.BS([und_price, data['strike'][ind], r, days_to_exp], putPrice = dat
a['put last'][ind])
  impl_vol_put.append(c.impliedVolatility)

data['implied volatility call'] = impl_vol_call
data['implied volatility put'] = impl_vol_put

print(data)
```

Отримаємо на вивід цієї частини коду таблицю такого вигляду (див. таблиця 2).

Таблиця 2

Вивід програми після розрахунку прихованих волатильностей та зведення їх до таблиці

call last	strike	put last	implied volatility call	implied volatility put
34.18	230	11.2	42.32788086	46.63085938
28.77	235	12.57	37.04833984	45.42541504
25.4	240	15.14	36.37695313	46.53930664
23.2	245	17.35	37.96386719	46.40197754
19.86	250	18.55	36.48376465	43.73168945
18.65	255	22.1	39.03198242	45.65429688
15.99	260	22.5	38.07067871	40.77148438
13.05	265	28.05	36.08703613	45.98999023
11.2	270	32.3	35.88867188	48.33984375

На цьому етапі усі необхідні розрахунки проведені та отримані приховані волатильності, що записані у таблиці відносно порядкового номеру їх опціонів.

3.2. Використання прихованої волатильності на практиці

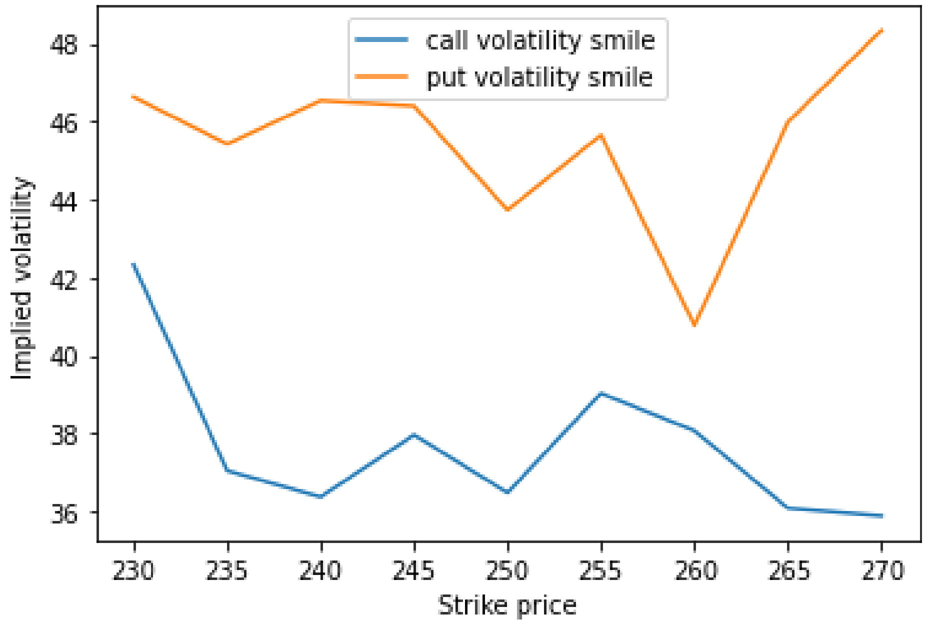
Наступною важливою частиною є аналіз отриманих прихованих волатильностей за допомогою відображеня їх у вигляді графіка посмішки волатильності.

Як було згадано у минулому розділі посмішка волатильності отримується з порівняння опціонів з однаковими ціною базового активу та датою закінчення терміну виконання. Уся суть цього графіку полягає у тому, що ми маємо залежність між страйковою ціною та волатильністю опціону. А отже ми можемо використати цю залежність для аналізу цін обраних нами опціонів та виділити найвигідніший з усіх представлених.

Намалюємо ці графіки за допомогою бібліотеки mathplotlib.pyplot використовуючи розраховані приховані волатильності та відповідні їм страйкові ціни.

```
plt.plot(data['strike'], data['implied volatility call'], label='call volatility
 smile')
plt.plot(data['strike'], data['implied volatility put'], label='put volatility s
mile')
plt.xlabel('Strike price')
plt.ylabel('Implied volatility')
plt.legend()
plt.show()
```

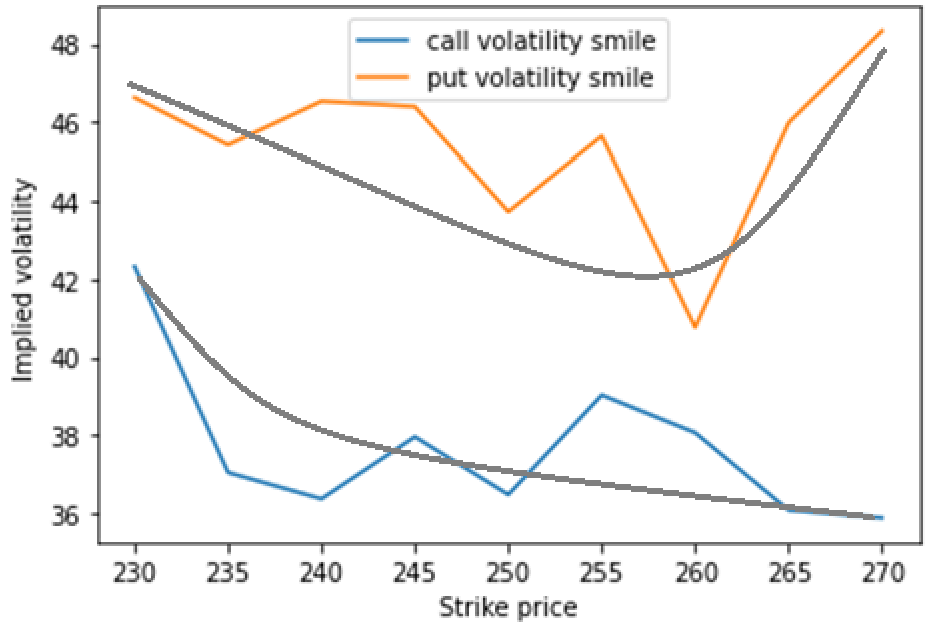
Звідси отримаємо ось такі посмішки волатильності для моделей побудованих від цін пут та колл (див. малюнок 3.6).



Малюнок 3.6

Графіки посмішки волатильності намальовані у Python з обрахованих раніше даних

Домалюємо умовні дуги (див. малюнок 3.7), що проходять поміж усіх точок та змінюють напрямок руху по осі ординат на протилежний у найнижчій своїй точці. Деякі вигини на їх протязі нормальні і насправді майже на всіх реальних прикладах можна побачити що цей графік завжди має не ідеально округлу форму.



Малюнок 3.7

Графіки посмішок волатильностей, поверх яких зображені уявні дуги, що демонструють вигин графіків

Посмішка волатильності ділиться на дві умовні частини точкою, що знаходиться у найнижчій точці умовної дуги. Чим лівіше від такого умовного центру ми знаходимося тим більше такий опціон відповідає out of the money пут та in the money колл, відповідно чим правіше наш опціон за цим графіком тим більше він відповідає out of the money колл та in the money пут.

Розглянемо ще раз графік посмішки волатильності (див. малюнок 3.7), що був отриманий за допомогою наших розрахунків у калькуляторі написаному на Python.

Посмішка волатильності від цін колл прийняла форму зворотної усмішки, тобто прихована волатильність менша за більшої страйкової ціни та більша за меншої. Такий вигляд графіку свідчить про те що опціони in the money колл та out of the money пут дорожчі за опціони out of the money колл та in the money пут.

Такий перекіс пояснюється декількома варіантами. Першим – інвестори, що стурбовані потенційним крахом фінансового ринку купують опціони пут для збереження власних грошей. Доказом першого пояснення вважають той факт, що перший перекіс у посмішці волатильності було помічено як раз після краху ринку у 1987 році.

Другим варіантом пояснення є таке припущення, що опціони in the money колл стали дуже популярною альтернативою до прямої покупки акцій через більшу рентабельність інвестицій. Через це попит на опціони типу in the money колл зростає, що спричиняє зростання прихованої волатильності за меншої страйкової ціни.

Загальний аналіз корисний, але це все одно не відповідає на питання як обирати опціони, беручи до уваги зміни у прихованій волатильності. Зазвичай при покупці опціону варто спочатку зрозуміти лише один принцип, чим більшою є прихована волатильність тим більшим може бути прибуток і настільки ж більшими можуть бути грошові втрати. А отже найбезпечнішим варіантом завжди буде умовна найнижча точка посмішки волатильності. У нашому випадку з обмеженої вибірки найменші ризики буде мати опціон зі страйковою ціною у 270 доларів та прихованою волатильністю у 35.89, округлюючи до двох символів після крапки (див. таблицю 2).

З іншого боку графік прихованої волатильності від цін пут має більш стандартну форму посмішки, де збільшення йде як при зменшенні страйкової ціни так і при її збільшенні. Тоді, використовуючи таку ж логіку як і з графіком посмішки волатильності від опціонів колл для найменших ризиків варто обрати умовну найнижчу точку посмішки. Таким буде опціон зі страйковою ціною 260 доларів, а прихована волатильність при цьому буде дорівнювати 40.77, округлюючи до двох знаків після крапки (див. таблицю 2).

3.3. Висновки розділу 3

У цьому розділі ми провели розрахунки та аналіз на реальних статистичних даних за допомогою мови програмування Python, а також завдяки бібліотеці mibian змоделювали модель Блека-Шоулза для подальшого її використання. Дані для них були узяті з спеціалізованого сайту Nasdaq.com.

Завдяки бібліотекам math та statistics були розраховані дані для знаходження процентної ставки, а за допомогою pandas була проведена робота з таблицями даних, які зчитувалися з відповідних csv файлів.

Були отримані такі дані: робочих днів до кінця строку – 82, ціна базового активу – 254.72 долари, постійна річна волатильність – 26.85%, зводячи до двох знаків після крапки, та процентна ставка – 0.036, зводячи до трьох знаків після крапки.

Далі використовуючи отримані дані за допомогою бібліотеки mibian були створені моделі Блека-Шоулза у вигляді об’єктів, з яких були виражені приховані волатильності.

А використовуючи бібліотеку mathplotlib.pyplot було виведено графіки посмішок волатильності. Використовуючи їх ми проаналізували вибірку даних по опціонам та обрали найменш ризикові варіанти. А саме: опціон зі страйковою ціною 270 за графіком прихованих волатильностей від цін колл та опціон зі страйковою ціною 260 – від цін пут. Відповідно рівні їм волатильності: 35.89% та 40.77%, зводячи їх до двох знаків після крапки.

ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

Актуальність цієї роботи полягає у тому, що купівля та опціонів були та є активними сферами фінансового ринку. Головною проблемою була відсутність єдиної системи, що влаштовувала б кожного члена фінансового ринку. Саме тому модель Блека-Шоулза набула такого успіху та популярності у сфері оцінювання опціонів.

З'явилася ця модель у 1973 році під пером Фішера Блека, Роберта Мертона та Майрона Шоулза. Майже одразу вона набула гучного успіху у сфері оцінювання опціонних контрактів та зайняла одну з найважливіших позицій у роботі фінансового ринку.

Аби зрозуміти різницю у цій роботі були теоретично розглянуті більш примітивні моделі фінансового ринку, що будувалися на основі броунівського руху. Як будуються моделі на його основі було розглянуто у першому розділі. Там ми дійшли висновку, що моделі арифметичного броунівського руху не вистачає складності, а саме тому вона зазвичай використовується лише на рівні учбового матеріалу. У той же час геометричний броунівський рух знайшов собі місце як гарної основи для побудови більш гнучких та повних моделей фінансового ринку.

На сьогоднішній день люди усе ще використовують модель Блека-Шоулза для роботи з біржою, вона допомагає продавцеві зрозуміти яку ціну необхідно встановити на опціон, а для свідомого покупця це є обов'язковий інструмент у аналізі ринку та грамотного придбання цих самих опціонів. Для цього потрібні лише відносно невеликий набір даних та розрахунки за формулою.

Так для розрахунків за формулою необхідні такі дані як: базова ціна, ціна виконання, процентна ставка, кількість робочих днів до завершення дії опціону та ціни опціонів колл та пут.

Завдяки сучасним технологіям це все стало ще більш швидким та не складним процесом, який за необхідності чи бажання може зрозуміти та зробити навіть людина, що не має достатніх знань з математики. Так у цій роботі було розписано, що дані можна завантажити просто з відповідного сайту, а розрахунки можливі у багатьох виглядах. Починаючи від онлайн калькуляторів у вигляді сайтів і закінчуючи навіть повноцінними мовами програмування, так, наприклад, у Python існує бібліотека mibian, що приховує від користувача найскладнішу та найдовшу частину роботи над аналізом даних.

Саме завдяки сучасним технологіям у цій роботі було розглянуто вибірку реальних даних та проведені розрахунки. А саме завдяки сайту Nasdaq.com були отримані дані на опціони з ринку Microsoft Corporation Common Stock(MSFT) та дані на історичні зміни у ціні базового активу протягом року та півроку. Використовуючи можливості Python з історичних даних були отримані процентна ставка та постійна волатильність.

За припущеннями моделі Блека-Шоулза цього мало бути достатньо, але, як виявилося пізніше, постійна річна волатильність не відповідала волатильностям, що були отримані з розрахунків. З цього постало питання про недолік самої моделі. Недолік пояснювався двома пунктами. По-перше, зміни в часі впливали на ціни, але це все одно не пояснювало ситуацію повністю. По-друге, були не враховані більш важливі та впливові коливання фінансового ринку. Це стало видно після порівняння постійної волатильності за рік та постійної волатильності за півроку. Їх різниця чітко дає зрозуміти, що постійність та незмінність волатильності, які прописані у припущеннях моделі, неможливі.

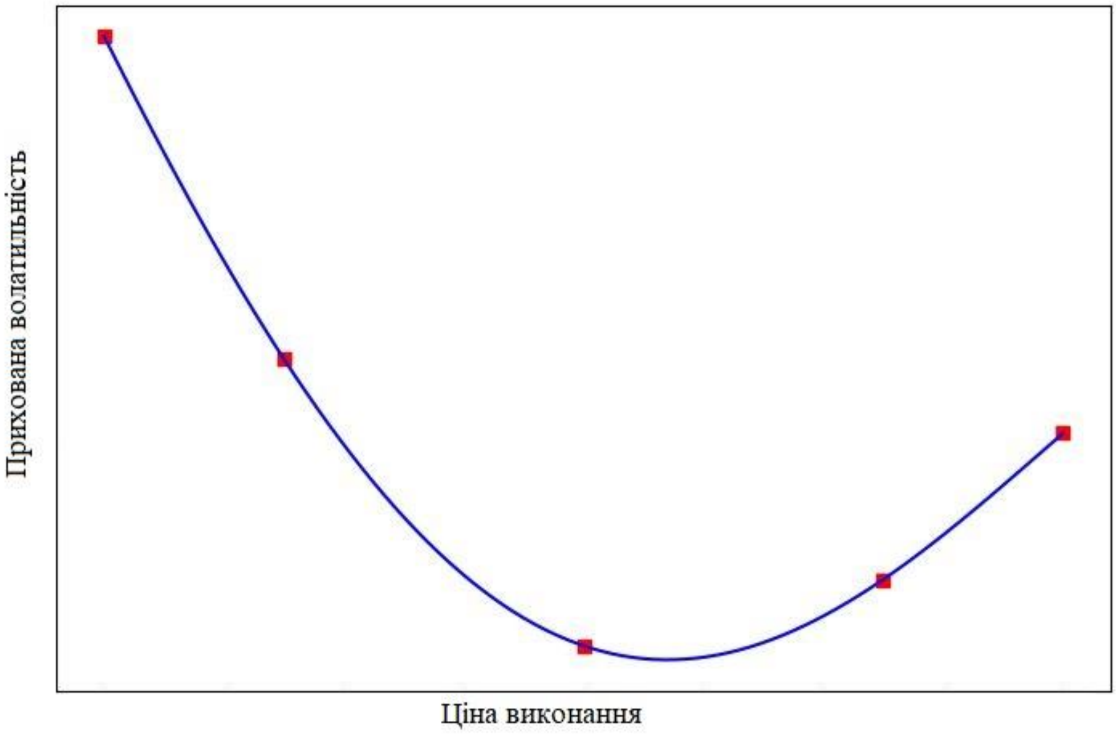
Саме з такого недоліку і створена так звана посмішка волатильності, що є графіком залежності прихованої волатильності від страйкової ціни. Прихованими волатильностями є виражені з формули Блека-Шоулза волатильності, що, як було зазначено вище, не відповідають постійній. Аналізуючи їх та графік посмішки волатильності було озвучено як саме використовується не ідеальність моделі для вигідної торгівлі опціонами, ризики якої можливо передбачити завдяки отриманому графіку. Саме завдяки такому аналізу було обрано найменш ризикові опціони для вибірки над якою проводилося дослідження.

Список літератури

1. Banton C. Interest rate. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/i/interestrate.asp (date of access: 30.05.2022).
2. Chen J. At the money. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/a/atthemoney.asp (date of access: 30.05.2022).
3. Chen J. How options work for buyers and sellers. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/o/option.asp (date of access: 27.04.2022).
4. Chen J. Learn about skewness. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/s/skewness.asp (date of access: 30.05.2022).
5. Chen J. Swap. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/s/swap.asp (date of access: 30.05.2022).
6. Chorpenning A. Call vs put options: what's the difference?. *Yahoo Finance - Stock Market Live, Quotes, Business & Finance News*. URL: https://finance.yahoo.com/news/call-vs-put-options-difference-225058413.html?guccounter=1&guce_referrer=aHR0cHM6Ly93d3cuZ29vZ2xlLmNvbS8&guce_referrer_sig=AQAAACUEsFCn5bAbUl-7WUNQP661cNdGMUsobyke8-fV8BiBsTuCq_Bciexdu0NQvh2jSKLmCLQtxi3mXJYYXf2KKUtPDHSvarzfiDat0_AXwIliurXr-pB-1pvmanqzzTJLjHojWKALSba715XCxUrBo-CAPQAxGhImHJg8bXnJWCqO (date of access: 27.04.2022).
7. Dhir R. How a forward contract works. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/f/forwardcontract.asp (date of access: 27.04.2022).
8. Dupire B. Monte carlo methodologies and applications for pricing and risk management. Risk Books, 1998. 340 p.

9. Fernando J. What is futures in investing?. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/f/futures.asp (date of access: 27.04.2022).
10. Hayes A. Financial markets. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/f/financial-market.asp (date of access: 30.05.2022).
11. Hayes A. How is the price of a derivative determined?. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/ask/answers/060315/how-price-derivative-determined.asp (date of access: 15.02.2022).
12. Hayes A. Volatility. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/v/volatility.asp (date of access: 30.05.2022).
13. Hayes A. What Is the Black-Scholes Model?. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/b/blackscholes.asp (date of access: 27.04.2022).
14. Karatzas I., Shreve S. E. A brownian model of financial markets. *Methods of mathematical finance*. New York, NY, 1998. P. 1–35. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6845-9_1 (date of access: 12.02.2022).
15. Liu Q. Options' prices under arithmetic brownian motion and their implication for modern derivatives pricing. *SSRN electronic journal*. 2007. URL: https://doi.org/10.2139/ssrn.959809 (date of access: 14.02.2022).
16. Mitchell C. How in the money (ITM) options work. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/i/inthemoney.asp (date of access: 30.05.2022).
17. Mitchell C. Out of the money (OTM) definition and example. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/o/outofthemoney.asp (date of access: 30.05.2022).
18. Mitchell C. Volatility smile definition and uses. *Investopedia*. URL: https://www.investopedia.com/terms/v/volatilitysmile.asp (date of access: 30.05.2022).

Додаток А. Теоретичний вигляд графіку посмішки волатильності.



Додаток Б. Повний код програми

```
# Importing libraries
from math import log, e
try:
  from scipy.stats import norm
except ImportError:
  print('Mibian requires scipy to work properly')

# WARNING: All numbers should be floats -> x = 1.0
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot
!pip install mibian

import mibian
import pandas as pd
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import statistics

# importing necessary data
data = pd.read_csv('Вибірка даних для перевірки з сайту Nasdaq.com.csv')
data.astype(float)
print(data)

log = pd.read_csv('Вибірка даних по змінам у базовій ціні
активу за рік з сайту Nasdaq.com.csv')
log.astype(float)
print(log)

hni = []

for i in log.index:
  if i == 0:
    continue

  hn = math.log(log.iat[i,0]/log.iat[i-1,0])
  hni.append(hn)

hn_av = sum(hni)/len(hni)
st_dev = statistics.stdev(hni)

print('Середнє з hn: ')
print(hn_av)
print('Стандартне квадратичне відхилення: ')
print(st_dev)

#Кількість робочих днів до строку виконання опціону
days_to_exp = 82
#underlying price
```

```
und_price = 254.72

#постійна волатильність та процентна ставка
vol = st_dev * math.sqrt(252)
vol_per = vol*100
print("Річна волатильність у процентах: ")
print(vol_per)
r = hn_av + math.pow(vol,2)/2
print("Процентна ставка: ")
print(r)

#приховані волатильності
impl_vol_call = []
impl_vol_put = []

for ind in data.index:
  c = mibian.BS([und_price, data['strike'][ind], r, days_to_exp], callPrice = da
ta['call last'][ind])
  impl_vol_call.append(c.impliedVolatility)
  c = mibian.BS([und_price, data['strike'][ind], r, days_to_exp], putPrice = dat
a['put last'][ind])
  impl_vol_put.append(c.impliedVolatility)

data['implied volatility call'] = impl_vol_call
data['implied volatility put'] = impl_vol_put

print(data)

#графік посмішки волатильності
plt.plot(data['strike'], data['implied volatility call'], label='call volatility
 smile')
plt.plot(data['strike'], data['implied volatility put'], label='put volatility s
mile')
plt.xlabel('Strike price')
plt.ylabel('Implied volatility')
plt.legend()
plt.show()
```