

Адаптивне керування та PID-регулятори в БпЛА

Н.М.Коваль, Прикладна математика – 4
Національний університет «Києво-Могилянська академія»

9 Травня 2026

2. Математична модель БПЛА

Системи координат та перетворення

Визначаємо дві системи координат, які описують просторовий напрям руху моделі:

Інерційна система

$$\mathcal{F}_i = \{O_i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i\}$$

Зв'язна система

$$\mathcal{F}_b = \{O_b, \mathbf{e}_1^b, \mathbf{e}_2^b, \mathbf{e}_3^b\}$$

Для переходу від однієї системи до іншої використаємо **кути Ейлера**, як

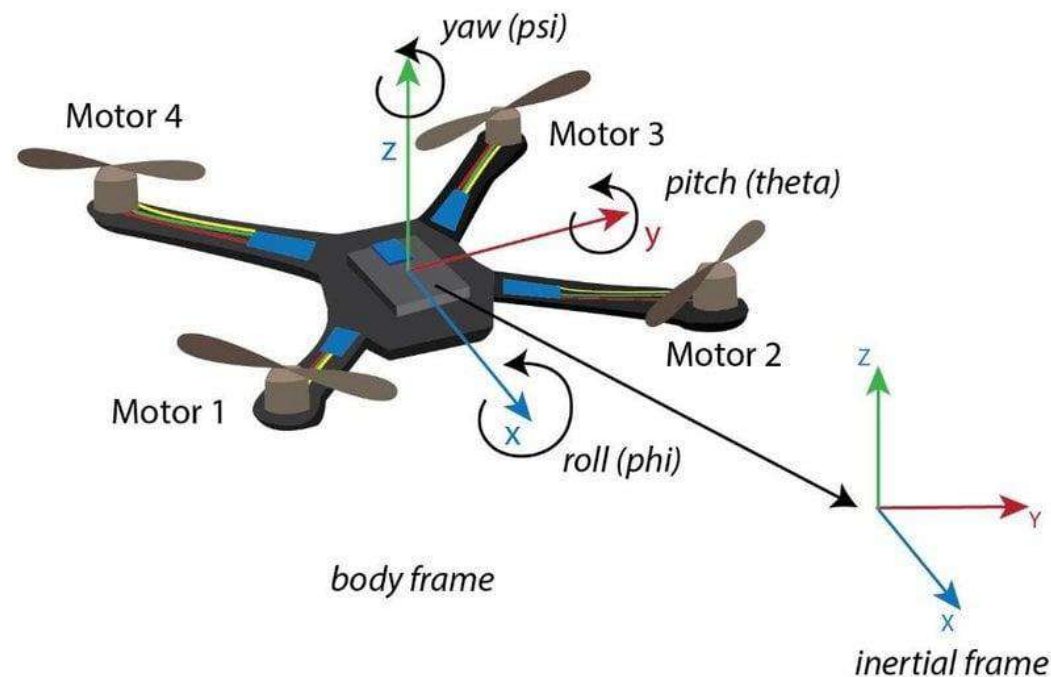
- $\phi \in (-\pi, \pi]$ — *кут крену* (roll): обертання навколо осі X_b ,
- $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ — *кут тангажу* (pitch): обертання навколо осі Y_b ,
- $\psi \in (-\pi, \pi]$ — *кут ристання* (yaw): обертання навколо осі Z_i .

де кожному куту відповідає елементарна матриця обертання

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Системи координат та перетворення

Ці кути формують повну матрицю обертання (переходу) – **матрицю напрямлених косинусів (Direction Cosine Matrix, DCM)**

Така матриця визначається як послідовний добуток $R_b^i = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi)$

$$R_b^i = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad R_b^i \in SO$$

2. Математична модель БпЛА

Рівняння руху квадрокоптера. Поступальний рух

Нехай

m – маса квадрокоптера

$i = 1, 2, 3, 4$ – нумерація моторів

На апарат діють дві основні сили: сила тяги роторів та сила тяжіння

- Тяга одного ротора $f_i = k_f \Omega_i^2$ де $k_f > 0$ – аеродинамічний коефіцієнт тяги (визначається експериментально або з характеристик ротора), Ω_i – кутова швидкість i -го ротора.

- Сумарна тяга
$$F = \sum_{i=1}^4 f_i = k_f \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2$$

- Сила тяжіння
$$\mathbf{F}_g^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = mg \mathbf{e}_3$$

- Другий закон Ньютона
$$m\ddot{\mathbf{r}} = R_b^i \mathbf{F}_T^b + \mathbf{F}_g^i$$

Рівняння поступального руху

$$m\ddot{x} = -F(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)$$

$$m\ddot{y} = -F(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)$$

$$m\ddot{z} = mg - F \cos \phi \cos \theta.$$

Рівняння показує, що для стаціонарного зависання ($\ddot{\mathbf{z}} = 0$) необхідно виконати умову $F = mg / (\cos \phi \cos \theta)$, яка при малих кутах спрощується до $F \approx mg$.

Рівняння руху квадрокоптера. Обертальний рух

До використаних раніше формул додамо рівняння Ейлера для твердого тіла у зв'язній системі координат:

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}^b + \boldsymbol{\omega}^b \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^b) = \boldsymbol{\tau}$$

де

- $\mathbf{I}$ — тензор інерції квадрокоптера відносно центра мас,
- $\boldsymbol{\omega}^b = [p, q, r]^T$ — вектор кутової швидкості у зв'язаній системі,
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$ — вектор зовнішніх моментів сил.

- Тензор інерції
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

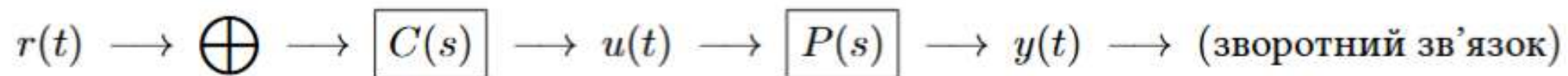
- Гірокопічний ефект
$$\boldsymbol{\Gamma} = I_r \boldsymbol{\Omega}_{\text{net}} (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{e}_3)$$

Скалярні рівняння обертання

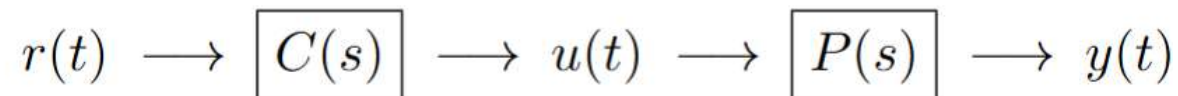
$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} q r + \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} \\ \dot{q} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} p r + \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\ \dot{r} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} p q + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{aligned}$$

Система керування

Зімкнута (closed-loop)



Розімкнута (open loop)



де $C(s)$ — передатна функція регулятора, $P(s)$ — передатна функція об'єкта, $y(t)$ — вихід системи

Передатні функції та перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа. Одностороннє перетворення Лапласа функції $f(t)$, визначеної для $t \geq 0$.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Перетворення Лапласа переводить диференціальні рівняння з часової області у алгебраїчні рівняння у комплексній площині s , що є його головною практичною перевагою

Основні властивості перетворень Лапласа:

Операція у часі	Образ у s -площині	Умова
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0^-)$	нульові початкові умови: $sF(s)$
$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	н.п.у.: $s^2F(s)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$F(s)/s$	
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	зсув у s -площині
$f(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$	затримка у часі

Передатна функція визначається як відношення перетворень Лапласа виходу та входу при нульових початкових умовах:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Стійкість динамічних систем

Стійкість є центральною вимогою до будь-якої системи керування

Стійкість за Ляпуновим. Концепція стійкості за Ляпуновим є найбільш загальною та застосовується до нелінійних систем вигляду: $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, де $f(0, t) = 0$ для всіх t (тобто $\mathbf{x}^* = 0$ є точкою рівноваги)

Точка рівноваги $\mathbf{x}^* = 0$ системи називається стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Чому метод Ляпунова важливий для адаптивного керування? Метод Ляпунова є основним інструментом аналізу та синтезу адаптивних регуляторів). На відміну від лінійних систем, де стійкість визначається полюсами, для нелінійних адаптивних систем побудова функції Ляпунова є єдиним строгим методом доведення збіжності похибки керування до нуля та стабільності законів адаптації.

3. Основи теорії PID-керування

PID-регулятор: математичне формулювання

PID-регулятор формує керуючий сигнал $u(t)$ за таким законом:

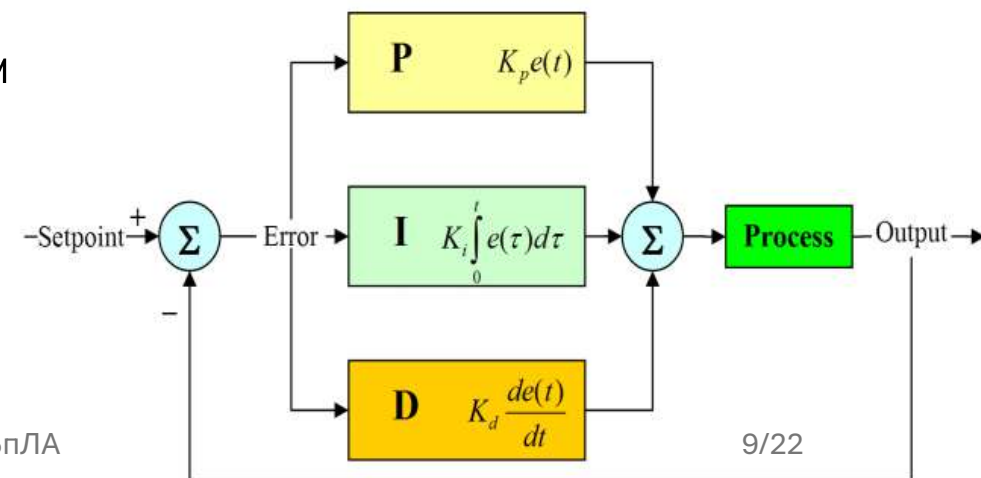
$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t)$$

$K_p > 0$ — пропорційний коефіцієнт (proportional gain),

$K_i \geq 0$ — інтегральний коефіцієнт (integral gain),

$K_d \geq 0$ — диференціальний коефіцієнт (derivative gain).

- **Пропорційна складова** $u_P(t) = K_p e(t)$ — формує керуючий вплив, пропорційний поточній помилці. Чим більша помилка — тим більший вплив. Це забезпечує основне “відштовхування” стану системи до бажаного значення
- **Інтегральна складова** $u_I(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$ — накопичує суму усіх минулих помилок. Її головна роль — усунення статичної похибки. Якщо $e(t) \neq 0$ постійно, інтегральна складова накопичується до тих пір, покине стане достатньо великою, щоб компенсувати збурення або невідповідність моделі.
- **Диференціальна складова** $u_D(t) = K_d \dot{e}(t)$ — складова реагує на швидкість зміни помилки



Дискретизація PID для цифрової реалізації

У реальних бортових контролерах квадрокоптера PID-регулятор реалізується у цифровому вигляді з кроком дискретизації T_s . Для отримання різницевого рівняння застосовується апроксимація інтеграла методом прямокутників (метод Ейлера вперед) та похідної скінченною різницею:

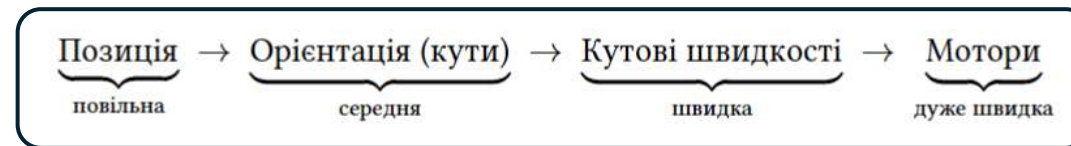
$$\int_0^{t_k} e \, d\tau \approx T_s \sum_{j=0}^k e[j] \qquad \dot{e}(t_k) \approx \frac{e[k] - e[k-1]}{T_s}$$

Рекурентна форма (зручна для реалізації на мікроконтролері): $u[k] = u[k-1] + \Delta u[k]$

$$\Delta u[k] = K_p(e[k] - e[k-1]) + K_i T_s e[k] + \frac{K_d}{T_s}(e[k] - 2e[k-1] + e[k-2])$$

Каскадна PID-архітектура для квадрокоптера

Загальний принцип каскадного керування: *зовнішній (повільний) контур* генерує задавальний сигнал для *внутрішнього (швидкого) контуру*. Внутрішній контур повинен бути значно швидшим за зовнішній — зазвичай у 5–10 разів за смугою пропускання — щоб зовнішній контур міг вважати внутрішній “ідеальним” у своїй частотній смузі



- **Задача зовнішнього контуру** керувати позицією регулюючи кути нахилу та тягу
- **Задача внутрішнього контуру** керувати орієнтацією відносно зовнішнього контуру

$$\tau_{\phi}^d = K_p^{\phi}(\phi^d - \phi) + K_i^{\phi} \int (\phi^d - \phi) dt + K_d^{\phi}(\dot{\phi}^d - \dot{\phi}),$$

$$\tau_{\theta}^d = K_p^{\theta}(\theta^d - \theta) + K_i^{\theta} \int (\theta^d - \theta) dt + K_d^{\theta}(\dot{\theta}^d - \dot{\theta}),$$

$$\tau_{\psi}^d = K_p^{\psi}(\psi^d - \psi) + K_i^{\psi} \int (\psi^d - \psi) dt + K_d^{\psi}(\dot{\psi}^d - \dot{\psi})$$

- **Контур кутових швидкостей** $\tau_{\phi}^d = K_p^p(p^d - p) + K_d^p \dot{p}$

3. Основи теорії PID-керування

Обмеження класичного PID-регулятора

- Фіксованість коефіцієнтів та зміна умов польоту**
Коефіцієнти K_p , K_i , K_d визначаються у процесі налаштування для номінальних умов: певної маси апарату m_0 , тензора інерції I_0 , відсутності вітру тощо. Привідхиленні умов від номінальних якостей керування погіршується
- Незадовільна відробка нелінійностей**
Каскадний PID є лінійним регулятором, синтезованим для лінеаризованої моделі навколо точки зависання. При відхиленні від цієї точки нелінійні члени рівнянь стають суттєвими та вносять ефективне “збурення” у замкнену систему.
- Відхилення аеродинамічних збурень**
Вітрові збурення $dF(t)$ у рівнянні діють як адитивний входовий збурюючий сигнал. Здатність PID-регулятора відхиляти такі збурення обмежена смугою пропускання контуру збурення з частотами, вищими за ω_c , практично не компенсуються.

Критерій	Класичний PID	Адаптивне керування
Параметри регулятора	Фіксовані	Змінюються в реальному часі
Вимога до моделі	Лінеаризована, номінальна	Структурна (може бути параметрично невизначена)
Реакція на зміну m, I	Деградація якості	Автоматична компенсація
Відхилення збурень	Обмежено смугою ω_c	Можлива пряма ідентифікація та компенсація
Складність реалізації	Низька	Середня–висока
Математичний апарат	Лінійна теорія	Теорія Ляпунова, нелінійні системи
Гарантії стійкості	Тільки для номінальної моделі	При належному синтезі: глобальна або обмежена

4. Адаптивна теорія керування

Мотивація та загальна концепція адаптивного керування

Адаптивний регулятор додає оцінку кожному параметру, тим самим роблячи загальну систему «пристосованою» згідно **оцінок $\theta(t)$**

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = k(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), r(t)) & \text{(керування)} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = \Gamma \varphi(\mathbf{x}(t), e(t)) & \text{(закон адаптації)} \end{cases}$$

де $\Gamma > 0$ — матриця швидкості адаптації, φ — вектор регресора (залежить від вимірювань стану та помилки), $e(t)$ — помилка керування.

Таким чином, **адаптивна система є нелінійною системою з динамічно змінними параметрами**, і її аналіз вимагає інструментів, що виходять за межі класичної лінійної теорії.

- **Функція Ляпунова для адаптивних систем:**

$$V(\mathbf{e}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{e}^\top P \mathbf{e}}_{\text{“помилка стану”}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{“помилка параметрів”}}$$

Закон адаптації обирається таким чином, щоб $\dot{V} \leq 0$ — саме це і є *методом Ляпунова для синтезу адаптивних регуляторів*.

4. Адаптивна теорія керування

Еталонне адаптивне керування (MRAC)

Метод еталонного адаптивного керування (Model Reference Adaptive Control, MRAC) є найбільш теоретично обґрунтованим та широко застосовуваним підходом в адаптивному керуванні. Його центральна ідея: змусити об'єкт з невідомими параметрами поводитися так само, як еталонна модель — ідеальна система з заданою бажаною динамікою.

MRAC складається з чотирьох елементів

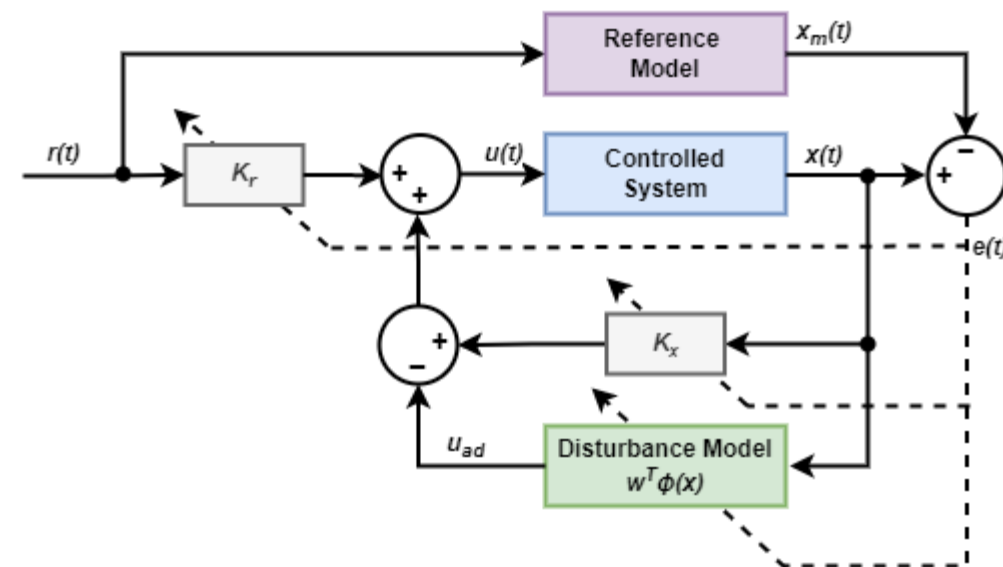
- Об'єкт керування з невідомими параметрами θ^* .
- Еталонна модель — лінійна система з бажаною динамікою: $\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m r(t)$
- Адаптивний регулятор з параметрами $\hat{\theta}(t)$, що оновлюються онлайн.
- Закон адаптації — диференціальне рівняння для $\hat{\theta}$.

Мета MRAC: забезпечити $e(t) = x(t) - x_m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тобто вихід реального об'єкта має прямувати до виходу еталонної моделі

У повній реалізації для квадрокоптера MRAC застосовується до кожного каналу каскадної архітектури:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}}_\phi &= -\gamma_\phi e_\phi \phi^*, \\ \dot{\hat{k}}_\theta &= -\gamma_\theta e_\theta \theta^*, \\ \dot{\hat{k}}_z &= -\gamma_z e_z z^*\end{aligned}$$

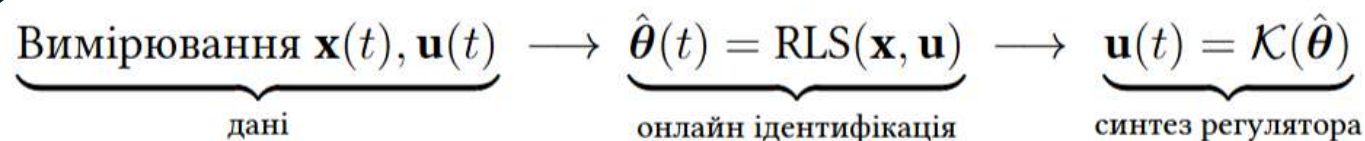
Адаптивне керування та PID-регулятори в БпЛА



Самоналаштувальний регулятор (STR)

Самоналаштувальний регулятор (Self-Tuning Regulator, STR) реалізує принцип поділу задач: спочатку параметри об'єкта ідентифікуються в реальному часі, а потім на основі отриманих оцінок синтезується оптимальний регулятор.

Це принципово відрізняє STR від MRAC: у MRAC параметри регулятора оновлюються безпосередньо з помилки виходу, тоді як у STR спочатку оцінюються параметри об'єкта, і лише потім перераховуються параметри регулятора.



- Рекурсивний метод найменших квадратів (RLS)** - дозволяє оновлювати оцінку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ при надходженні нових вимірювань без необхідності зберігати всю передісторію даних:

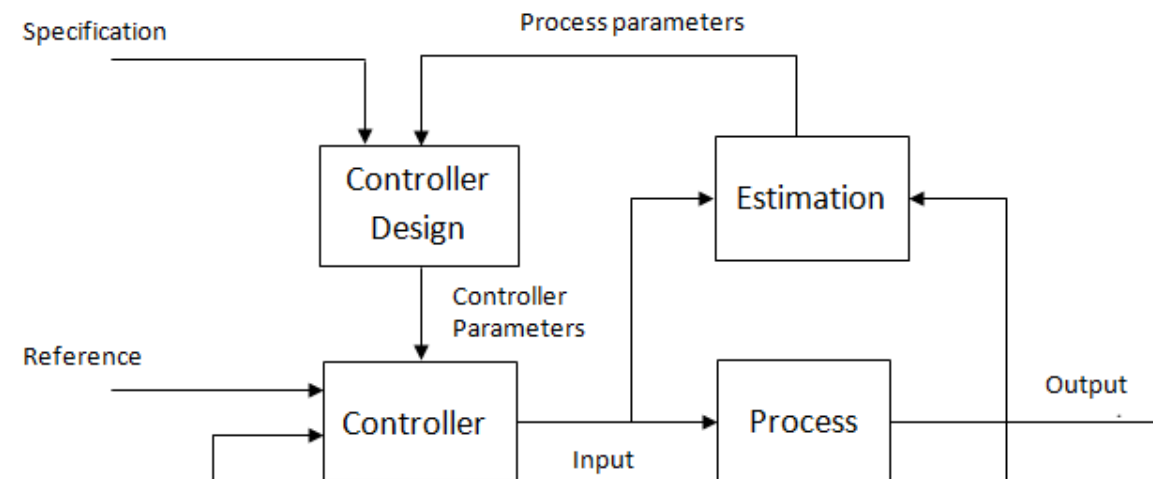
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + K(t) \varepsilon_p(t),$$

$$K(t) = \frac{P(t) \boldsymbol{\varphi}(t)}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^\top(t) P(t) \boldsymbol{\varphi}(t)},$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} [I - K(t) \boldsymbol{\varphi}^\top(t)] P(t)$$

де

- $\varepsilon_p(t) = y(t) - \boldsymbol{\varphi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ - *апостеріорна помилка передбачення*,
- $P(t) \succ 0$ - матриця коваріації помилки оцінки,
- $\lambda \in (0, 1]$ - *фактор забування (forgetting factor)*: при $\lambda < 1$ стара інформація "забувається", що дозволяє відстежувати повільно змінні параметри.



Порівняння MRAC та STR

Критерій	MRAC	STR
Що адаптується	Параметри регулятора	Параметри об'єкта + регулятор
Метод	Ляпунов / градієнт	Рекурсивна ідентифікація
Збіжність	Доведена за Ляпуновим	Залежить від РЕ-умови
Прозорість	Висока (прямий зв'язок)	Середня (два кроки)
Застосування	Швидка адаптація	Повільна зміна параметрів

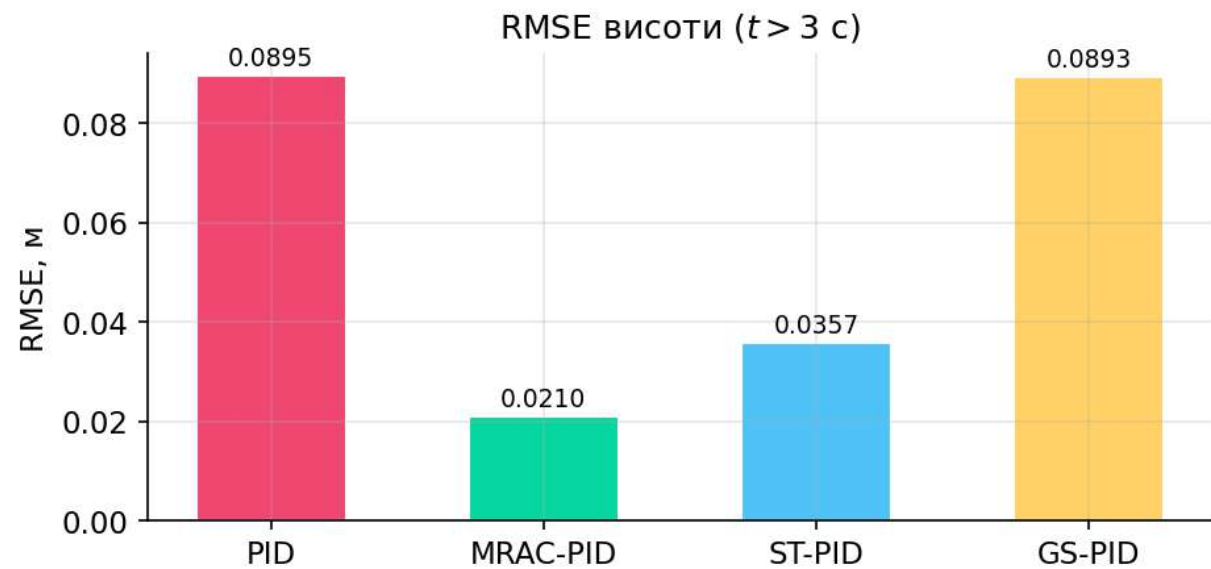
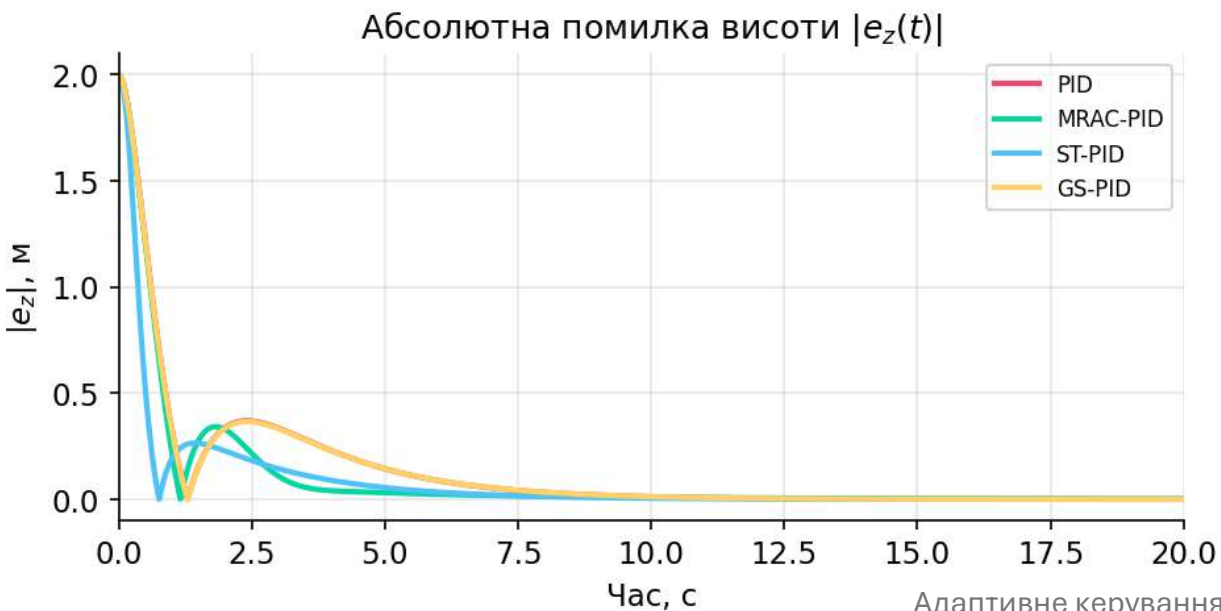
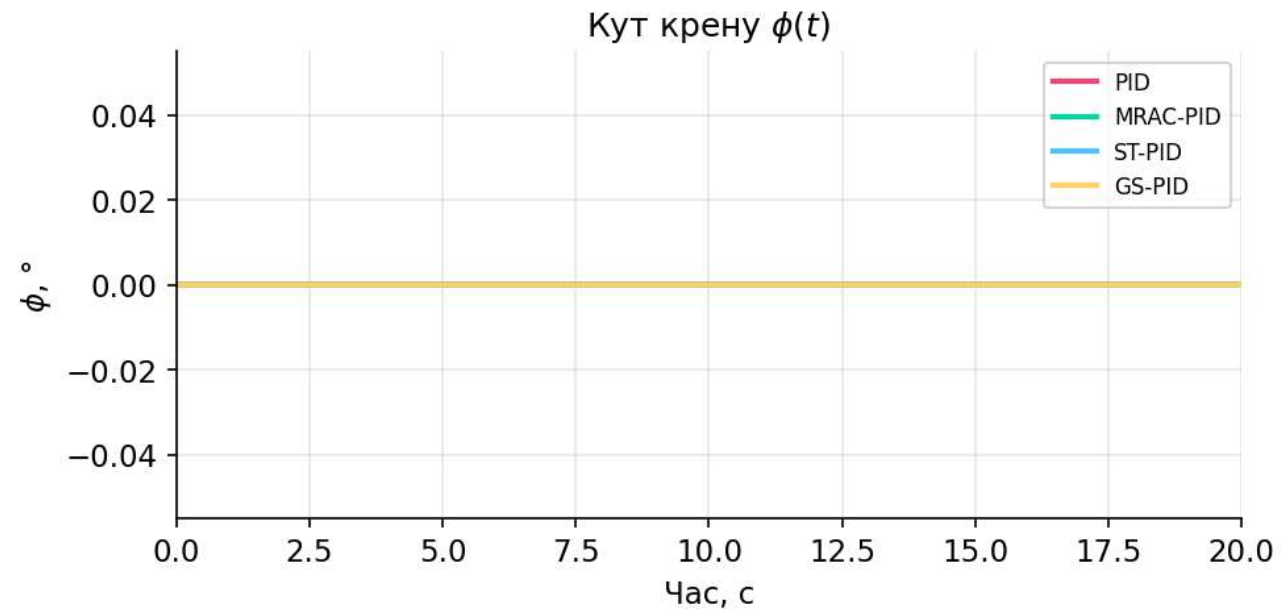
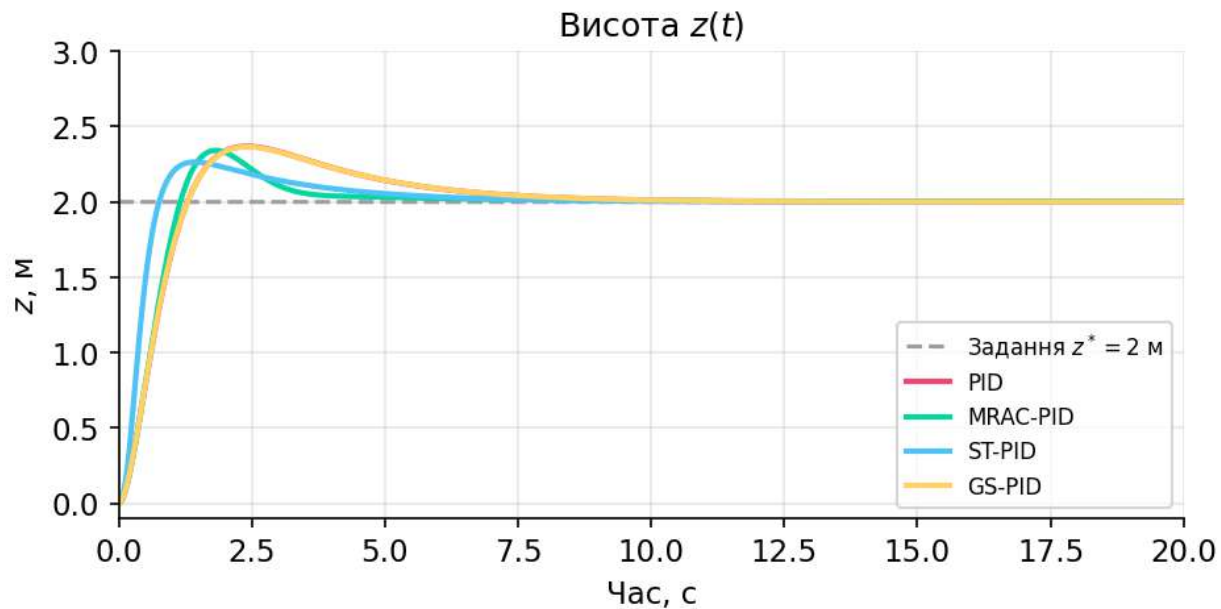
Практичне порівняння адаптивних підходів

Використаємо 3 адаптивні підходи:

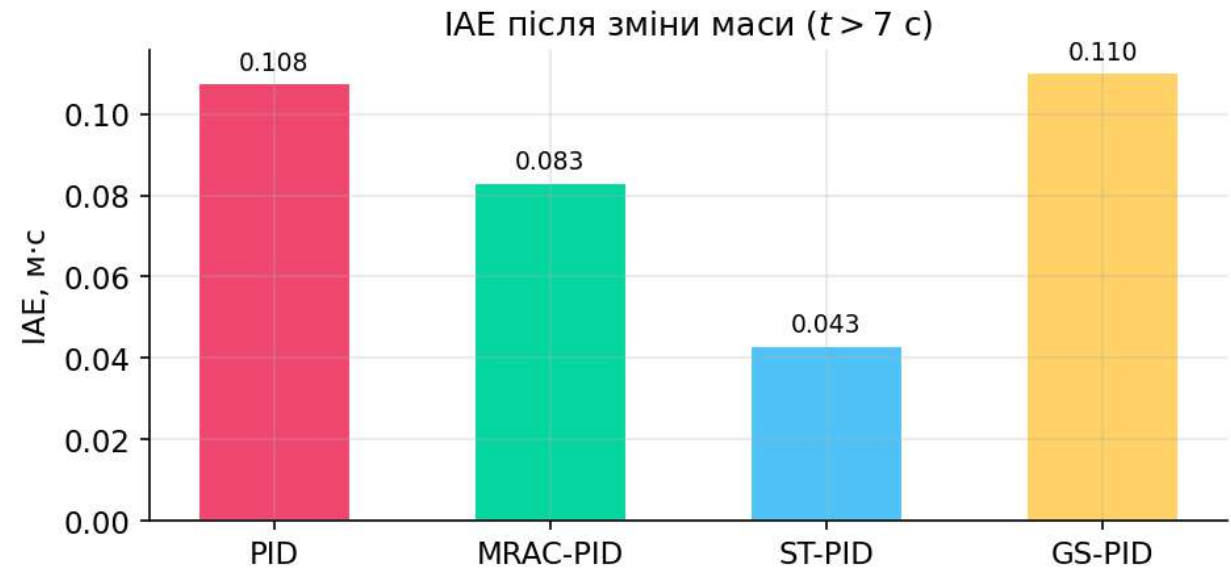
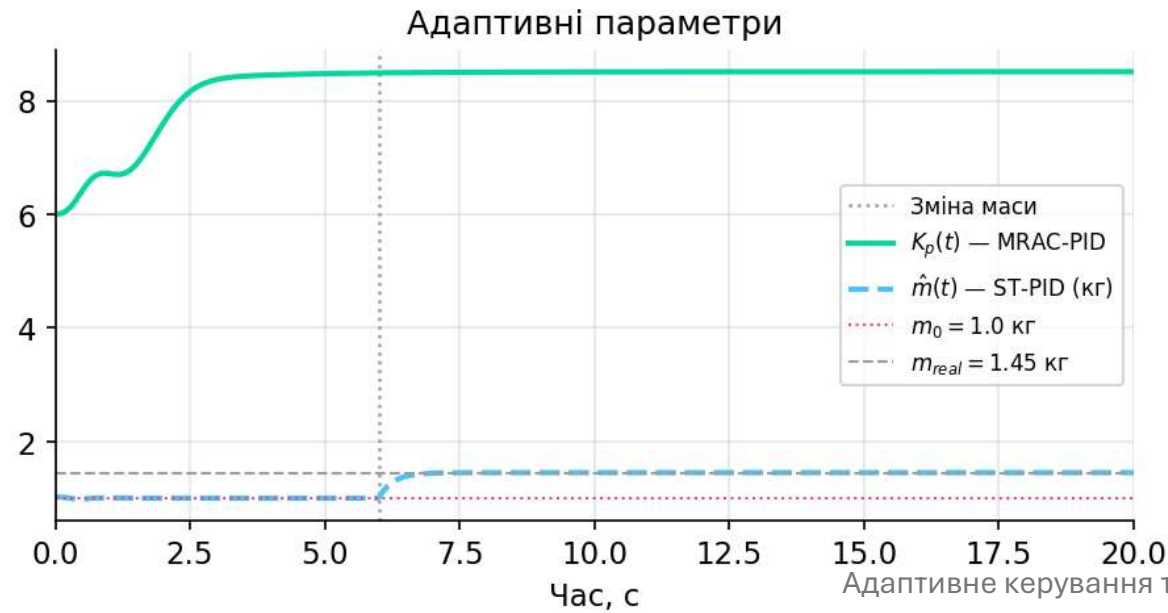
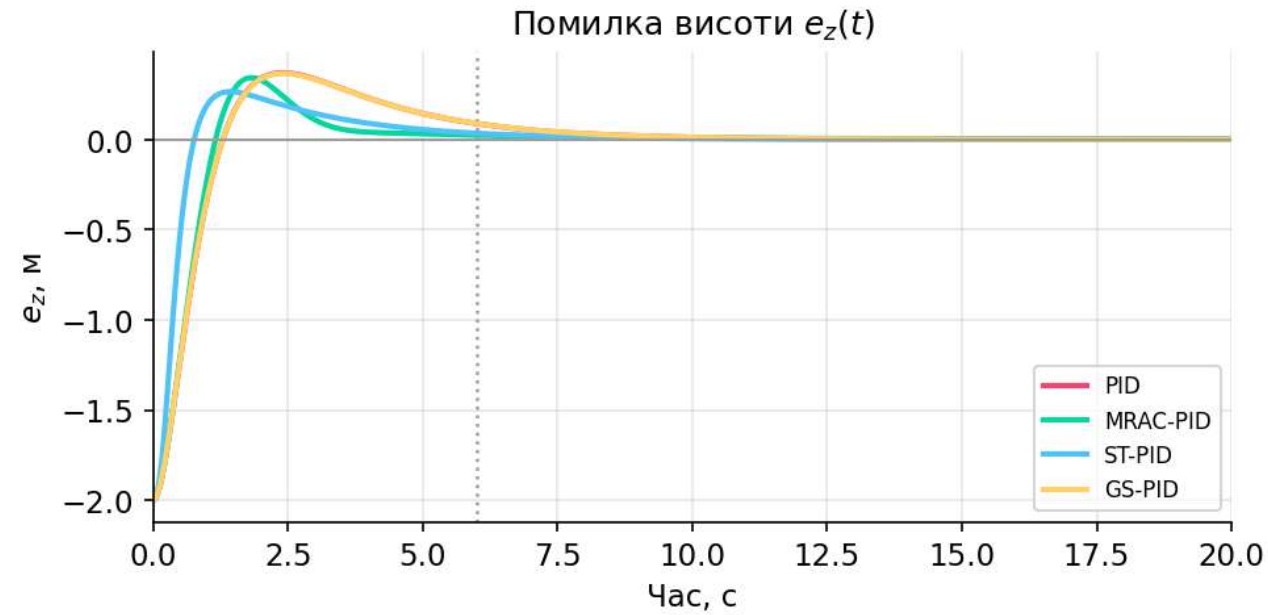
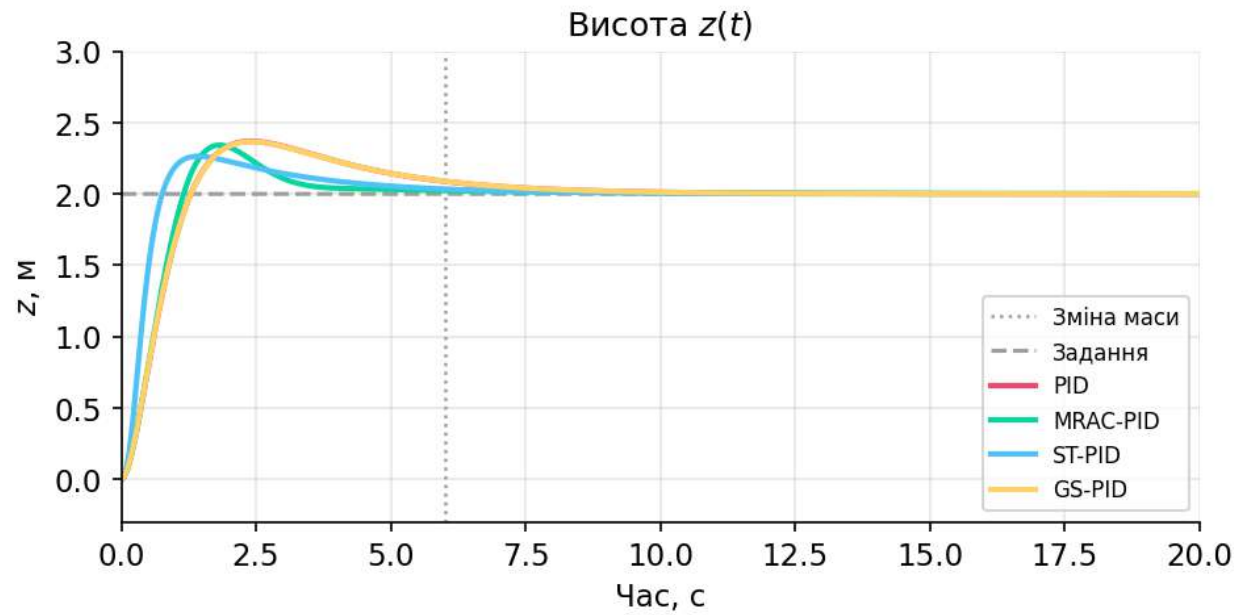
- **MRAC** – закон MRAC використовується для безпосереднього керування коефіцієнтами PID через Ляпуновський аналіз помилки відстеження
- **STR** – коефіцієнти оновлюються на основі онлайн ідентифікації параметрів об'єкта методом рекурсивних найменших квадратів
- **GS** – планування коефіцієнтів між режимами зависання та крейсерського польоту з аналізом перехідних режимів

Підхід: замість того, щоб замінювати PID-регулятор на адаптивний, ми зберігаємо добре зрозумілу та технічно відпрацьовану PID-структуру, але дозволяємо її коефіцієнтам змінюватися в реальному часі відповідно до поточного стану об'єкта та помилки відстеження.

Сценарій 1: Номінальний режим зависання ($m = 1.0$ кг, $z^* = 2$ м)

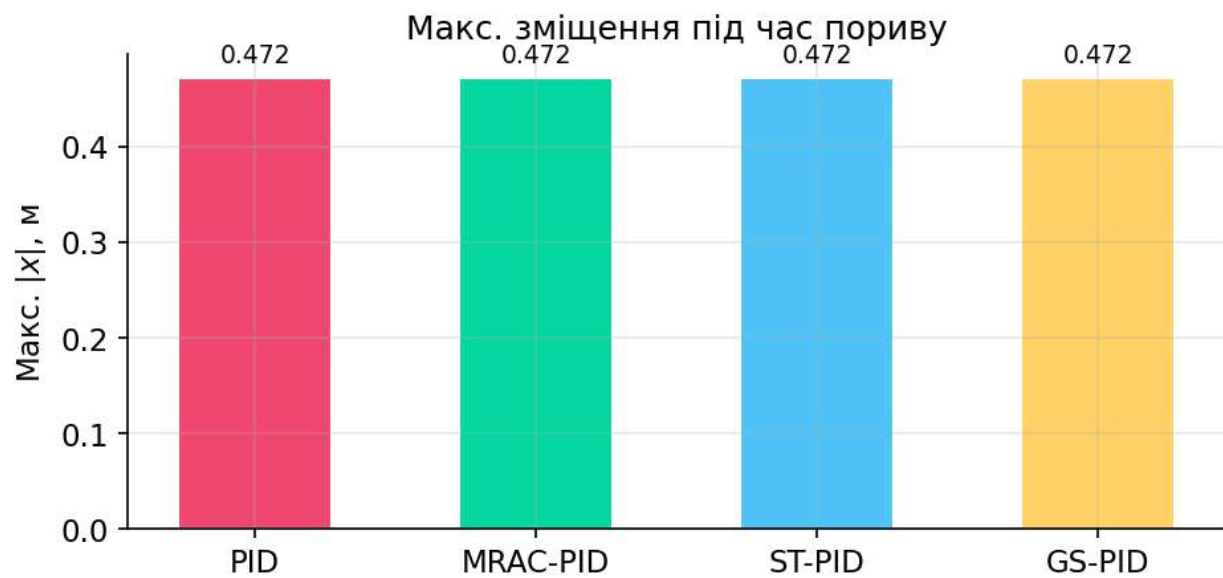
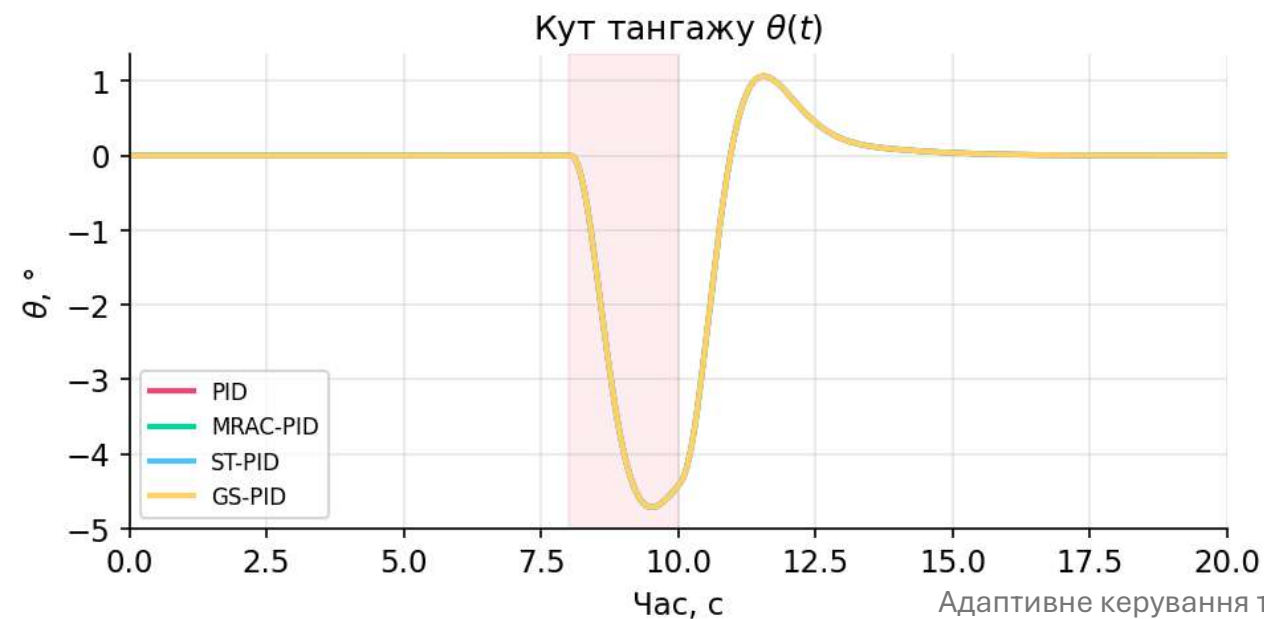
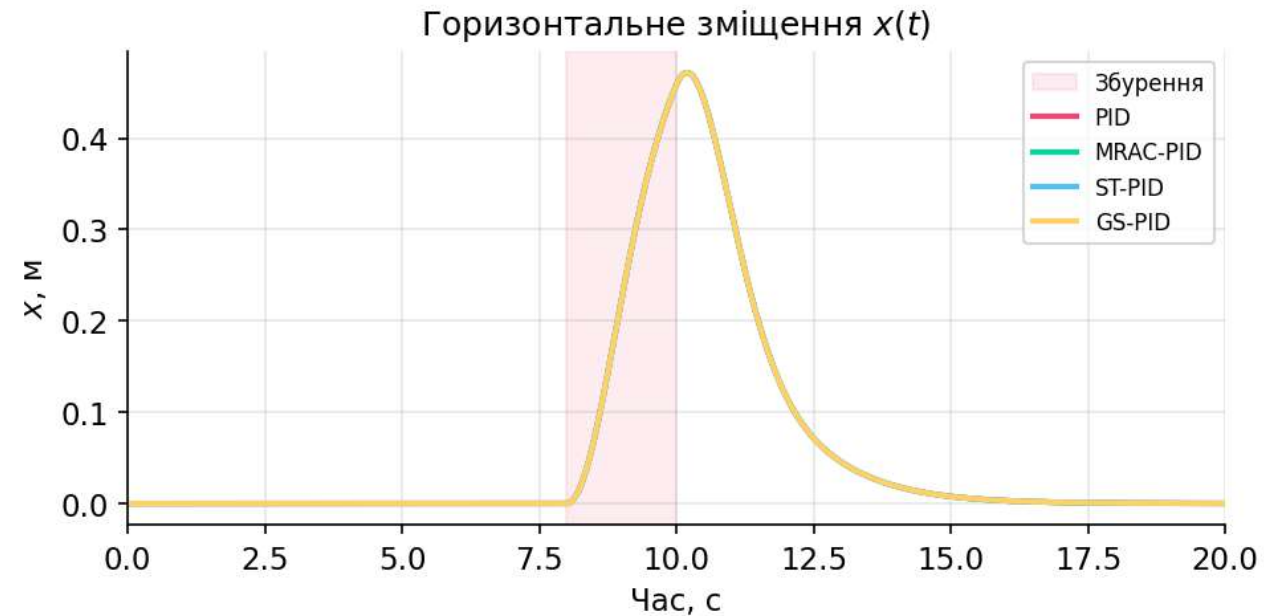
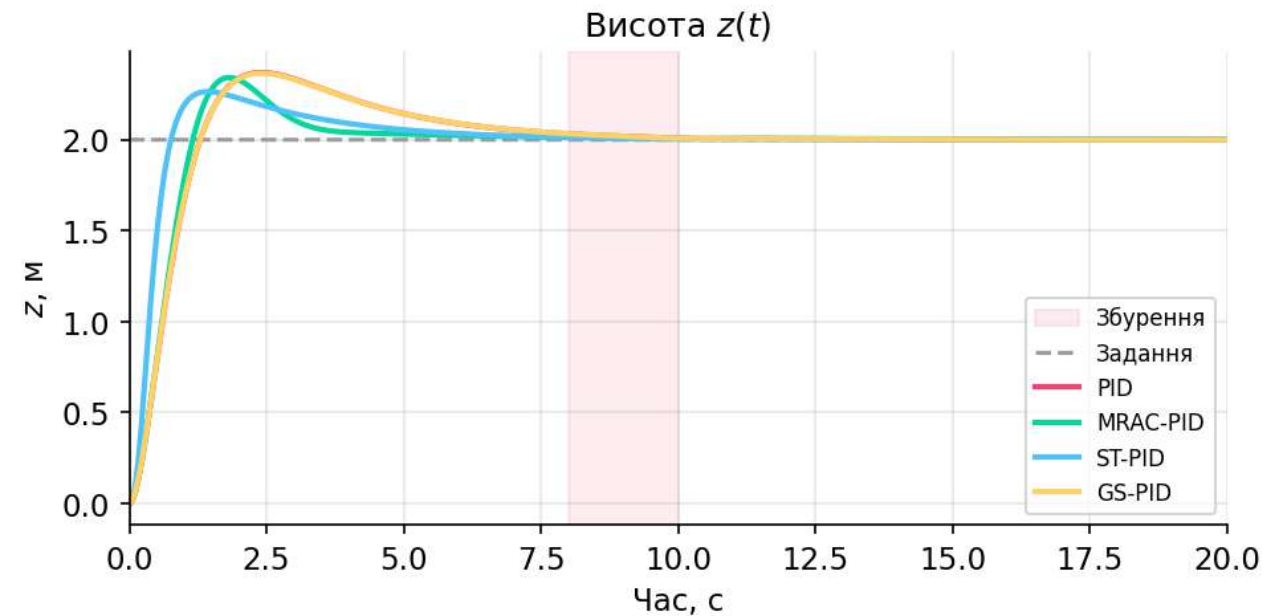


Сценарій 2: Зміна маси +45% при $t = 6$ с (PID налашт. для m_0)

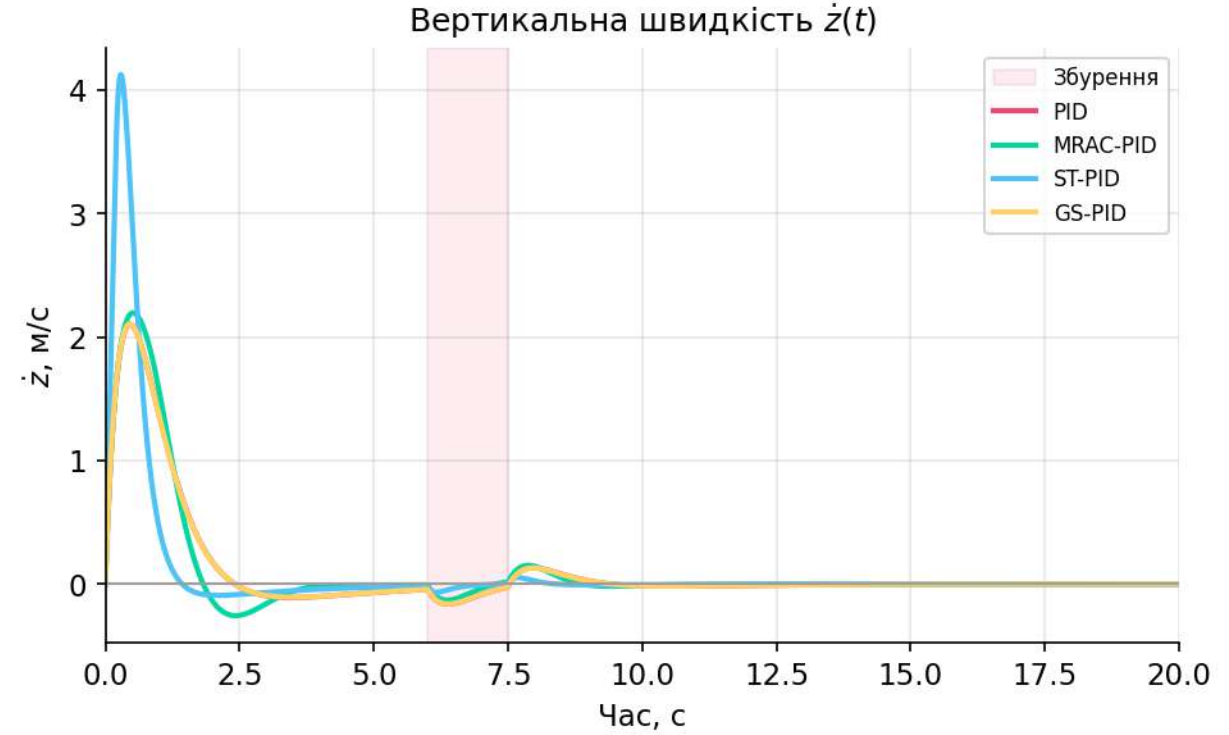
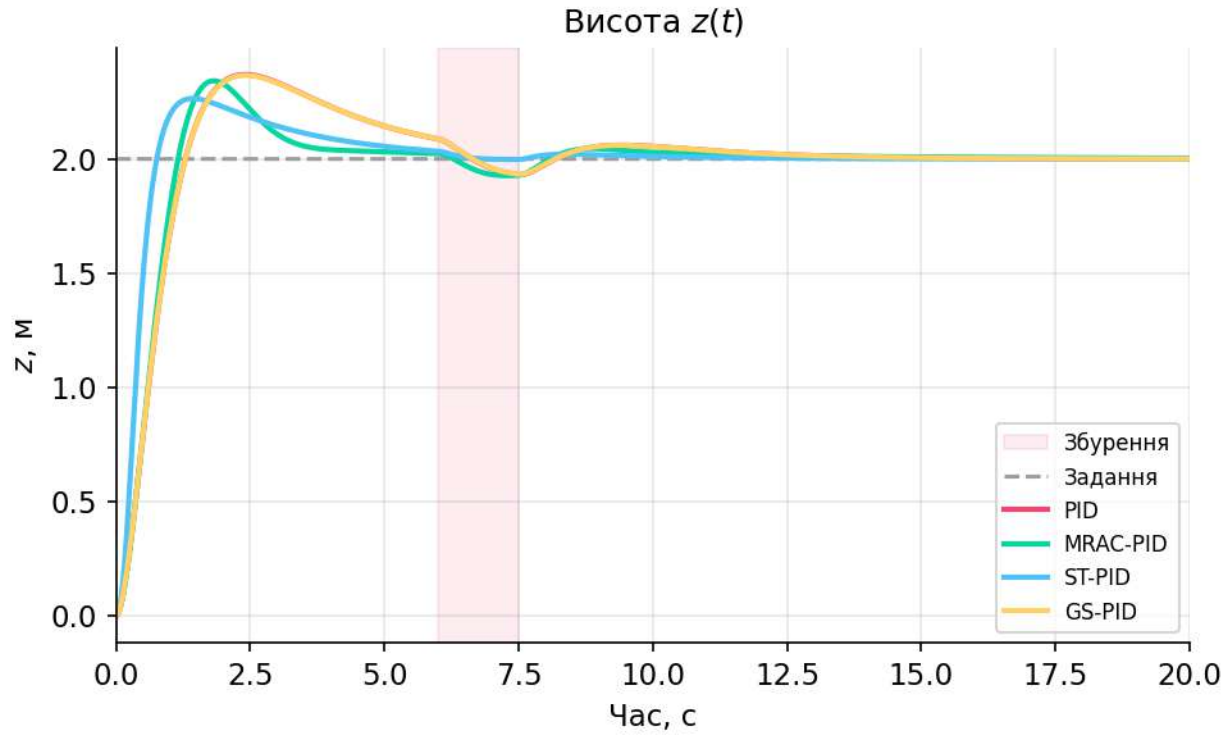


Адаптивне керування та PID-регулятори в БпЛА

Сценарій 3: Горизонтальний порив $d_x = 0.6 \text{ Н}$, $t \in [8, 10] \text{ с}$

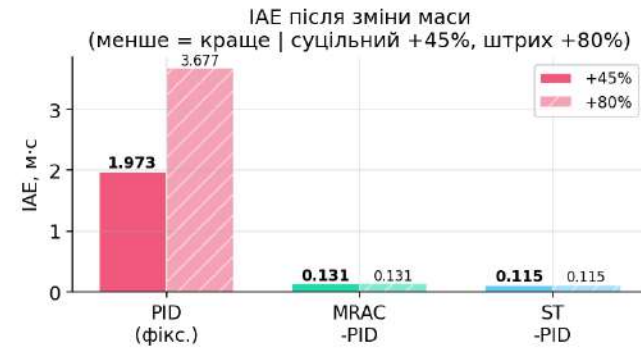
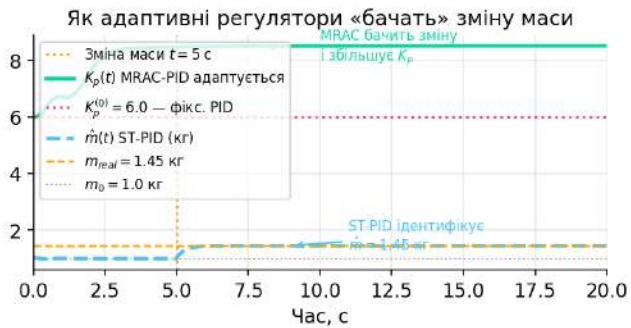
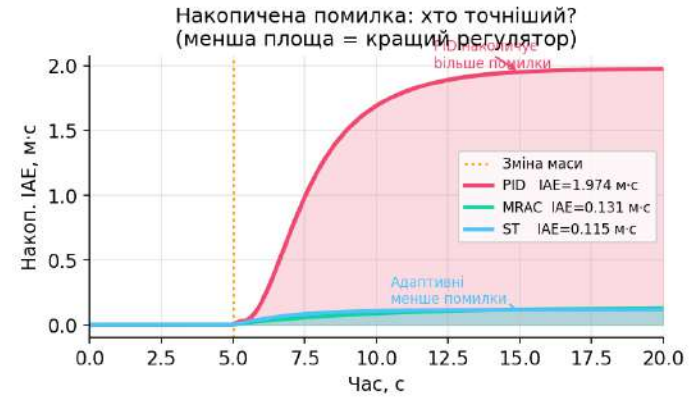
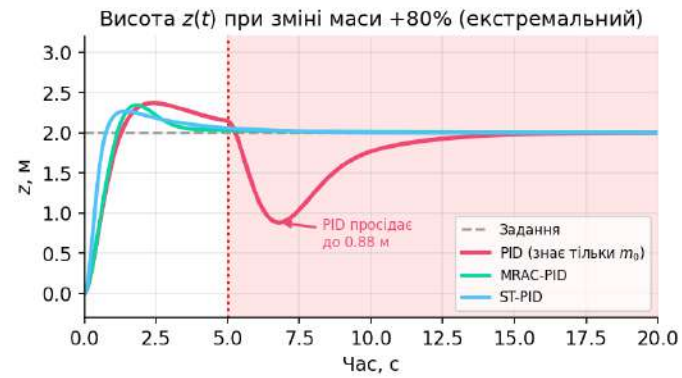
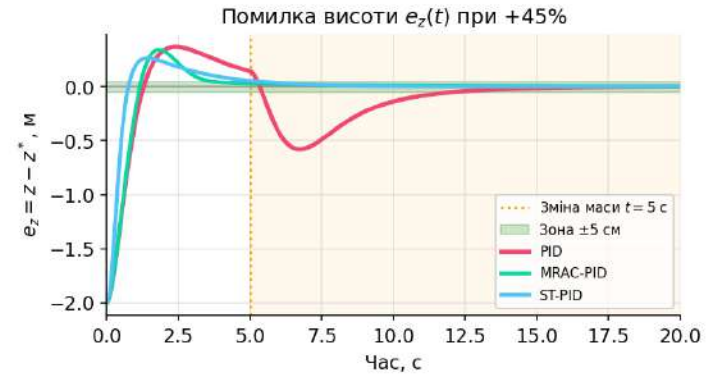
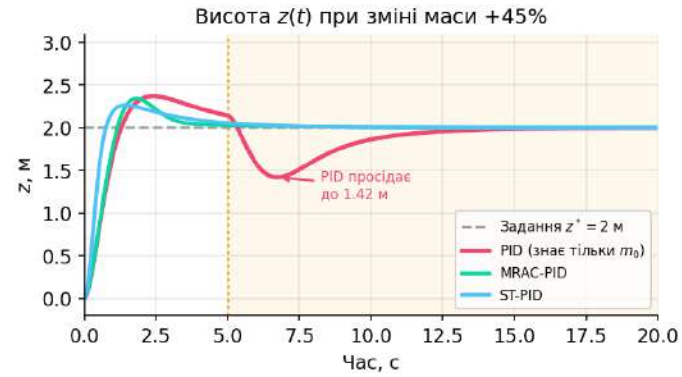


Сценарій 4: Вертикальний порив $d_z = -0.8$ Н, $t \in [6, 7.5]$ с



Адаптивний PID проти фіксованого PID

Реалістичний тест: регулятор налаштований для $m_0 = 1$ кг, дрон підіймає вантаж



Зведена таблиця показників якості керування

Сценарій	Метод	RMSE (м)	IAE (м·с)	Макс. e (м)	Перерег. (%)	Час рег. (с)
Номінал	PID	0.0895	0.757	0.3351	18.5	7.14
	MRAC-PID	0.0210	0.229	0.1090	17.1	3.63
	ST-PID	0.0357	0.300	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0893	0.759	0.3326	18.3	7.17
Зміна маси	PID	0.0895	0.757	0.3351	18.5	7.10
	MRAC-PID	0.0210	0.229	0.1090	17.1	3.63
	ST-PID	0.0358	0.300	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0893	0.759	0.3326	18.3	7.13
Вітер	PID	0.0895	0.756	0.3351	18.5	7.14
	MRAC-PID	0.0210	0.228	0.1090	17.1	3.63
	ST-PID	0.0357	0.300	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0893	0.759	0.3326	18.3	7.17
Верт. порив	PID	0.0915	0.887	0.3351	18.5	10.30
	MRAC-PID	0.0305	0.393	0.1090	17.1	7.74
	ST-PID	0.0355	0.302	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0911	0.884	0.3326	18.3	10.29