1. Codd E. F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages / Codd E. F. // Data Base Systems. – New York : Prentice-Hall. – 1972. – P. 65–93.
2. Lacroix M. Domain-oriented relational languages / M. Lacroix, A. Pirotte // Proc. 3rd Int. Conf. on Very Large Data Bases. – Tokyo, October, 1977. – P. 370–378.
3. Мейєр Д. Теория реляционных баз данных / Д. Мейєр; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 608 с.
4. Ульман Дж. Основы систем баз данных / Дж. Ульман; пер. с англ. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 334 с.
5. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных : [8-е изд.: пер. с англ.] / К. Дж Дейт. – М. : Вильямс, 2005. – 1328 с.
6. Коннолли Т., Бегг К. Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика : [3-изд.: пер. с англ.] / Томас Коннолли, Каролин Бегг. – М. : Вильямс, 2003. – 1440 с.
7. Пасічник В. В. Організація баз даних та знань / В. В. Пасічник, В. А. Резніченко. – К. : Видавнича група BHV, 2006. – 384 с.
8. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Борона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – К. : Академперіодика, 2001. – 198 с.
9. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон; пер. с англ. – М. : Наука, 1971. – 320 с .
10. Нікольський Ю. В. Дискретна математика : підручник : гриф МОН України / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – [3-тє вид.]. – Л. : Магнолія, 2008. – 608 с.
11. Цаленко М. Ш. Моделирование семантики в базах данных / М. Ш. Цаленко. – М. : Наука, 1989. – 287 с.

D. Buy, I. Glushko

GENERALIZATION OF TUPLE CALCULUS

In the article generalization of classic result about the equivalence of relational algebra of Codd and tuple calculus is considered. The classic tuple calculus is filled up arbitrary predicate and functional signatures on the universal domain. It is proved that the tuple calculus remains no less expressive than relation algebra.

Keywords: relation databases, tuple calculus, relation algebra.

УДК 004.655

Буй Д. Б., Кахута Н. Д., Сільвейструк Л. М.

ПОВНИЙ ОБРАЗ, ОБМЕЖЕННЯ, ПРОЕКЦІЯ, ВІДНОШЕННЯ СУМІСНОСТІ

Статтю присвячено дослідженню загальних властивостей теоретико-множинних конструкцій, які використовуються, зокрема, в теорії реляційних баз даних при дослідженні табличних алгебр, побудованих на основі класичних реляційних алгебр Кодда. Розглянуто повний образ множини відносно бінарного відношення та розповсюдження унарних (бінарних) часткових операцій на множини за допомогою повного образу, обмеження бінарного відношення за множиною, проекцію бінарного відношення та відношення сумісності бінарних відношень.

Ключові слова повний образ множини, обмеження бінарного відношення за множиною, проекція бінарного відношення, відношення сумісності.

Загальні зауваження

Зафіксуємо універсум D, елементи якого позначимо $x, y, z,\ldots$ Підмножини універсуму позначимо $X, Y \ldots$, бінарні відношення на D (тобто множини пар, компоненти яких належать універсуму) – $U, V,\ldots$

Зазвичай бінарне відношення U називають *функціональним,* якщо для всіх елементів x, y, z виконується імплікація $\langle x, y\rangle \in U \ \& \ \langle x, z\rangle \in U \Rightarrow y = z$.

Функціональні бінарні відношення (за іншою термінологією *часткові функції*) позначимо $f, g,\ldots$ *Область означеності* (рос. – «область определенности» [1, гл. 1, § 1, с. 20] [1]) функції f

[1] Зауважимо, що в другому видання монографії А. І. Мальцева використовується термін «область определения» [2, гл. 1, § 1, с. 19].

позначимо *domf*, вона збігається з проекцією функції (як бінарного відношення) за першою компонентою – $domf = \pi_1^2 f$. Тут і далі $\pi_i^2 U$ – проекція бінарного відношення за *i*-ю компонентою, $i = 1,2$.

У літературі поняття ін'єктивності застосовується до функцій, природно поширимо його на відношення: бінарне відношення *U* назвемо *ін'єктивним*, якщо для всіх елементів *x, y, z* виконується імплікація $<x, y> \in U \;\&\; <z, y> \in U \Rightarrow x = z$.

Наступне очевидне твердження висвітлює тісний зв'язок між властивостями функціональності та ін'єктивності за допомогою обернених відношень. *Відношення, обернене до відношення U*, вводиться стандартно –

$$U^{-1} \overset{def}{=} \{<x, y> | <y, x> \in U\}. \qquad (*)$$

Знак □ далі позначає кінець формулювання твердження.

Твердження 1 (зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю). Виконується еквівалентність

відношення *U* функціонально ⇔ обернене відношення U^{-1} ін'єктивно.□

Отже, з точністю до порядку компонент властивості функціональності та ін'єктивності еквівалентні. Цей зв'язок стає зрозумілим, якщо бінарні відношення інтерпретувати як *таблиці* зі стандартними іменами 1, 2 (тобто відмовитися від порядку компонент) $t(U) \overset{def}{=} \{\{<1, x>, <2, y>\} | <x, y> \in U\}$ та скористатися поняттям *функціональних залежностей* в розумінні табличних (реляційних) баз даних. При цьому таблиці розуміються згідно з [3, підрозділ 2.1, с. 31] як множини функцій з однаковою областю означеності, а функціональні залежності розуміються стандартно (див., наприклад, [3, підрозділ 2.10, с. 71] та наведену в цій роботі бібліографію). Зв'язок розкривають дві наступні еквівалентності, які перевіряються безпосередньо: (1) бінарне відношення *U* функціонально ⇔ на таблиці *t*(*U*) виконується функціональна залежність {1}→{2}, (2) бінарне відношення *U* ін'єктивно ⇔ на таблиці *t*(*U*) виконується функціональна залежність {2}→{1}.

З іншого боку, цілком очевидно, що існують функціональні відношення, які не є ін'єктивними, та навпаки – ін'єктивні відношення, які не є функціональними. Крім того, існують відношення, які не є функціональними та не є ін'єктивними. Отже, твердження 1 має еквівалентне формулювання: відношення *U* – ін'єктивно ⇔ обернене відношення U^{-1} функціонально; для доведення треба лише врахувати тривіальну рівність $U = (U^{-1})^{-1}$.

Повний образ

Повним образом множини X відносно відношення U (за іншою термінологією *образом множини відносно відношення*) назвемо множину $U[X] \overset{def}{=} \{y \,|\, \exists x (x \in X \,\&\, <x, y> \in U)\}$; *композицією відношень U і V* (взятих саме в такому порядку) – відношення $U \circ V \overset{def}{=} \{<x, y> | \exists z (<x, z> \in V \,\&\, <z, y> \in U)\}$. *Порожнє відношення* (тобто порожню множину пар) позначимо ε. *Відношення U* назвемо *тотальним* (за іншою термінологією *всюди визначеним*), якщо $\pi_1^2 U = D$. Під доповненням $\overline{X}$ множини *X* розуміємо доповнення до універсуму, тобто $\overline{X} \overset{def}{=} D \setminus X$.

Твердження 2 (властивості повного образу). Виконуються твердження:

1. $U_1 \subseteq U_2 \;\&\; X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1[X_1] \subseteq U_2[X_2]$ (монотонність за сукупністю аргументів);
2. $U[\bigcup_i X_i] = \bigcup_i U[X_i], (\bigcup_i U_i)[X] = \bigcup_i U_i[X]$ (дистрибутивність відносно об'єднань);
3. $U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$ (верхня оцінка повного образу перетину);
4. $U_1[U_2[X]] = (U_1 \circ U_2)[X]$ (повний образ відносно композиції відношень або повний образ повного образу);
5. $U[X] = U[X \bigcap \pi_1^2 U]$;
6. $U[X] = \varnothing \Leftrightarrow X \bigcap \pi_1^2 U = \varnothing$ (критерій порожності повного образу); зокрема, $\varepsilon[X] = U[\varnothing] = \varnothing$ (збереження повним образом порожнього відношення та порожньої множини) і, в припущенні тотальності відношення *U*, – $U[X] = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$;
7. $U[X] \setminus U[Y] \subseteq U[X \setminus Y] \subseteq U[X]$ (нижня та верхня оцінка повного образу різниці);
8. $\pi_2^2 U \setminus U[X] \subseteq U[\overline{X}]$ (нижня оцінка повного образу доповнення).□

Пп. 3 і 7 (нижня оцінка) ставлять питання про природні достатні умови для дистрибутивності повного образу відносно перетинів та різниці. Відповідь дає наступне твердження.

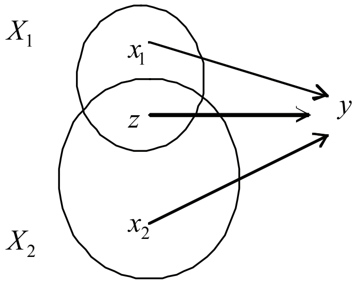
Нижче, як звичайно, *обмеженням відношення U за множиною X* називається відношення $U \,|\, X \overset{def}{=} U \bigcap (X \times D) = U \bigcap (X \times \pi_2^2 U)$.

Твердження 3 (достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці). Повний образ має властивості:

1. обмеження $U \,|\, \bigcup_{i \in I} X_i$ ін'єктивно $\Rightarrow U[\bigcap_{i \in I} X_i] = \bigcap_{i \in I} U[X_i]$;
2. $f^{-1}[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i f^{-1}[X_i]$;
3. обмеження $U \,|\, (X \bigcup Y)$ ін'єктивно $\Rightarrow U[X \setminus Y] = U[X] \setminus U[Y]$;
4. $f^{-1}[X \setminus Y] = f^{-1}[X] \setminus f^{-1}[Y]$. □

Як демонструють прості приклади, умови твердження 3 є достатніми, але не необхідними. Дійсно, розглянемо множини X_1, X_2 та відношення U: $X_1 \stackrel{def}{=} \{x_1, z\}, X_2 \stackrel{def}{=} \{x_2, z\}$, де елементи x_1, x_2, z попарно різні, $U \stackrel{def}{=} \{<x_1, y>, <z, y>, <x_2, y>\}$.

Очевидно, що $U[X_1 \cap X_2] = U[\{z\}] = \{y\} = U[X_1] \cap U[X_2]$, але обмеження $U \mid X_1 \cup X_2$ не є ін'єктивним (див. мал. 1).



Мал. 1. Приклад неін'єктивного відношення U та множин X_i, таких, що виконується рівність $U[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i U[X_i]$

У наступному твердженні наведено формальний критерій дистрибутивності повного образу відносно перетинів. Формальність проявляється в тому, що по суті спрощення відсутнє, але цей критерій висвітлює роль ін'єктивності для достатніх умов дистрибутивності, визначених у твердженні 3. Зважаючи на загальнозначне включення $U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$ (п. 3 твердження 2 про властивості повного образу), в наступному критерії йдеться про обернене включення.

Твердження 4 (критерій дистрибутивності повного образу відносно перетину). Виконується еквівалентність

$$\bigcap_{i \in I} U[X_i] \subseteq U[X_0] \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} U[X_i \setminus X_0] \subseteq U[X_0],$$

$$\text{де } X_0 \stackrel{def}{=} \bigcap_{i \in I} X_i;$$

зокрема, для випадку перетину двох множин

$$U[X_1] \cap U[X_2] \subseteq U[X_1 \cap X_2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow U[X_1 \setminus X_2] \cap U[X_2 \setminus X_1] \subseteq U[X_1 \cap X_2]. \ \square$$

Аналогічний підхід можна застосувати для отримання критерію дистрибутивності повного образу відносно різниці, а саме: виконується наступне твердження.

Твердження 5 (критерій дистрибутивності повного образу відносно різниці). Виконується еквівалентність

$$U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \setminus U[Y] \Leftrightarrow U[X \setminus Y] \cap U[Y] = \varnothing. \ \square$$

Твердження 4 та 5 ми називаємо критеріями дистрибутивності, хоча в них йдеться про відповідні включення; справа в тому, що обернені включення були встановлені раніше (для перетину це п. 3 твердження 2, а для різниці – п. 7 того ж твердження).

Для того, щоб висвітлити зв'язок між встановленими (формальними) критеріями дистрибутивності (твердження 4, 5) та достатніми умовами дистрибутивності, що формулювалися в термінах ін'єктивності, треба взяти до уваги наступний простий критерій ін'єктивності бінарних відношень.

Твердження 6 (критерій ін'єктивності відношення). Виконується еквівалентність

$$\text{відношення } U \text{ ін'єктивно} \Leftrightarrow$$
$$\forall X \forall Y (X \cap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing). \ \square$$

Таким чином, для ін'єктивного відношення U включення $U[X_1 \setminus X_2] \cap U[X_2 \setminus X_1] \subseteq U[X_1 \cap X_2]$ з твердження 4 виконується автоматично, оскільки ліва частина порожня згідно з твердженням 6; аналогічно рівність $U[X \setminus Y] \cap U[Y] = \varnothing$ з твердження 5 також виконується автоматично.

Розповсюдження операцій з елементів на множини

Повний образ дозволяє унарні (бінарні) операції на універсумі розповсюджувати на булеан універсуму. Через $[f]$ позначимо унарну тотальну операцію на булеані універсуму D, яка індукується частковою функцією f і задається рівністю $[f](X) \stackrel{def}{=} f[X] = \{y \mid \exists x (x \in X \wedge y \simeq f(x))\}$.

Нехай F – бінарна часткова операція на D; вона також індукує бінарну тотальну операцію $[F]$ на булеані D, яка задається рівністю $[F](X, Y) \stackrel{def}{=} F[X \times Y] = \{z \mid \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge z \simeq F(x, y))\}$.

У наведених значеннях, з огляду на частковість функцій, замість стандартної рівності = використовується узагальнена $\simeq$ (подробиці див. далі).

Очевидно, що операції $[f]$ та $[F]$ зберігають порожню множину: $[f](\varnothing) = \varnothing$, $[F](\varnothing, X) = [F](Y, \varnothing) = \varnothing$; це випливає зі збереження порожньої множини повним образом (п. 6 твердження 2) та декартовим добутком.

Щоб продемонструвати природність саме таких розповсюджень унарних та бінарних операцій з елементів на множини елементів (інакше кажучи, з множини на булеан множини), покажемо, як на такому шляху природно виникає відома сильна тризначна логіка Кліні [4, част. III, розд. XII, § 64, с. 296–303] (див. також [1; 5, розд. 4, § 4.1, с. 117, § 4.2, табл. 4 на с. 127]).

Ця тризначна логіка була введена С. Кліні в теорії рекурсії як, зокрема, засіб побудови частково-рекурсивних функцій; в системах алгоритмічних алгебр Глушкова логіка використовується при задачі умов; нарешті, зараз саме така логіка використовується в класі SQL-подібних мов для реляційних баз даних та в сучасних мовах специфікацій UML/OCL (див., наприклад, [6]).

Отже, розглядаємо стандартну алгебру булівської логіки $<\{T,F\};\wedge,\vee,\neg>$, де T, F – логічні значення істини та хиби відповідно. Результати розповсюдження операції кон'юнкції $\wedge$, диз'юнкції $\vee$ та заперечення $\neg$ на булеан $P(\{T, F\})$ наведені в трьох наступних таблицях. У перших двох таблицях першому аргументу відповідають стовпці, другому – рядки. Зауважимо, що ці розповсюдження є комутативними операціями, тому відповідні таблиці «симетричні», і співставлення аргументам стовпців чи рядків не є суттєвим. Далі буде показано, що успадкування комутативності (і асоціативності) в цьому випадку не є випадковим, а є наслідком загальних властивостей нашої конструкції розповсюдження.

Таблиця 1. **Операція [$\wedge$] на булеані $P(\{T, F\})$**

	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{T, F\}$	$\varnothing$	$\{T, F\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$

Таблиця 2. **Операція [$\vee$] на булеані $P(\{T, F\})$**

	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
$\{T, F\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T, F\}$	$\{T, F\}$

Таблиця 3. **Операція [$\neg$] на булеані $P(\{T, F\})$**

Аргумент	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T, F\}$
Значення	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T, F\}$

Розглянемо наступне відображення $\varphi : \{T, F, \omega\} \to P(\{T, F\})$, де ω – третє логічне значення логіки Кліні: $\varphi(T)=\{T\}$, $\varphi(F)=\{F\}$, $\varphi(\omega) = \{T, F\}$. Домовимось також про однойменні операції: $\wedge$ – [$\wedge$], $\vee$ – [$\vee$], $\neg$ – [$\neg$]; за операціями алгебри тризначної логіки Кліні залишимо ті ж позначення $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Твердження 7 (вкладення алгебри сильної тризначної логіки Кліні). Відображення φ є однозначним гомоморфізмом алгебри сильної тризначної логіки Кліні $<\{T, F, \omega\};\ \wedge, \vee, \neg>$ в алгебру $<P(\{T, F\});\ [\wedge], [\vee], [\neg]>$, тобто це відображення є вкладенням алгебри сильної тризначної логіки Кліні в алгебру $<P(\{T, F\});\ [\wedge], [\vee], [\neg]>$ [1].□

Таким чином, можна зробити висновок, що алгебра сильної тризначної логіки Кліні одержується шляхом застосування до сигнатурних операцій алгебри класичної булівської логіки конструкції розповсюдження (в термінах повного образу) унарних (заперечення) та бінарних операцій (кон'юнкція, диз'юнкція).

Зауважимо також, що зазначена конструкція розповсюдження, узагальнена природним чином, може використовуватися і при розповсюдженні функцій та предикатів на NULL-значення в SQL-подібних мовах [2].

Наведемо ще два приклади застосування конструкції розповсюдження (бінарних операцій) з елементів на множини елементів.

Операція добутку формальних мов $\circ$ (див., наприклад, [7]) виникає, виходячи з бінарної операції конкатенації слів: $L_1 \circ L_2 = [\cdot](L_1, L_2) = \{x \cdot y \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$.

Операція з'єднання таблиць $\otimes$ (див., [3, с. 32]) випливає, виходячи з бінарної операції об'єднання сумісних рядків $\tilde{U} : t_1 \otimes t_2 = [\tilde{U}](t_1, t_2)$ [3, с. 49].

Повернемось до розгляду загальних властивостей розповсюдження операцій.

Часткову бінарну операцію F назвемо *комутативною* (*асоціативною*), якщо виконується узагальнена рівність $F(x, y) \simeq F(y, x)$ для всіх елементів x, y (відповідно $F(F(x, y), z) \simeq F(x, F(y, z))$ для всіх елементів x, y, z). Тут і далі під *узагальненою рівністю* розуміється рівність, в якій обидві частини або невизначені, або визначені та мають однакові значення [8, вступ, с. 11] (іноді цю узагальнену рівність називають *сильною рівністю*, див. наприклад, [9, с. 44]). Перехід від стандартної рівності до узагальненої обумовлений розглядом часткових операцій.

Зв'язок між властивостями (ін'єктивність для унарних операцій, комутативність та асоціативність для бінарних) вихідних та індукованих операцій на булеані розкривають три наступних твердження 8-10.

Твердження 8 (критерій ін'єктивності тотальної операції вигляду [f]). Виконується еквівалентність

функція f ін'єктивна та тотальна $\Leftrightarrow$ операція [f] ін'єктивна. □

Очевидно, що тотальність функції f суттєва для необхідності; тобто якщо часткова функція f ін'єктивна, то операція [f] загалом не є ін'єктивною. Разом з тим, переходячи до відно-

[1] Оскільки відображення не є сюр'єкцією, то треба говорити саме про однозначний гомоморфізм.

[2] У процесорах SQL-подібних мов підтримується інша конструкція розповсюдження функцій на Null-значення: якщо хоча б один аргумент є Null, то результат також є Null (змістовно кажучи, функції зберігать Null). Зауважимо, що такий підхід реалізовано в слабкій тризначній логіці Кліні – операції зберігать ω. Повертаючись до SQL, добуток можна було б покласти рівним 0, а не Null, як у СУБД.

шень (тобто нехтуючи функціональністю), необхідність у твердженні 8 можна узагальнити в наступному твердженні.

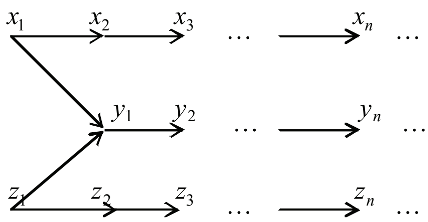
Твердження 8 (достатня умова ін'єктивності тотальної операції вигляду [*U*]). Виконується імплікація

відношення *U* ін'єктивно та тотально ⇒ операція [*U*] ін'єктивна. □ (1)

В імплікації (1) відношення розповсюджується на булеан за тією ж схемою: $[U](X) \overset{def}{=} U[X]$.

Отже, функціональність відношення не суттєва для необхідності в формулюванні твердження 8.

Разом з тим, приклади для зліченого універсуму показують, що функціональність суттєва для достатності. Відповідний приклад наведено на мал. 2: операція [*U*] ін'єктивна, але тотальне відношення *U*, яке не є функціональним, не є і ін'єктивним. Таким чином, імплікація (1) загалом не обертається.



Мал. 2. Приклад неін'єктивного тотального відношення *U*, такого, що операція [*U*] є ін'єктивною

Наведемо таблицю успадкування властивості ін'єктивності при переході від відношення (зокрема, функції) *U* на універсумі до тотальної унарної операції [*U*] на булеані універсуму. Стовпчики 1-3 наступної таблиці 4 відповідають властивостям функціональності, тотальності та ін'єктивності (саме у цьому порядку) початкового відношення *U*, стовпчик 4 – властивості ін'єктивності похідної операції [*U*] (яка за означенням є функціональною та тотальною). Вісім рядків таблиці відповідають усім можливим випадкам, коли вихідне відношення має чи не має вказані три властивості. Знак «+» («–») у комірці означає, що відношення чи операція має (не має) відповідної властивості. Нарешті, знак «±» означає, що немає жодного логічного зв'язку для цього випадку.

Твердження 9 (успадкування ін'єктивності). Заповнення таблиці 4 коректне. □

Прокоментуємо ще рядки 5, 6 таблиці 5 із врахуванням критерію ін'єктивності відношень (твердження 6): якщо ін'єктивне відношення *U* тотальне, то операція [*U*] також ін'єктивна, тобто для всіх множин *X*, *Y* виконується імплікація $X \neq Y \Rightarrow U[X] \neq U[Y]$; якщо ж ін'єктивне відношення *U* не є тотальним, то операція [*U*] не є ін'єктивною, але для всіх множин *X*, *Y* виконується «сильніша» імплікація $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow$ $\Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing$ (тобто обмеження вигляду [*U*] | *L* є ін'єктивним, де *L* – довільна підмножина булеану *P*(*D*), що складається з множин, які не перетинаються).

Таблиця 4. **Логічний зв'язок між властивостями ін'єктивності відношення *U* та індукованої операції [*U*]**

№ п/п	властивості відношення *U*			ін'єктивність операції [U]
	функціональність	тотальність	ін'єктивність	
	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2	+	–	+	–
3	+	+	–	–
4	+	–	–	–
5	–	+	+	+
6	–	–	+	–
7	–	–	–	–
8	–	+	–	±

Наступне твердження розкриває зв'язок між властивостями комутативності та асоціативності при розповсюдженні бінарних операцій на множини. Основна ідея доведення (успадкування цих властивостей) полягає в тому, що на одноелементних множинах розповсюдження по суті збігається з початковою операцією.

Якщо уточнювати останнє твердження, то йдеться про те, що відображення $x \overset{\varphi}{\mapsto} \{x\}$ є однозначним гомоморфізмом часткової алгебри (точніше, групоїда за термінологією [10, розділ II, § 3, с. 89]) <*D*; *F*> в алгебру (групоїд) <*P*(*D*); [*F*]>, де *P*(*D*) – як і раніше, булеан універсуму *D* (тобто для всіх *x*, *y* виконується рівність $\varphi F(x, y) = [F](\varphi x, \varphi y)$ за умови визначення лівої частини).

Твердження 10 (успадкування комутативності та асоціативності, критерії комутативності та асоціативності операції вигляду [*F*]). Виконується еквівалентність

бінарна часткова операція *F* комутативна (асоціативна) ⇔ бінарна тотальна операція [*F*] комутативна (асоціативна). □

Саме з останнього твердження випливає, зокрема, що розширення [∧], [∨], які виникають при розгляді тризначної логіки Кліні, є комутативними та асоціативними, успадковуючи ці властивості від початкових операцій.

Обмеження

У наступному твердженні розглядаються властивості обмеження. Параметричний оператор $U \mapsto U \mid X$, який відношенню ставить у відповідність його обмеження за множиною-параметром X, позначимо $\uparrow X$. Нижче, як звичайно, під *оператором замикання* на частково впорядкованій множині розуміється ідемпотентний, монотонний та спадний (або зростаючий) оператор (див., наприклад, [11, § 3, с. 45]).

Твердження 11 (властивості обмеження). Обмеження має властивості:

1. $U_1 \subseteq U_2 \,\&\, X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1 \mid X_1 \subseteq U_2 \mid X_2$ (монотонність за сукупністю аргументів; зокрема, монотонність параметричного оператора $\uparrow X$);
2. $\pi_1^2(U \mid X) = \pi_1^2 U \cap X$, $\pi_2^2(U \mid X) = U[X]$ (проекція обмеження за першою та другою компонентою; зв'язок між повним образом та обмеженням);
3. $U \mid X = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_1^2 U \cap X = \varnothing$ (критерій порожності обмеження); зокрема, $\varepsilon \mid X = U \mid \varnothing = \varepsilon$ (збереження порожнього відношення та порожньої множини);
4. $U \mid X = U \mid (X \cap \pi_1^2 U), U = U \mid \pi_1^2 U;$ зокрема, $\pi_1^2 U \subseteq X \Leftrightarrow U \mid X = U;$
5. $(U \mid X) \mid Y = U \mid (X \cap Y)$, або в операторному вигляді $\uparrow Y \circ \uparrow X = \uparrow (X \cap Y)$; (композиція обмежень); зокрема, $\uparrow X \circ \uparrow X = \uparrow X$ (ідемпотентність оператора $\uparrow X$);
6. $U \mid X \subseteq U$ (спадність оператора $\uparrow X$);
7. параметричний оператор $\uparrow X$ є оператором замикання відносно теоретико-множинного включення $\subseteq$
8. $(\bigcup\limits_i U_i) \mid X = \bigcup\limits_i U_i \mid X, U \mid \bigcup\limits_i X_i = \bigcup\limits_i U \mid X_i$ (дистрибутивність обмеження відносно об'єднань); $(\bigcap\limits_i U_i) \mid X = \bigcap\limits_i (U_i \mid X), U \mid \bigcap\limits_i X_i = \bigcap\limits_i (U \mid X_i)$ (дистрибутивність обмеження відносно перетинів);
9. $f \subseteq g \,\&\, X \subseteq dom f \Rightarrow f \mid X = g \mid X;$ зокрема, $f \subseteq g \Rightarrow f = g \mid dom f$, $f \subseteq g \,\&\, dom f = dom g \Rightarrow f = g;$
10. $(U \mid X)[Y] = U[X \cap Y]$ (повний образ однієї множини відносно обмеження відношення за іншою множиною). □

З п. 2 доведеного твердження випливає рівність $\pi_2^2 U = U[D]$, яка використовується при доведенні п. 8 твердження 2 про властивості повного образу; дійсно, використовуючи п. 4 твердження 11 маємо ланцюжок рівностей $\pi_2^2 U = \pi_2^2(U \mid D) = U[D]$.

Зауважимо, що п. 9 загалом не виконується для відношень, тобто функціональність тут суттєва. Наведемо відповідний приклад. Нехай відношення U, V та множина X наступні: $U \overset{def}{=} \{<x, y>\}$, $V \overset{def}{=} \{<x, y>, <x, z>\}$, $X \overset{def}{=} \{x\}$, причому $y \neq z$. Очевидно, що $U \subseteq V$, $X \subseteq \pi_1^2 U$, але $U \mid X \neq V \mid X$, тобто перша імплікація не виконується. Також очевидно, що $U \neq V \mid \pi_1^2 U$, тобто друга імплікація також не виконується. Нарешті, очевидно, що $\pi_1^2 U = \pi_1^2 V$, але $U \neq V$, отже і третя імплікація не виконується. Зауважимо: для цього прикладу головне те, що $U \subset V$, $U \mid X = U$ та $V \mid X = V$.

Також відмітимо, що останнє (третє) твердження п. 9 означає, що сім'я функцій з однаковою областю означеності, впорядкованих за включенням їхніх графіків, є дискретною множиною (у звичайному розумінні, див., наприклад, [11, § 1, с. 8].

Цей факт, в свою чергу, потрібен при розгляді піврешітки таблиць за з'єднанням [3, с. 56], а також для достатніх умов, коли відношення конфінальності множин є частковим порядком [3, с. 25].

Проекція та відношення сумісності

Виходячи з наступного очевидного зображення проекції відношення (за першою чи другою компонентою) через повний образ відношення відносно селектора

$$\pi_i^2 U = I_i^2[U],\ i = 1,\ 2; \qquad (2)$$

де $I_i^2 : D \times D \to D$, $I_1^2(x, y) = x$, $I_2^2(x, y) = y$ – селектори, вкажемо загальнозначні властивості проекції; крім того, наведемо цікаві властивості проекції, що перевіряються безпосередньо:

1. $\pi_i^2 \bigcap\limits_j U_j \subseteq \bigcap\limits_j \pi_i^2 U_j$; $\pi_i^2 \bigcup\limits_j U_j = \bigcup\limits_j \pi_i^2 U_j$ (верхня оцінка проекції перетину, дистрибутивність проекції відносно об'єднань);
2. $\pi_1^2(X \times Y) = X$, якщо $Y \neq \varnothing$; $\pi_2^2(X \times Y) = Y$, якщо $X \neq \varnothing$ (проекції декартова добутку);
3. $\pi_i^2 U = \varnothing \Leftrightarrow U = \varepsilon$ (критерій порожності проекції);
4. $U \subseteq \pi_1^2(U) \times \pi_2^2(U)$ (верхня оцінка відношення);
5. $\pi_2^2 U = U[D]$ (вираз проекції за другою компонентою через повний образ);
6. $f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)$ (достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій);
7. $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow \pi_i^2 U_1 \subseteq \pi_i^2 U_2$, де i = 1, 2 (монотонність проекції за першою та другою компонентою).

Вище в п. 6 $\approx$ – *бінарне відношення сумісності відношень*, зокрема функцій: $U \approx V \overset{def}{\Leftrightarrow} U \mid X = V \mid X$, тут $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$ – перетин проекцій вихідних відношень за першою компонентою [3, підрозд. 1.3, с. 25].

Очевидно, що відношення сумісності рефлексивне, симетричне (що випливає з однойменних властивостей рівності), але загалом не транзитивне (що показують прості приклади) [1]; також очевидно, що порожнє відношення сумісне з довільним відношенням – $\varepsilon \approx U$, оскільки обмеження зберігає порожню множину [твердження 11 про властивості обмеження, п. 3].

Властивості 1, 3, 7 випливають із зображення (2) та відповідних властивостей повного образу; властивості 2, 4, 5 перевіряються безпосередньо. Далі зупинимось на доведенні властивості 6. Зауважимо, що саме ця властивість у частковому випадку $f \subseteq g$ використовується в доведенні п. 9 твердження 11 про властивості обмеження (очевидно, що з порівнянності функцій випливає їхня сумісність). Почнемо з леми про зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю, яка доповнює твердження 1.

Лема 1 (зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю, критерій функціональності). Відношення U функціонально $\Leftrightarrow$ обмеження $I_1^2 \mid U$ ін'єктивно. □

Наслідок 1. Виконується імплікація

$$f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)\ . \ \square$$

Далі буде показано, що імплікація останнього наслідку обертається. Почнемо з узагальнення доведеного наслідку 1 для відношень.

Твердження 12 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень). Виконується еквівалентність $U \mid X \subseteq V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, де $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$. □

Наслідок 2 (характеристична властивість відношення сумісності, достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці). Виконується еквівалентність

$$U \approx V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) = \\ = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V \ \&\ \pi_1^2(V \setminus U) = \pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U\ . \ \square$$

З останнього твердження випливає, зокрема, наслідок 1, наведений вище, та його наступне узагальнення.

Наслідок 1' (характеристична властивість відношення сумісності функцій). Виконується еквівалентність

$$f \approx g \ \Leftrightarrow\ dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)\ . \ \square$$

Як бачимо, характеристична властивість сумісності функцій (наслідок 1) виглядає простіше, ніж для відношень загального виду (наслідок 2); справа в тому, що саме для функцій виконується п. 9 твердження 11 (про властивості обмеження). Зауважимо також, що прості приклади та врахування твердження 12 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень) показують: спростити наслідок 2, вилучаючи один з членів кон'юнкції в правій частині, не можна.

Наступне твердження 13 є аналогом твердження 12 та наслідку 2 для проекції перетину відношень. У доведенні використовуються дві наступних леми (лема 2 потрібна для доведення леми 3). Тут і далі для спрощення запису повні образи синглітонів $\{x\}$ (одноелементних множин) будемо позначати через $U[x]$.

Лема 2. Виконуються такі твердження:

1. $U = \bigcup_{x \in \pi_1^2 U} \{x\} \times U[x]$;
2. $U \neq V \ \&\ \pi_1^2 U = \pi_1^2 V \Rightarrow \exists x(x \in \pi_1^2 U \ \&\ U[x] \neq$ $\neq V[x])$. □

Лема 3 (критерій сумісності відношень). Виконується еквівалентність $U \approx V \Leftrightarrow U \approx U \setminus V\ \&$ $U \approx V \setminus U$. □

Твердження 13 (достатня умова дистрибутивності проекції відносно перетину відношень, характеристична ознака відношення сумісності функцій, критерій дистрибутивності проекції відносно перетину функцій). Для відношень виконується імплікація $U \approx V \Rightarrow \pi_1^2(U \cap V) =$ $= \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$, яка в загальному випадку не обертається. Для функцій виконується еквівалентність $f \approx g \Leftrightarrow dom(f \cap g) = domf \cap domg$. □

Основні результати

1. Встановлено зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю.
2. Наведено основні властивості повного образу: монотонність, дистрибутивність відносно об'єднань, верхня оцінка повного образу перетину, повний образ відносно композиції відношень, критерій порожності повного образу, збереження повним образом порожнього відношення та порожньої множини, нижня та верхня оцінка повного образу різниці, нижня оцінка повного образу доповнення, критерій та достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці.
3. Побудовано вкладення алгебри (сильної) тризначної логіки Кліні.
4. Наведено критерій ін'єктивності тотальної операції вигляду [*f*], достатню умову ін'єктивності тотальної операції вигляду [*U*].
5. Досліджено логічний зв'язок між властивостями ін'єктивності відношення *U* та індукованої операції [*U*].
6. Встановлено успадкування комутативності та асоціативності, критерії комутативності та асоціативності операції вигляду [*F*].
7. Наведено основні властивості обмеження: монотонність, проекція обмеження за першою та другою компонентами; зв'язок між

[1] Таким чином, сумісність є відношення толерантності.

повним образом та обмеженням, критерій порожності обмеження, збереження порожнього відношення та порожньої множини обмеженням, композиція обмежень, ідемпотентність, монотонність та спадність оператора $\uparrow X$, дистрибутивність обмеження відносно об’єднань та перетинів, повний образ множини відносно обмеження відношення.

8. Встановлено критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень, характеристичну властивість відношення сумісності, достатню умову дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці, характеристичну властивість відношення сумісності функцій, достатню умову дистрибутивності проекції відносно перетину відношень, характеристичну ознаку відношення сумісності функцій, критерій дистрибутивності проекції відносно перетину функцій.

З наведених результатів випливає, що конструкції повного образу, обмеження та сумісності відношень мають багату змістовну теорію; цю теорію успішно застосовано при дослідженні табличних алгебр [3, 14, 15, 16].

Деякі з наведених результатів (з доведеннями) містяться в [9, 13].

Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України (МОН) в рамках українсько-словацького проекту «Формальні специфікації програмних систем» (договір № М/29-2008 від 28.03.2008 між Київським національним університетом імені Тараса Шевченка та МОН).

1. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1965. – 391 с.
2. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986. – 367 с.
3. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – К. : Академперіодика, 2001. – 198 с.
4. Клини С. К. Введение в метаматематику / С. К. Клини. – М. : Иностр. литература, 1957. – 526 с.
5. Глушков В. М. Алгебра. Языки. Программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – К. : Наук. думка, 1978. – 318 с.
6. Cook S. The Amsterdam Manifesto on OCL. – UML 2.0 Request for information response: OMG Analysis & Design PTF, 1999 [Електронний ресурс] / S. Cook, A. Kleppe, R. Mitchell, B. Rumpe, J. Warmer, A. Wills. – Режим доступу : URL:http://www.trireme.com/whitepapers/design/components/OCL_manifesto.PDF.
7. Ахо А. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1. / А. Ахо, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1978. – 616 с.
8. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций / Н. Катленд. – М. : Мир, 1983. – 256 с.
9. Манна З. Теория неподвижной точки программ / З. Манна // Киб. сб. Нов. сер. – М. : Мир, 1978. – Вып. 15. – С. 38–100.
10. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.
11. Скорняков Л. А. Элементы теории структур / Л. А. Скорняков. – М. : Наука, 1982. – 158 с.
12. Кахута Н. Д. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій / Н. Д. Кахута, Д. Б. Буй // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125–135.
13. Кахута Н. Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Н. Д. Кахута, Д. Б. Буй // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232–240.
14. Редько В. Н. К основаниям теории реляционных моделей баз данных / В. Н. Редько, Д. Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №4. – С. 3–12.
15. Редько В. Н. Реляционные алгебры: операции деления и переименования / В. Н. Редько, Ю. И. Брона, Д. Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №5. – С. 3–15.
16. Редько В. Н. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения / В. Н. Редько, Ю. И. Брона, Д. Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89–100.

D. Buy, N. Kakhuta, L. Siveystruk

WHOLE IMAGE, RESTRICTION, PROJECTION, CONSISTENCY RELATION

The article is devoted to research of general properties of set-theoretic constructions, which are used, in particular, in the theory of relational databases at research of table algebra, which upbuild on the basis of classic Codd’s relational algebra. The whole image of set relatively a binary relation and of extension unary (binary) partial operations on the set with assistance of whole image, restriction a binary relation on set, projection of binary relation and consistency relation of binary relations are considered.

Keywords: whole image of set, restriction a binary relation on set, projection of binary relation, consistency relation of binary relations.