

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Метрична розмірність кістякових дерев графів

Кафедра математики факультету інформатики

„Прикладна математика” 113

Керівник курсової роботи

Олійник Б.В.

Старший викладач.

(підпис)

« ____ » _____

20 ____ р.

Виконав студент 3-го курсу

спеціальності «Прикладна
математика»

Рожков Ілля Олександрович

« ____ » _____

20 ____ р.

Метрична розмірність кістякових дерев графів

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО МЕТРИЧНУ РОЗМІРЕНІСТЬ КІСТЯКОВИХ ДЕРЕВ ГРАФІВ	6
1.1 Поняття «граф»	6
1.2 Матричне представлення графів	9
1.3 Властивості уніциклічних графів метричної розмірності 2	12
РОЗДІЛ 2 МЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФА	18
2.1 Зображення графа на площині. Теореми.....	18
ВИСНОВКИ.....	28
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	30

ВСТУП

Актуальність теми роботи. Теорія графів у математиці займається вивченням особливого виду математичних структур - графів, що використовуються для моделювання парних відношень між об'єктами. Графи у цьому контексті складаються з вершин (точок), які з'єднані ребрами (лініями). Враховуючи, що набір вершин можна використовувати для абстрагування будь-якого типу комп'ютерних даних, теорія графів глибоко вивчає взаємозв'язок між ними та дає відповіді на ряд питань розташування, налаштування мережі, оптимізації, узгодження та ін. В такому ключі структури даних і їх використання вперше розглянув відомий математик Леонард Ейлер, який сформулював основні поняття теорії графів як розділу математики. Теорія графів відіграє критичну роль у багатьох проблемах інформатики. Зокрема, теорія графів використовується для моделювання парних взаємозв'язків між об'єктами певної множини. Ряд комп'ютерних підходів було розроблено для полегшення використання графів, наприклад як SPANTREE або GTP для передачі даних. Тобто, графи - це метод візуальної ілюстрації даних та відношень між ними.

Мета графів - представити занадто численні, або складні дані, для їх адекватного опису в тексті, або алгоритмі. Забезпечення чіткості та коректності опису даних у графах забезпечують ефективність використання графів. Поняття метричної розмірності для метричних просторів було введено Л.Блюменталем у 1953 році в праці [1], але активні дослідження в цьому напрямку почались, коли це поняття було використане для графів незалежно один від одного в 1975 році Слатером [2] та у 1976 році Харарі та Мелтером [3]. Виявилось, що мінімальна кількість орієнтирів траєкторії руху робота є метричною розмірністю в метричному просторі, що визначається графом. Крім того, Слатером також було показано, що ідею пошуку метричної розмірності можна використовувати в довготермінових засобах навігації. Метрична розмірність та метричні генератори набули також застосувань у фармацевтичній хімії [4], пошуку в мережах [5], пошуку стратегій у грі Mastermind [6] тощо. Але проаналізована література не містить в необхідній мірі всі аспекти напрямку дослідження. Тому

для більш детального аналізу окресленого проблемного напрямку дослідження нами була вибрана дана тема роботи.

Метою дослідження є дослідити метричну розмірність кістякових дерев графів.

Для виконання сформульованої мети дослідження, нами були поставлені наступні завдання:

1. Проаналізувати поняття «граф».
2. Розглянути матричне представлення графів.
3. Дослідити властивості уніциклічних графів метричної розмірності 2.
4. Охарактеризувати операції над графами.
5. Звернути увагу на маршрути, ланцюги, цикли.
6. Встановити зображення графа на площині.
7. Визначити додаток теорії графів у різних галузях науки і техніки.
8. Проаналізувати зв'язок між метричною розмірністю уніциклічного графа і відповідних йому кістякових дерев.
9. Розглянути гомеоморфізм графів.
10. Дослідити хроматичне число графа.

Об'єктом дослідження є теоретичні відомості про метричну розмірність кістякових дерев графів.

Предметом дослідження є метричні характеристики графів.

Методи дослідження в роботі використані такі: пошуковий по наявній методичній та науковій літературі із аналізом знайденого матеріалу, порівняння, класифікація, проектування, теоретичне моделювання, з'ясування причинно-наслідкових зв'язків, систематизація, абстрагування та конкретизація, уявний експеримент, спостереження, бесіда, інтерв'ю, анкетування, тестування, аналіз документації та результатів діяльності дослідників з проблеми проведеного дослідження та експертна оцінка і практичний експеримент.

Джерельна база дослідження. Робота ґрунтується на аналізі законодавства України та зарубіжних країн, науково-методичної літератури,

методичних посібників, наукових статей, періодичних видань та напрацювань сучасних та попередніх вчених і дослідників в галузі теорії графів, математиці.

Наукова новизна роботи полягає у наявності оригінального дослідницького матеріалу по напрямку проведеного дослідження. В роботі вперше використаний пошуковий аналіз.

Теоретична та практична цінність роботи полягає в наявності теоретичного матеріалу по дослідженню, відсіяного з-поміж іншого в процесі пошуку інформації по темі, та в систематизації матеріалу напрямку дослідження. Проведене дослідження має більш глибокий ступінь аналізу напрямку дослідження, спираючись на попередні дослідження вчених, дисертантів та дослідників.

Структура роботи. Робота складається з 30 листів друкованого тексту, рисунків, і налічує 16 джерел використаної літератури.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО МЕТРИЧНУ РОЗМІРЕНІСТЬ КІСТЯКОВИХ ДЕРЕВ ГРАФІВ

1.1 Поняття «граф»

Зображення графа містить точки та ребра. Однак, точки та ребра не є графом, це лише елементи зображення графа, як наприклад показано на рис.1.

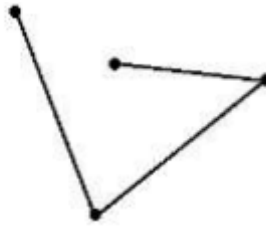


Рис.1 – Загальний вигляд графа

Щоб перейти до визначення графа розглянемо спочатку кілька прикладів. Приклад 1. Розглянемо множину V студентів в аудиторії. Потужність множини $|V| = 21$. Якщо студенти сидять по двоє за партою і студентів позначимо точками, то студентів за однією партою можна позначити ребром. Маємо зображення, що показано на рис. 2. Із зображення зрозуміло, що парти стоять в два ряди, чотирнадцять студентів сидять по двоє за партою, п'ять студентів сидять по одному.

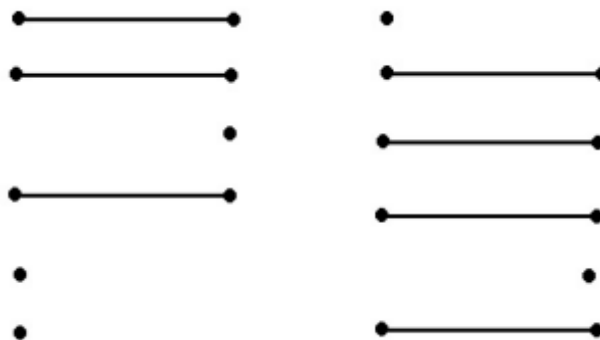


Рис. 2 – Розміщення студентів за партами

На рисунку 3 показано розміщення студентів за партами, відповідно до прикладу 1. Із рис.3 видно, що в аудиторії залишилося 7 студентів, один

студент сидить сам за партою, а ще шість студентів сидять попарно, проте парти перекомбіновані, але це не значить що вони розміщені одна на одній.

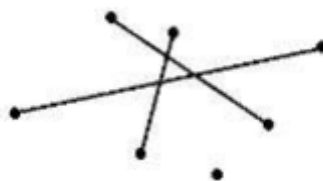


Рис. 3 – Розміщення 7 студентів за партами

В обох випадках, описаних в прикладі 1 і показаних на рис 2-3 маємо справу з графом. Тобто, використання графа дозволяє підвищити інформативність передачі матеріалу і його засвоєння. Можна сказати, що граф це не просто зображення на площині. Граф – це абстрактний комбінаторний об'єкт, що складається з двох множин V (vertex) – множина вершин і E (edge) – множина ребер. Саме тому в прикладі 1 кожне ребро має дві вершини – двох студентів, що сидять за однією партою. Приклад 2 – Розглянемо ту ж множину студентів в аудиторії V , що являють собою вершини графа. А в якості відношення між вершинами візьмемо співпадіння днів народження – це буде множина ребер E . Тобто, V – множина студентів в аудиторії, E – множина людей зі співпадаючим днем народження. Розглянемо приклад 3, що включає складнішу конструкцію – з орієнтованими ребрами. Приклад 3. Повернемося до множини студентів в аудиторії V , а в якості відношення, що характеризує множину ребер, розглядатимемо симпатію між ними. В цьому разі симпатія є наведеною. І може бути як односторонньою, так і взаємонаведеною, як показано на рис.4.

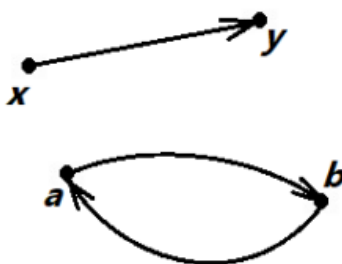


Рис. 4 – Орієнтовані графи

Як видно з верхнього графа на рис. 4, $E = (x, y)$, тобто x симпатизує y . Проте, зворотне не вірно $(x, y) \neq (y, x)$. В цьому разі ребра зображають зі стрілкою і називають дугами, а сам граф називають орієнтований граф, або скорочено оргграф. Із нижнього графа на рис.4 можна зробити висновок, що $(a, b) = (b, a)$, тобто між a і b існує взаємна симпатія. Приклад 4. Задача про Кенігсбергські мости. Ця задача сформульована в XVIII ст Леонардо Ейлером поклала початок теорії графів. Суть задачі в наступному. Ейлер, живучи в Кенігсберзі любив прогулюватися понад річкою і через мости. І от в нього виникало запитання чи існує такий шлях, щоб вийти з дому, обійти всі мости і повернутися додому але обійти мости так, щоб кожен міст пройти рівно один раз. Ейлер сам цю задачу сформулював і сам її розв'язав тим самим поклавши початок використанню графів у математиці. Більш того у цьому разі суша – це вершини графа, мости – ребра. Тоді схема мостів у задачі Ейлера приводить нас до графа, що показаний на рис. 6. Як видно з рис.6, з вершини до вершини є кілька ребер. Такі ребра називаються кратними, а сам граф носить назву – Мультиграф.

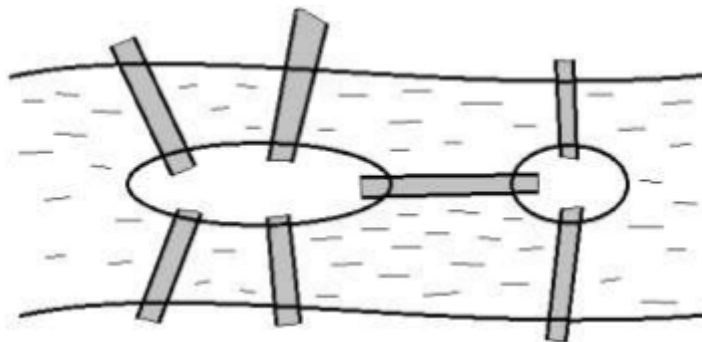


Рис. 5 – Схема мостів у задачі Ейлера

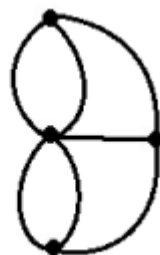


Рис. 6 – Мультиграф до задачі Ейлера

В цілому ми розглянули три види графів: простий, орієнтований і мультиграф. Приклад 4. Розглянемо структуру певного Web-сайту де вершинами будуть сайти, а ребрами – гіперлінки. У цьому разі зображення графа може мати вигляд, наведений на рис. 7. Зліва на рис. 7 показано гіперлінк сторінки на саму себе. Ребро такого типу називається петля. Як видно з рис. 7, петлі можуть бути кратні. Граф, що містить лише петлі (x, x) називається псевдографом.

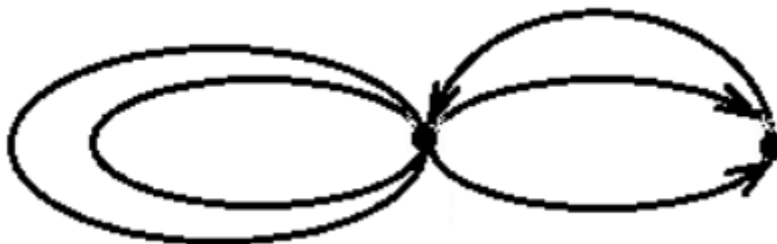


Рис. 7 – Граф Web-сайту

В цілому, граф на рис. 7 є ор-, мульти-, псевдографом. Таким чином, підходимо до визначення. Граф $G =$ – це абстрактний комбінаторний об’єкт, що складається з двох множин. V – довільна множина вершин, або об’єктів. Множина може бути нескінченною. E – множина ребер, або пар об’єктів з V . При цьому 1. Якщо немає кратних ребер, то кожна пара об’єктів зустрічається в множині V не більше одного разу. 2. Якщо це не орграф, то пари в E – не впорядковані. 3. Якщо немає петель, то $(x, x) \notin E$. Якщо пункт 1 не виконується – маємо мультиграф. Якщо пункт 2 не виконується – маємо орграф. Якщо пункт 3 не виконується маємо псевдограф. Можлива також комбінація цих пунктів, наприклад псевдо- мультиграф і т.п. Тобто, графом можна оперувати не використовуючи його зображення на площині.

1.2 Матричне представлення графів

Використовується цілий ряд способів представлення графів, що обумовлено областю їх використання. Наприклад, матричне представлення графів використовується в інформаційних технологіях. 1. Явний спосіб. Граф

розглядається як дві множини $G = \langle V, E \rangle$ де V – множина вершин $V = \{a, b, c, d\}$ і E – множина ребер $E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (b, c)\}$. 2. Графічний спосіб. Подання графа у вигляді зображення є поширеним, оскільки це зручний і наочний спосіб. Для графа G , описаного в способі 1, маємо зображення на рис. 12 зліва (1), або справа (2). Будь-яке з цих двох зображень графа G буде вірним і, навіть, можна сказати, що існує нескінченна множина таких зображень одного й того ж графа.

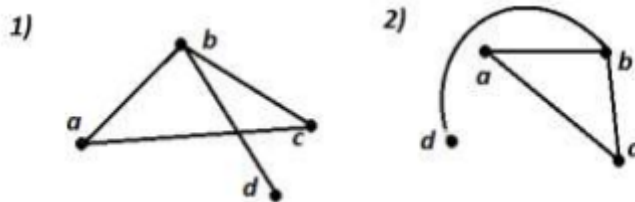


Рис. 8 – Два зображення графа G

3. Матриця суміжності. Граф подається у вигляді матриці суміжності AG . Спосіб використовується при роботі комп'ютера з графами. Припустимо граф G має певну кількість вершин n , тобто - потужність множини вершин графа $|V| = n$. Тоді можна записати матрицю AG , розміром $n \times n$, яка містить множину елементів $AG = (a_{i,j})_{n \times n}$. Тут індекси i та j змінюються від 1 до n : $i, j = 1, \dots, n$, а значення $a_{i,j}$ приймає значення 1, коли між відповідними вершинами v_i та v_j існує ребро, або приймає значення нуль, якщо такого ребра не існує. Тобто,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Як приклад, запишемо матрицю суміжності для графа G , показаного на рис. 10. Граф має шість вершин, тому $n=6$ і квадратна матриця має розмір 6×6 . $AG =$

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	1	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0	0
v3	1	1	0	0	0	0
v4	0	0	0	0	0	0
v5	0	0	0	0	0	1
v6	0	0	0	0	1	0

З означення матриці суміжності (2) витікає наступне: для не орієнтованого графа матриця суміжності завжди симетрична відносно головної діагоналі (відношення між вершинами є симетричними, користуючись апаратом теорії відношень); для не орієнтованого графа матриця відображає відношення сусідства вершин графа. 4. Матриця інцидентності. Матриця BG зв'язує вершини та ребра в деякому графі G. Як і попередній, спосіб використовується при роботі з графами на комп'ютері $BG = (b_{ij})_{n \times |E|}$ де $i, j = 1, \dots, n$. b_{ij} приймає значення 1, якщо вершина v_i є кінцем ребра e_j та навпаки – приймає значення нуль, якщо умова не виконується. У якості прикладу представимо граф G, поданий на рис. 10, матрицею інцидентності. Позначимо ребра графа наступним чином $e_1=(v_1, v_2)$, $e_2=(v_2, v_3)$, $e_3=(v_1, v_3)$, $e_4=(v_5, v_6)$. Маємо наступну матрицю інцидентності BG =

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	0	1	0
v_2	1	1	0	0
v_3	0	1	1	0
v_4	0	0	0	0
v_5	0	0	0	1
v_6	0	0	0	1

Для простого графа маємо дві важливі властивості матриці інцидентності. Перша полягає в наступному - кожен стовпчик матриці інцидентності містить рівно дві одиниці. Друга властивість матриці інцидентності – сума елементів кожної зі строк матриці дає значення степені вершини. Зокрема, для вищенаведеної матриці, строка v_4 дає суму елементів строки рівну нулеві, що відповідає $\deg(v_4)=0$ для графа G, відповідно до рис. 10. 5. Списки суміжності. Спосіб включає перерахунок всіх вершин, суміжних даній. Тобто: $\forall v \in V$ виконується $\Gamma(v) = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$. Наприклад, для графа G, показаного на рис. 10, маємо наступні списки суміжності

$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3\},$$

$$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\},$$

$$\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2\},$$

$$\Gamma(v_4) = \emptyset,$$

$$\Gamma(v_5) = \{v_6\},$$

$$\Gamma(v_6) = \{v_5\}.$$

Можна також відзначити, що в літературі також вказують на інші способи представлення графів. Однак, можна вважати, що вищенаведені п'ять способів є основними.

1.3 Властивості уніциклічних графів метричної розмірності 2

Визначення 1.14. 1) Послідовність вершин $a_1 a_2 \dots a_n$ і ребер $e_1, \dots, e_{n-1}$ графа G , де $e_i = a_i a_{i+1}$ для всіх $i \in [1..n - 1]$, називається маршрутом. 2) Ми говоритимемо, що певний вище маршрут проходить по ребрах $e_1, \dots, e_{n-1}$ та за вершинами $a_1, a_2, \dots, a_n$. 3) Маршрут називається замкненим, якщо $a_1 = a_n$. Зазначимо, що вершини маршруту не обов'язково є різними. Більше того, ребра, якими проходить маршрут, не обов'язково різні. Визначення 1.15. 1) Шлях - це маршрут $a_1 a_2 \dots a_n$, що не проходить ні з якого ребра двічі. Крім того, ми говоритимемо, що шлях це підграф графа G , що складається з вершин і ребер, за якими цей шлях проходить. 2) Вершину a_1 назвемо початком, а вершину a_n - кінцем шляху. 3) Шлях називається простим, якщо всі вершини $a_1, \dots, a_n$ різні. 4) Довжина шляху - це його ребер. 5) Якщо граф P - простий шлях, то його начинка $\text{Int}(P)$ - це безліч його вершин, відмінних від початку і кінця цього шляху. Вершини $\text{Int}(P)$ називаються внутрішніми вершинами шляху P . Отже, шлях у нас — це одночасно послідовність вершин, якої всі пари сусідніх вершин з'єднані ребрами, а також підграф з цих вершин та ребер. Ця двозначність надалі ніскільки не завадить викладу матеріалу. Зауваження 1.3. 1) Строго кажучи, шлях - неорієнтований граф. Але при роботі з шляхами зручно вводити напрямок проходження по дорозі, відрізняти початок та кінець шляху один від одного. При

заміні на прямику на протилежний шлях як граф не змінюється.2) Говорячи “шлях від x до y ” ми матимемо на увазі простий шлях з початком x та кінцем y .

Визначення 1.16. 1) Нехай $x, y \in V(G)$. Назвемо x - y -шляхом будь-який простий шлях від x до y . 2) Нехай $X, Y \subset V(G)$. Назвемо XY -шляхом будь-який простий шлях з початком у множині X і кінцем у множині Y , внутрішні вершини якого не належать множин X і Y . 3) Відстанню між вершинами x та y графа G називається довжина найменшого x - y -шляху. Позначення: $\text{dist}_G(x, y)$. Зазначимо, якщо $u \in X \cap Y$, то ми вважаємо вершину u XY -шляхом.

Визначення 1.17. Нехай $x, y \in V(G)$. Назвемо x - y -шляхи $P_1, \dots, P_k$ незалежними, якщо $\text{Int}(P_i) \cap \text{Int}(P_j) = \emptyset$, для будь-яких $i, j \in [1..k]$. Як правило, ми матимемо на увазі, що аналізований шлях-простий, і задавати його як послідовність вершин: $a_1 a_2 \dots a_n$. Звичайно, за наявності кратних ребер можна вибрати різні ребра, що з'єднують пари сусідніх вершин шляху, але, як правило, це в наших міркуваннях не матиме значення.

Визначення 1.18. 1) Якщо P - це шлях, а $x, y \in V(P)$, ми будемо через xP у позначати ділянку шляху P від вершини x до вершини y . 2) Через xP та P у ми будемо позначати ділянки шляху P від x до кінця і від початку до y , відповідно. Ми будемо використовувати введені вище позначення та для стикування різних шляхів: так, наприклад, $xP yQz$ - це шлях, що проходить спочатку ділянку шляху P від x до y , а потім ділянку шляху Q від y до z .

Зауваження 1.4. Як правило, ми для зручності фіксуємо напрямок проходу шляху P . На ділянці xP у цей напрямок задано порядком вершин x та y і може відрізнитись від заданого раніше напрямку проходу шляхи P . Тепер ми можемо суворо визначити анонсовану раніше



операцію графа.

Рис. 9. Підрозбиття графів

Визначення 1.19. 1) Граф H_0 називається підрозбиттям графа H , якщо H_0 може бути отриманий з H заміною деяких ребер на прості шляхи (кожне ребро xy , що замінюється, змінюється на простий x - y -шлях). При цьому, всі вершини, що додаються, різні і мають ступінь 2. 2) Вершини графа H_0 , що є вершинами

графа H (тобто не є внутрішніми вершинами доданих шляхів), називаються головними. 3) Через $G \supset H$ будемо позначати, що граф G містить як підграфа підрозбиття графа H . На рисунку 9 ліворуч зображено граф H , а праворуч - його підрозбиття граф H_0 .

Визначення 1.20. 1) Цикл - це послідовність вершин $a_1 a_2 \dots a_n$ та різних ребер $e_1, \dots, e_n$ графа G , де $e_i = a_i a_{i+1}$ всім $i \in [1..n]$ (Ми вважаємо, що $a_{n+1} = a_1$). 2) Ми говоритимемо, що певний вище цикл проходить по ребрам $e_1, \dots, e_n$ і за вершинами $a_1, a_2, \dots, a_n$. 3) Крім того, ми говоритимемо, що цикл - це підграф графа G , що складається з вершин і ребер, якими цей цикл проходить. 4) Цикл називається простим, якщо всі вершини $a_1, \dots, a_n$ різні. 5) Довжина циклу - це кількість його ребер. 6) Простий цикл із трьох вершин ми називатимемо трикутником. Як і в ситуації з шляхом, цикл - це одночасно послідовність вершин та підграф. Ми вважатимемо, що цикл не змінюється при циклічній перестановці його вершин. Вершини циклу довжини n як правило нумеруватимуться відрахуваннями по модулю n (тобто для циклу $a_1 \dots a_n$ ми вважатимемо, що $a_{n+i} = a_i$)

Визначення 1.21. Нехай C - простий цикл, а x, y - дві його несусідні вершини. 1) Вершини x та y ділять цикл C на два шляхи з кінцями x та y , які ми називатимемо дугами. 2) Якщо $xy \in E(G)$, назвемо ребро xy хордою або (що те саме) діагоналлю циклу C . Як правило, для зручності заданий напрямок обходу циклу (хоча зміна напрямку обходу на протилежне та не змінює цикл як граф). У цьому випадку для позначення дуги циклу C з початком x і кінцем y (тобто від x до y у напрямку обходу циклу) ми також будемо застосовувати позначення xSy . Дуга простого циклу є найпростішим шляхом. Тому, зокрема, у дуги визначені кінці та нутроці.

Визначення 1.22. Індукований цикл графа G - це простий цикл, не має діагоналей. Це визначення логічно у світлі сказаного раніше: очевидно, індуковані цикли графа — це ті цикли, що є його індукованими підграфами.

Визначення 1.23. Нехай C — простий цикл. Простий шлях L називається

трансверсал циклу C , якщо кінці шляху L - різні вершини C , а внутрішні вершини не належать циклу C . Довжиною трансверсали назвемо довжину шляху L .

Зауваження 1.5. Зазначимо, що діагональ циклу – це трансверсаль довжини 1. Лема 1.2. 1) Для будь-якого циклу Z існує такий простий цикл Z_0 , що $V(Z_0) \subset V(Z)$ та $E(Z_0) \subset E(Z)$. 2) Якщо у графі є непарний цикл, тобто і простий непарний цикл.

Доведення. 1) Розглянемо будь-яку вершину a нашого циклу і підемо від неї доти, доки не опинимося у вершині, в якій вже були. Це, очевидно, відбудеться (ми маємо повернутися в a). Нехай перша вершина, що повторилася, - це b . Тоді у вершині b ми закінчимо, отримавши простий цикл, всі вершини та ребра якого входять у вихідний цикл. 2) Припустимо, що наш цикл - не простий і почнемо як у попередньому пункті: знайдемо першу вершину, що повторилася b . Тоді можна змінити порядок обходу нашого великого циклу Z у вершині b і розіркнути його на два цикли: простий цикл Z_0 , описаний у пункті 1 та цикл Z_1 з ребер циклу Z , що залишилися. Ці цикли мають загальну вершину v і $e(Z) = e(Z_1) + e(Z_0)$, отже, або $e(Z_0)$ непарно (тоді цикл Z_0 -шуканий), або $e(Z_1)$ непарно, тоді продовжимо міркування з меншим непарним циклом Z_1 .

Лема 1.3. Якщо $\delta(G) \geq 2$, то у графі G є простий шлях довжини хоча б $\delta(G)$ та простий цикл довжини хоча б $\delta(G) + 1$. **Доведення.** Розглянемо шлях максимальної довжини $P = a_1 a_2 \dots a_n$ у нашому графі G . З його останньої вершини a_n виходить хоча б $\delta(G) - 1$ ребер у вершини, відмінні від a_{n-1} . Оскільки шлях P не можна продовжити, вершина a_n суміжна з вершинами шляху P . Нехай a_m — вершина найменшого номера, суміжна з a_n . Тоді в множині $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$ лежать не менше $d_G(a_n) \geq \delta(G) \geq 2$ кінці виходять з a_n ребер. Отже $a_m = a_{n-1}$ і ми отримуємо цикл $a_m \dots a_{n-1} a_n$, у якому не менше $\delta(G) + 1$ вершин. Тепер наявність шляху довжини хоча б $\delta(G)$ очевидна. **Лема 1.4.** Нехай $t \in \mathbb{N}$. Для будь-якого графа G з $e(G) \geq t \cdot v(G)$ існує підграф G_0 з $\delta(G_0) \geq t + 1$.

Доведення. Припустимо, що $\delta(G) < t + 1$. Тоді у графі є вершина v_1 ступеня трохи більше t . Нехай $G_1 = G - v_1$, тоді $v(G_1) = v(G) - 1$, $e(G_1) = e(G) - d_G(v_1) \geq t \cdot (v(G) - 1) = t \cdot v(G_1)$. Аналогічно, на і кроці ми видалятимемо з графа G_i

чергову вершину ступеня не більше t і отримувати такий підграф G_{i+1} , що $v(G_{i+1}) = v(G_i) - 1$ та $e(G_{i+1}) \geq t \cdot v(G_{i+1})$. Оскільки така нерівність на кількість ребер явно не виконана для графа на одній вершині, процес видалення вершин закінчиться і на деякому кроці ми отримаємо такий граф G_k , що $\delta(G_k) \geq t + 1$. Безпосередньо з цих двох лем виводиться таке твердження.

Наслідок 1.1. Нехай $t \in \mathbb{N}$. Якщо $e(G) \geq t \cdot v(G)$, то у графі G є простий шлях довжини хоча б $t+1$ та простий цикл довжини хоча б $t+2$. Спочатку нагадаємо структуру уніциклічних графів, метричної розмірності 2, що раніше було опубліковано у статтях [11–14].

Лема 1. [11] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф. Якщо метрична розмірність G дорівнює 2, то для будь-якої вершини $v \in V \setminus V_b$ має місце нерівність:

Лема 2. [11] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф і $\dim(G) = 2$. Тоді в графі G існує не більше двох основних вершин, в кожену з яких проектується рівно одна 2-листова вершина. Наведемо поняття базисного графа, а також повного обплетення базисного графа.

Означення 8. Нехай G_1 — базисний граф. Позначимо через u та v основні вершини G_1 . Уніциклічний граф G називається повним обплетенням графа G_1 ланцюгами $L_1, L_2, \dots, L_r$, якщо G отриманий з G_1 склеюванням вершин степеня 2, що належать циклу базисного графа G_1 , з кінцями ланцюгів $L_1, L_2, \dots, L_r$ таким чином, що кожна вершина степеня 2 циклу склеюється з кінцем лише одного ланцюга, а також для кожної 1-листової вершини w та суміжної з нею вершини a виконується нерівність

$$d_G(u, v) + d_G(v, w) + 1 \neq d_G(u, a).$$

РОЗДІЛ 2

МЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФА

2.1 Зображення графа на площині. Теореми

Теорема 1.2.1. В кінцевому графі число вершин непарної ступені парне. Граф називається однорідним 1) ступені n , якщо локальні ступені у всіх його вершинах дорівнюють n :

$$\rho(a) = n, \quad a \in V. \quad (1.2.8)$$

Прикладами однорідних графів є графи, складені ребрами та вершинами п'яти правильних багатогранників, або платонових тіл: тетраедра куба, октаедра, додекаедра, ікосаедра (рис. 1.2.1)

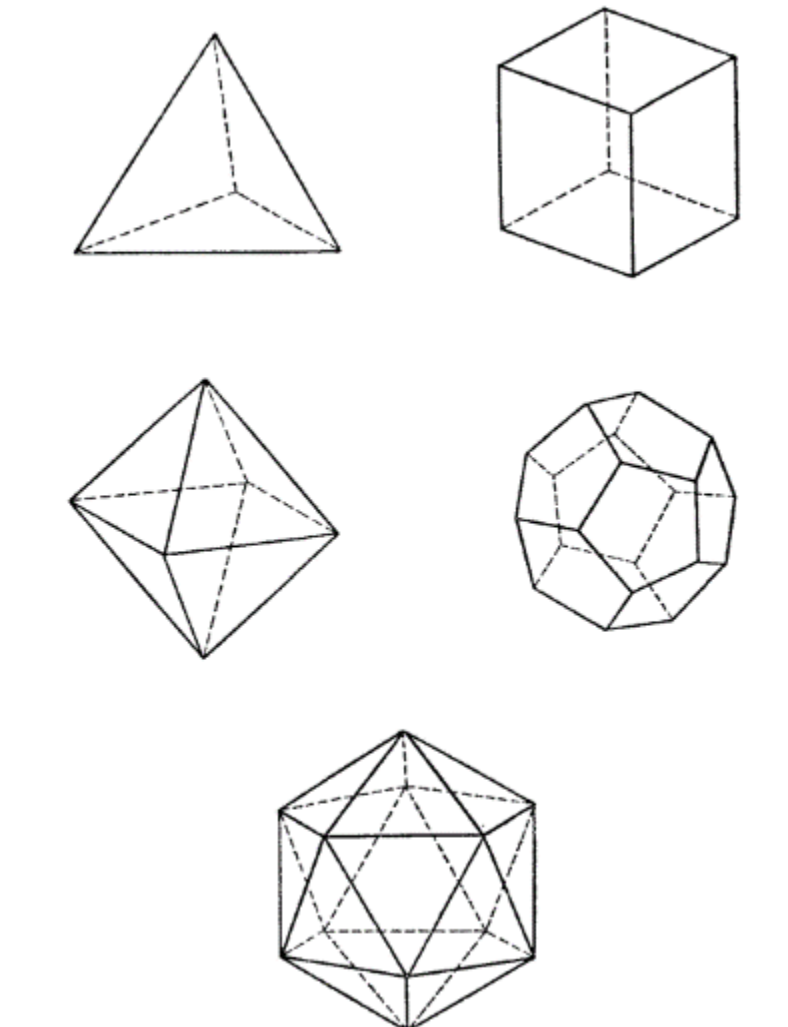


Рис. 1.2.1. Теорема 1.2.1. Приклад графів.

Теорема 2.3.1. Взаємно однозначні відображення множини V на себе визначаються однорідними орієнтованими графами ступені 1 на v . Зв'язні компоненти такого графа є і орієнтованими простими циклами (2.3.4.), або двосторонньо-безкінечними орієнтованими простими ланцюгами (2.3.5.) (рис. 2.3.1.). В такому графі петля може з'явитися тільки у випадку $\tau(a) = a$, тобто якщо вершина a є нерухома крапка відображення τ . Транспозиція (a, b) двох вершин відповідає одному циклу, що складається з двох ребер протилежної орієнтації, з'єднуючих a і b , і нерухомим до решти вершин (рис. 2.3.2.).



Рис. 2.3.1.



Рис. 2.3.2.

Рис. 2.3. 1, 2.3.2. Приклади графів.

Теорема 3.1.1. Кінцевий граф G є єйлеровим графом тоді, і тільки тоді, коли 1) G зв'язний; 2) Всі його локальні ступені парні. Доведення.

Умова 1) Очевидно, необхідно. Далі, кожного разу, коли єйлерів цикл проходить через якусь вершину, він повинен увійти в неї по одному ребру і вийти по іншому, тому умова 2) також необхідна. Уявімо тепер, що ці дві умови виконані. Почнемо ланцюг P у довільній вершині a графа G і будемо продовжувати його, наскільки можливо, весь час через нові ребра. Так як в кожній вершині число ребер парне, цей процес може закінчитися тільки в a .

Якщо P складається не з усіх ребер графа G , тоді видалимо з G частину P , що складається з ребер цього циклу. Графи P та G мають парні локальні ступені, теж повинно бути справедливо і для графа P . Так як граф G зв'язний, в P повинна знайтись вершина b , інцидентна також ребрам із P . З b можна побудувати новий ланцюг P' , що складає ребра тільки з P . Знову такий ланцюг може закінчитися тільки при поверненні в b . Але тоді з P і P' можна скласти новий цикл $P_1 = P \cup P'$ (а, b),

Який повертається в a і складає більше ребер, ніж P . Якщо P_1 не є ейлеровим циклом, то ця побудова повторюється. Коли процес закінчиться, ейлеров цикл буде побудований (рис. 3.1.4.).

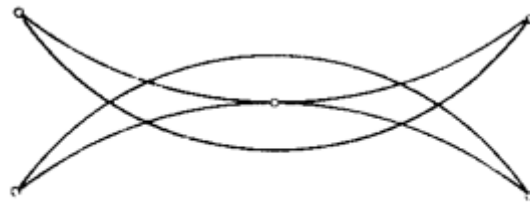


Рис. 3.1.3.

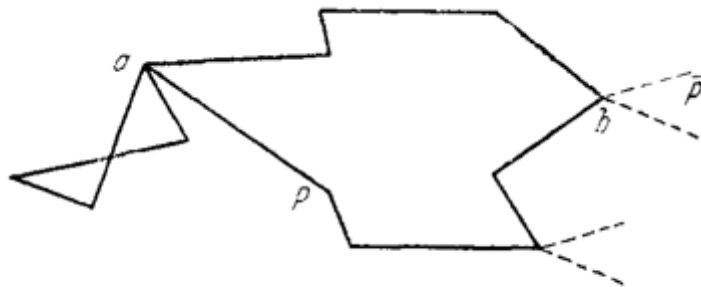


Рис. 3.1.4.

Рис. 3.1.3, 3.1.4. Приклади графів.

Теорема 4.1.2. Будь-яке нетривіальне кінцеве дерево має хоча б дві кінцеві вершини і хоча б одне кінцеве ребро. Якщо вибрана деяка вершина a_0 , як на рис. 4.1.1, то назвемо a_0 коренем дерева T , а саме дерево — деревом з коренем.

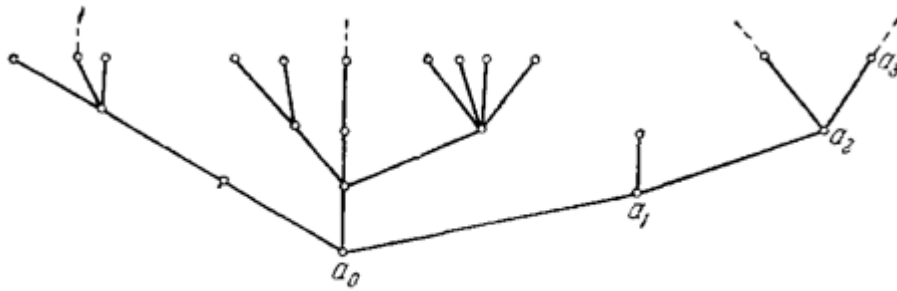


Рис. 4.1.1.

Рис. 4.1.1. Приклад графу.

Іноді здається зручним виділити в дереві T деякий окремий ланцюг $P = \dots, (a-2, a-1), (a-1, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots$ (4.1.1.)

І називати P стовбуром T . Цей стовбур може бути або кінцевим, або односторонньо-безкінечним, або двосторонньо-безкінечним. Кожна вершина U в T зв'язана з найближчою вершиною a_1 з P єдиним ланцюгом. Будемо говорити в цьому випадку, що U належить гілці дерева T , що виходить з a_1 . (рис. 4.1.2.). Наступний результат про дерева належить Келі, який досліджував ці графи в зв'язку з хімічними структурними формулами.

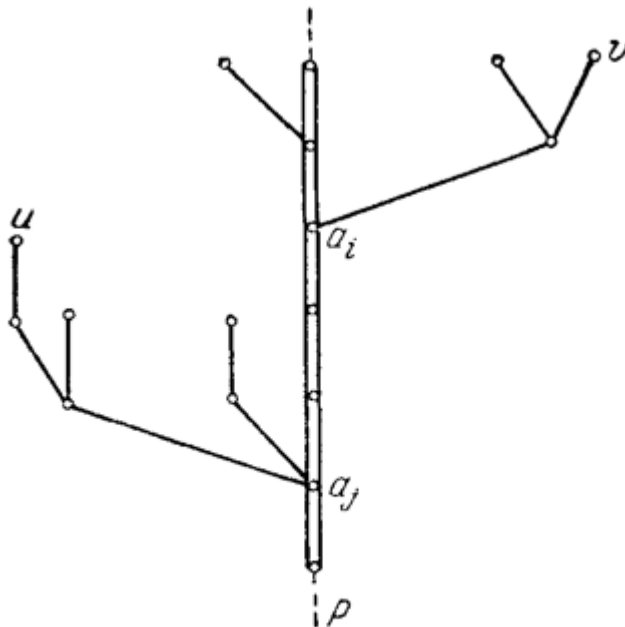


Рис. 4.1.2.

Рис. 4.1.2. Приклад графу.

Теорема 5. [14] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф, для якого $\dim(G) = 2$. Якщо граф G є парним, то степінь будь-якої вершини в графі менший, ніж 4.

Якщо G непарний, то максимальна кількість вершин зі степенем 4 дорівнює двом.

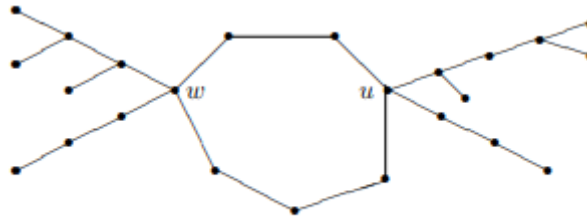


Рис. 10. Дві основні вершини мають степінь 4

Однак вершини степеня 4 можуть бути розташовані не довільним чином. Саме тому були введені родини графів типу «павучок» та «напівпавучок». Нагадаємо їх. Означення 10. Непарний уніциклічний граф G з $|V_b| = 2k + 1$ називається графом типу «павучок», якщо виконуються такі умови: (А) для будь-якої вершини $v \in V \setminus V_b$

$$\deg_G(v) \leq 3;$$

(Б) для будь-якої основної вершини w графа G існує рівно одна 2-листова вершина, що проектується в w ; (В) в циклі G_b графа G існує рівно дві вершини w і u степеня, більшого, ніж 2; крім того, принаймні одна з вершин w та u має степінь 4, кожна з вершин w і u є основною вершиною і (або) вершиною степеня 4 та виконується рівність:

$$d_G(w, u) = k.$$

Наприклад, граф G , зображений на рисунку 10, є графом типу «павучок» з двома вершинами, що мають степінь 4 і є основними. Означення 11. Непарний уніциклічний граф G з $|V_b| = 2k + 1$ називається графом типу «напівпавучок», якщо виконуються такі умови: (А) для будь-якої вершини $v \in V \setminus V_b$

$$\deg_G(v) \leq 3;$$

(Б) в циклі G_b графа G існує рівно одна вершина w степеня більшого, ніж 2, крім того, $\deg(w) = 4$; (В) вершина w може бути основною, в такому випадку існує рівно одна 2-листова вершина, що проектується в w .

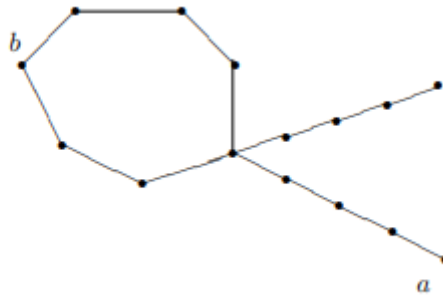


Рис. 11. «Граф-напівпавучок» без основних вершин

Граф G на рисунку 11 є графом типу «напівпавучок», у якого вершина степеня 4 не є основною. Для графів типу «павучок» та «напівпавучок» також можна використати конструкцію обплетення, наведену в означенні 9. Таким чином, отримуємо обмеження для уніциклічних графів, що мають вершини степеня 4 та метричну розмірність 2.

Теорема 6.5.1. Зв'язний граф складає максимальні дерева, і кожне з них покриває вершини графа. Цим максимальним деревам дають різні назви, наприклад: скелети, або остови, або наповнення графа G ; ми будемо називати їх просто максимальними деревами.

Нехай $T(G)$ – максимальне дерево в кінцевому зв'язному графі G . Тоді $T(G)$ можна отримати з G послідовним видаленням ряду ребер:

$$E_1, E_2, \dots, E_k, \quad (6.5.1)$$

Кожне з яких вибрано з якого-небудь циклу в попередньому графі. Очевидно, всі ці графи зв'язані. Число вершин $T(G) \in V_v$, тобто те ж, що і в G .

Тоді по теоремі 4.1.3 число ребер в дереві $T(G)$ дорівнює:

$$V_e(T) = V_v - 1.$$

Число k ребер в (6.5.1), яке потрібне, щоб звести G до $T(G)$, дорівнює:

$Y(G) = V_e - V_v + 1$, (6.5.2), де V_e - число ребер в G .

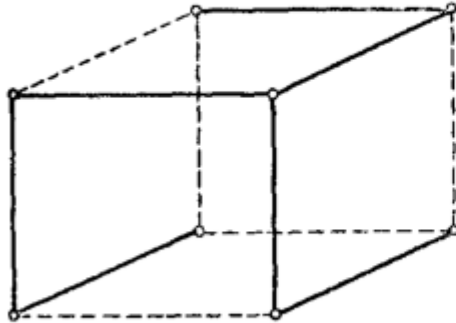


Рис. 6.5.1.

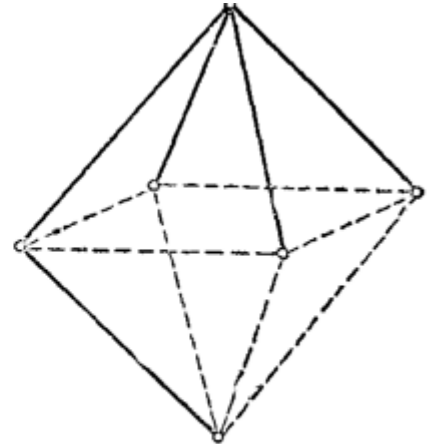


Рис. 6.5.2.

Рис. 6.5.1. Приклади графів.

Теорема 7.4.1. Нехай M є паросполучення деякої підмножини A множини V в V' , а M' – паросполучення деякої підмножини A' множини V' в V . Тоді з ребер в M і M' можна побудувати таке часткове паросполучення між V в V' , в якому беруть участь всі вершини з A і A' .

Доведення. В кожній вершині $a' \in A'$ – єдине ребро $E'(a' V')$ з M' . Тому граф $M \cup M'$ має не більше двох ребер в кожній вершині з $A \cup A'$ і більше одного ребра в інших вершинах з $V \cup V'$. Якщо дві вершини a_0 і a_0' з'єднані одним і тим же ребром $E = (a_0, a_0')$ в M_0 і M'_0 , то ми зберігаємо при паросполученні сопоставимі a_0, a_0' . Уявімо, що $E_0 = (a_0, a_0')$ належить M , а в M' є інше ребро $E_0' = (a_0, a_1)$ з a_0' . Ми можемо йти далі з a_1 по деякому ребру $E_1 = (a_1, a_1')$ з M' , і будемо продовжувати цей процес, поки можливо. В результаті ми отримаємо ланцюг:

$$(a_0, a_0'), (a_0', a_1), (a_1, a_1'), \dots, \quad (7.4.1)$$

Ребра, який належить по чергові M і M' .

Ланцюг (7.4.1) може виявитися кінцевим, тільки за умов повернення до $a_0 = a_n$. Тоді паросполучення між вершинами a_i і a_i' визначається ребрами $E_i = (a_i, a_i')$ (рис. 7.4.1)

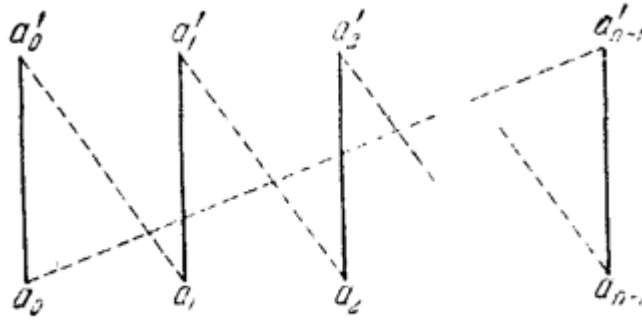


Рис. 7.4.1.

Рис. 7.4.1. Приклад графу.

Теорема 8.4.1. Будь-яка породжуюча частина H графа G має ті ж самі листові множини, що і G , і листові композиції H' для H є породжуючою частиною для G' . Мінімальний породжуючий граф G назвемо базисним графом. Таким чином, породжуючий граф H буде базисним графом тоді і тільки тоді, коли видалення будь-якого ребра з H змінює досяжність в H , тобто якщо $E = (a, b)$ - довільне ребро в H , то воно не може бути зайвим у тому сенсі, що існує деякий орієнтований ланцюг $P_h(a, b)$ в H , що не складає E . Якщо G – кінцевий граф, то існують базисні графи, і вони можуть бути отримані при послідовному видаленні ребер, як вказано вище. Якщо G має орієнтований гамільтонов цикл, то він може бути узятий в якості базисного графа.

Якщо існує базисний граф, він не обов'язково єдиний. На рис. 8.4.1. будь-яке радіональне ребро і орієнтований багатокутовий цикл визначають базисний граф. На рис. 8.4.2. п'ять ребер $(1,0)$, $(3,0)$, $(5,0)$, $(0,2)$, $(0,4)$ складають єдиний базисний граф. Помітимо, що граф, отриманий після видалення ребер $(0,2)$ і $(0,4)$ має єдиний базис, що складається з семи ребер.

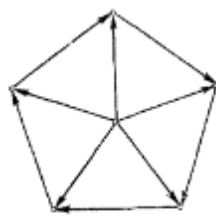


Рис. 8.4.1.

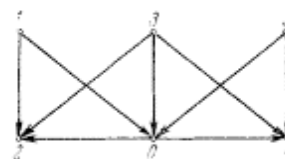


Рис. 8.4.2.

Рис. 8.4.1, 8.4.2. Приклади графів.

Теорему 9.3.1. можна сформулювати в термінах графа композиції, що чергується. (a, a^*) – маршруту в G відповідає єдиний маршрут в $G * G^*$. Петлі в $G * G^*$ визначаються 2-маршрутами, що складаються з ребра і його звернення. Вони виключаються, коли ми обмежуємося правильними (a, a^*) - маршрутами. Якщо циклічні правильні (a, a^*) – маршрути в G мають довжини, що діляться на 4, то цикли в $G * G^*$ мають чіткі довжини; звідси випливає, $G * G^*$ є двудольний граф, якщо знехтувати петлями, і навпаки.

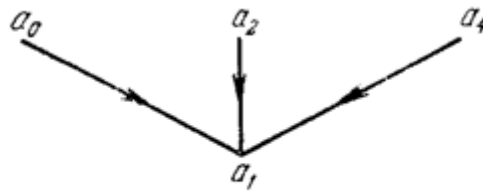


Рис. 9.3.1.

Рис. 9.3.1. Приклад графу.

Теорема 10. Нехай G — уніциклічний граф з $\dim(G) = 2$ і T — його кістякове дерево. Тоді 1) $\dim(T) = \dim(G) - 1$, якщо G є простим циклом; 2) $\dim(T) = \dim(G) + 1$, якщо а) G є графом типу «напівпавучок», обплетенням «графа-напівпавучка», графом типу «павучок», у якого одна вершина має степінь 4, а майже симетрична з нею є основною, або обплетенням такого графа типу «павучок» і вилучено ребро в циклі G , що не є інцидентним вершині степеня 4; б) G є графом типу «павучок» або обплетенням «графа-павучка», крім випадку, зазначеного в підпункті (а), і вилучено ребро, що є інцидентним вершині степеня 4; 3) $\dim(T) = \dim(G) + 2$, якщо G є графом типу «павучок» або обплетенням «графа-павучка», крім випадку, наведеного в підпункті (а), і вилучено ребро, що не є інцидентним вершині степеня 4; 4) $\dim(T) = \dim(G)$ у всіх інших випадках. Доведення. Для початку зазначимо, що оскільки вилучення ребра є поза циклом уніциклічного графа G таким чином, що G залишається зв'язним, не призводить до утворення кістякового дерева T , то розглядатимемо лише випадки вилучення ребра з G . б Описуватимемо залежність метричної розмірності дерева T від G відповідно до виду уніциклічного графа G . Нехай G — простий цикл (G

$= C_n$). Тоді незалежно від способу видалення ребра отримаємо простий ланцюг $T = P_n$ (див. рис. 10.).

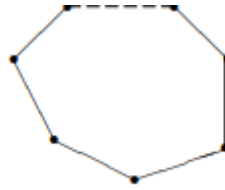


Рис.10. Кістякове дерево простого циклу.

Згідно з теоремою, $\dim(P_n) = 1$, тому $\dim(T) = \dim(G) - 1$. У випадку обплетення простого циклу ланцюгами $L_1, L_2, \dots, L_r$, отримаємо кістякове дерево T з рівно двома 2-лишковими вершинами або з рівно однією 3-лишковою. В обох випадках отримаємо $\dim(T) = 2$, тобто $\dim(T) = \dim(G)$. Зауважимо, що якщо в дереві T існують 1-лишкові вершини, то вони не впливатимуть на метричну розмірність такого дерева (оскільки $1 - 1 = 0$). Припустимо, що G — граф типу «напівпавучок». Тоді він містить вершину w таку, що $\deg(w) = 4$. Якщо дерево T утворене шляхом видалення ребра e в G , то можливі такі випадки: 1) e неінцидентне w . Якщо w є основною в G , то за означенням «графа-напівпавучка» існує рівно одна 2-лишкова вершина, що проектується в w . Тому після видалення ребра вершина w буде 3-лишковою (див. рис. 4). $\dim(T) = (3 - 1) + (2 - 1) = 2 + 1 = 3$. Якщо вершина w не є основною в G , то після видалення ребра вона буде 4-лишковою, тому $\dim(T) = 4 - 1 = 3$. Отже, $\dim(T) = \dim(G) + 1$;

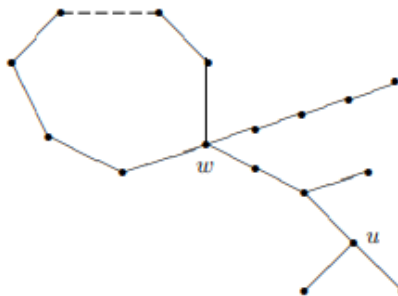


Рис. 10.1 В графі видалено ребро, неінцидентне вершині степеня 4

ВИСНОВКИ

Отже, з проведеного дослідження можна зробити наступні висновки:

Теорія графів відноситься до дискретної математики. Дискретна математика є теоретичною основою для побудови алгоритмів та написання комп'ютерних програм. Сьогодні людська діяльність тісно пов'язана з комп'ютерною технікою та комп'ютеризацією виробництва. Тому теорія графів на сьогодні є досить актуальною темою. Особливістю теорії графів є геометричний підхід до вивчення об'єктів. Вони дозволяють наочно зобразити розв'язування різноманітних задач. Останнім часом графи і пов'язані з ними методи досліджень використовуються практично в усіх розділах сучасної математики. Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці.

Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів. Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені: – електричні і транспортні мережі; – інформаційні і комп'ютерні мережі; – карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів; – моделі кристалів; – структури молекул хімічних речовин; – моделі ігор; – різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, решітки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми і програми тощо); – лабіринти; – плани діяльності або плани виконання певних робіт (розклади); – генеалогічні дерева тощо.

У нашій роботі описувались важливі методи, які можуть допомогти розв'язувати системи рівнянь. Вивчивши основи теорії графів, досліджено розв'язання деяких систем рівнянь за допомогою графів. Розглянуто, як можна використовувати даний метод на практиці.

Дослідження показало, що розглянутий спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь:

1. Розвиває творчу активність та формує в них потребу постійно розширювати та поглиблювати свої знання;
2. Розширює математичну культуру і демонструє наявність нетрадиційних підходів до розв'язування математичних задач;

3. Удосконалює прийоми розумової діяльності і розвиває дослідницький, творчий підхід до постановки і розв'язування задач у різних сфер людської діяльності.

Працюючи над роботою, ми зрозуміли, що дана тема є актуальною і перспективною в наш час. Вона може використовуватися на уроках математики, під час факультативних занять, при роботі математичних кружків та буде цікава учням і вчителям, які люблять розв'язувати задачі нестандартними способами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акімов О.Є. Дискретна математика: логіка, групи, графи, фрактали // Ульянівський будинок друку, 2005, 659 с.
2. Барболін М.П. Головоломки та графи // Квант, 1975, №2.
3. Березіна Л.Ю. Граф та його застосування: Посібник для вчителів // М.:Освіта, 1979, 144 з.
4. Березіна Л.Ю. Графи допомагають вирішити логічні завдання // Математика у школьництві, 1972, №2, с.62-65.
5. Березіна Л.Ю. Про графи з кольоровими ребрами // Квант, 1973 №8, с. 49-53.
6. Берж К. Теорія графів та її зміни // М. ІЛ, 1962.
7. Гарднер М. Математичні головоломки та розваги // М., Світ, 1971.
8. Генкін С.А., Фомін Д.В. Математичний гурток// Санкт-Петербург, 1992.
9. Головіна Л.І. Граф та його застосування // Математика у школьництві, 1965, № 3.
10. Лисенко В.І. Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою графів // У світі математики, 1974, № 5, с. 48-56.
11. Мельников О.І. Незнайка країни графів // Мінськ, Оракул, 1998.
12. Носов В.А. Комбінаторика та теорія графів // МДТУ, 1999, 116 с.
13. Новіков Ф.А. Дискретна математика / / Пітер, 2001, 104 с.
14. Попов В.М. Дидактика математики: проблеми та дослідження // 2004, Вип.21.
15. Слєпкань З.І. Методика навчання математики// К. Зодіак-ЕКО, 2000, 512 с.
16. Вілсон Р. Введення в теорію графів / / М., Світ, 1977, 208 с.