

ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБР СКЛАДНОІМЕННИХ ДАНИХ

У статті розглянуто питання побудови та дослідження алгебр номінативних даних зі складними іменами у рамках композиційно-номінативного підходу. Визначено сім'ю алгебр складноіменних даних і встановлено властивості операцій цих алгебр. Доведено нерозв'язність елементарної теорії алгебри складноіменних даних навіть із порожнім класом базових значень.

Ключові слова: номінативні дані, композиційно-номінативний підхід.

Вступ

Теорія програмування як наука перебуває у стадії становлення, у зв'язку з чим чимало її понять залишаються інтуїтивними і не мають адекватних математичних уточнень, або існуючі уточнення є неповними. Тому у багатьох випадках важко формулювати у точних термінах проблеми, важливі для теорії програмування.

Один із підходів, що може бути застосований для подолання вказаних труднощів, є *композиційно-номінативний підхід* до уточнення понять програмування [3, 5]. Він передбачає розробку ієрархії адекватних моделей програм різного рівня абстракції та загальності. Згідно з цим підходом, дані уточнюються як певні класи *номінативних даних* (від латинського *poten* – ім'я), програми – як *функції над номінативними даними* (*номінативні функції*), а засоби конструювання програм – як *композиції програм* (оператори над класами номінативних функцій).

У цій статті розглядається одне із завдань композиційно-номінативного підходу, яке полягає у побудові та дослідженні алгебр номінативних даних зі складними іменами [2]. Такі алгебри можуть бути використані як формальні моделі структур даних при побудові моделей мов програмування.

У статті ми будемо використовувати такі позначення:

- V^+ – множина непорожніх слів в алфавіті V ;
- $\text{pref}(u) = \{v \in V^+ \mid \exists w \in V^* u = vw\}$ – непорожні префікси слова $u \in V^+$;
- $u \leq v$ ($u < v$) – слово u є префіксом (власним префіксом) слова v ;
- $f(x) \downarrow$ – функція f визначена на аргументі x ;
- $f(x) \uparrow$ – функція f не визначена на аргументі x ;

- $f(x) \cong g(y)$ – сильна рівність, тобто $f(x) \downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $g(y) \downarrow$, і тоді $f(x) = g(y)$;
- $A \xrightarrow{n} B$ – клас (часткових) функцій зі скінченним графіком.

Номінативні та складноіменні дані

Інтуїтивно номінативні дані можна трактувати як ієрархічно побудовані об'єкти, в основі яких лежить бінарне відношення ім'я $\mapsto$ значення. Такі дані можна подавати текстовим записом, подібним до наведеного нижче (де a, b, c – імена):

$$[a \mapsto 1, b \mapsto [a \mapsto 2, c \mapsto 3]].$$

Формально номінативні дані можуть визначатися індуктивно або рекурсивно на основі множини імен V і класу базових значень (атомів) W .

Індуктивне визначення має такий вигляд:

- $ND_0(V, W) = W$,
- $ND_{k+1}(V, W) = W \cup (V \xrightarrow{n} ND_k(V, W))$ для $k \geq 0$.

Тоді усі номінативні дані складають клас

$$ND(V, W) = \bigcup_{k \geq 0} ND_k(V, W) \quad (1)$$

Визначимо *ранг* непорожнього номінативного даного d як найменше ціле число $k \geq 0$, таке, що $d \in ND_k(V, W)$. Ранг порожнього даного покладемо рівним нулю.

Рекурсивне визначення номінативних даних має такий вигляд: $ND(V, W)$ є найменшим за включенням розв'язком рівняння

$$ND(V, W) = W \cup (V \xrightarrow{n} ND(V, W)) \quad (2)$$

Еквівалентність індуктивного та рекурсивного визначення номінативних даних встановлюється наступною лемою.

Лема 1. Найменший розв'язок рівняння (2) існує та визначається рівністю (1).

Доведення цієї леми випливає з теореми Тарського-Кліні про нерухому точку.

У статті ми будемо розглядати номінативні дані спеціального вигляду – *складноіменні дані*. Для точного визначення таких даних спочатку введемо клас номінативних даних зі складними іменами $NDV(V, W) = ND(V^+, W)$. Для деяких даних класу $NDV(V, W)$ порушується принцип однозначності структурного іменування (ОСІ) [2]. Наприклад, в даному $[ab \mapsto 1, a \mapsto [b \mapsto 2]]$ порушується ОСІ, оскільки доцільно вважати, що складному імені ab в цьому даному відповідає два різних значення (1 і 2). Виділимо підклас $NDVC(V, W)$ класу $NDV(V, W)$, для якого виконується принцип ОСІ, який назовемо класом складноіменних даних. Перш ніж визначити цей клас даних, введемо ряд допоміжних визначень, в яких $d \in NDV(V, W)$:

- (іменним) шляхом в d називається послідовність імен $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ ($k \geq 1$) така, що визначено значення $d(v_1, v_2, \dots, v_k) \cong (\dots((d(v_1))(v_2))\dots(v_k))$ шляху в d ; шлях називається термінальним в d , якщо його значенням в d є дане рангу 0. Для шляхів $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ і $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$ будемо писати $(v_1, v_2, \dots, v_n) \leq (v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$, якщо $n \leq m$ і $v_i = v'_i$ для $i = \overline{1, n}$.
- $rn(d) = \{u \mid d(u) \downarrow\}$ – множина корневих імен d ;
- $d/u = [v_1 \mapsto d(v) \mid \exists v_1 \in V^+ (v \in rn(d) \wedge v = uv_1)] = uv_1]$ – ділення d на ім'я $u \in V^+$;
- $ra(d) = \{u \mid d(u) \downarrow \in W\}$ – множина атомних корневих імен d ;
- $rn_0(d) = \{u \in rn(d) \mid d(u) \notin W\}$ – множина неатомних корневих імен d ;
- $rp_0(d) = \{u \in V^+ \mid d/u \neq \emptyset\}$ – власні префікси корневих імен d ;

- $rs(d) = rp_0(d) \cup rn(d)V^*$ – слова, порівнювані кореневими іменами d .

Визначимо формально клас складноіменних даних таким чином. Нехай V – непорожня скінченна множина базових імен. Тоді $NDVC(V, W) = W \cup G(V, W)$, де $G(V, W)$ – дані $d \in NDV(V, W) \setminus W$ такі, що для довільних двох іменних шляхів $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ та $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$ в d , таких, що $v_1 v_2 \dots v_n \leq v'_1 v'_2 \dots v'_m$, виконується відношення $(v_1, v_2, \dots, v_n) \leq (v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$.

Змістовно клас $NDVC(V, W)$ складають дані, імена в яких є словами в алфавіті V і в яких немає двох іменних шляхів (один з яких не є початком іншого), таких, що конкатенація імен вздовж одного шляху є префіксом конкатенації імен вздовж іншого шляху. Домовимося, що надалі літерою d (можливо, з індексами) будуть позначатися дані класу $NDVC(V, W)$.

Кожному складноіменному даному можна поставити у відповідність орієнтоване дерево з дугами, розміченими іменами та листками, розміченими значеннями таким чином: іменним шляхам даного ставляться у відповідність шляхи в дереві, що починаються з кореня, причому термінальним шляхам даного ставляться у відповідність шляхи від кореня до листа дерева. Наприклад, вважаючи, що $a, b, c, d \in V$ і $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq W$, даному $[a \mapsto 1, bc \mapsto 2, bd \mapsto [c \mapsto 3, d \mapsto 4]]$ відповідає дерево, подане на рис. 1.

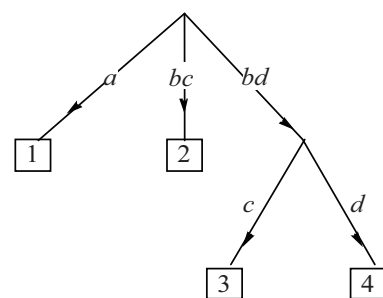


Рис. 1. Приклад дерева, що відповідає складноіменному даному

Алгебри складноіменних даних

Для роботи зі складноіменними даними введемо дві операції типу $NDVC(V, W) \rightarrow NDVC(V, W)$, залежні від параметру-імені $v \in V^+$: операція іменування $\Rightarrow v$ і операція асоціативного розіменування $v \Rightarrow_a$. Операція $\Rightarrow v$ визначається рівністю $\Rightarrow v(d) = [v \mapsto d]$. Операція $v \Rightarrow_a$ визначається індуктивно за довжиною v :

- $v \Rightarrow_a(d) = d(v)$, якщо $|v| = 1$ і $v \in rn(d)$;
- $v \Rightarrow_a(d) = d/v$, якщо $|v| = 1$, $v \notin rn(d)$ і $d/v \neq \emptyset$;
- $v \Rightarrow_a(d) \uparrow$, якщо $|v| = 1$, $v \notin rn(d)$ і $d/v = \emptyset$;
- $v \Rightarrow_a(d) \cong v_1 \Rightarrow_a(x \Rightarrow_a(d))$, якщо $|v| = n \geq 2$ і $v = xv_1$, де $|x| = 1$ і $|v_1| = n - 1$.

Введемо на складноіменних даних бінарну операцію структурного накладання ∇_s , яка за двома даними утворює третє, що містить значення другого і ті значення з першого, що не були перевизначені (на основі імен) в другому. На прикладах вона діє таким чином:

- $[a \mapsto d_1] \nabla_s [b \mapsto d_2] = [a \mapsto d_1, b \mapsto d_2]$, $a, b \in V$, $a \neq b$;
- $[ab \mapsto d_1] \nabla_s [a \mapsto d_2] = [a \mapsto d_2]$ – значення під іменем a перевизначає значення під іменами, що є продовженнями a ;
- $[a \mapsto d_1] \nabla_s [ab \mapsto d_2] = [a \mapsto d_1 \nabla_s [b \mapsto d_2]]$ – значення під іменем ab модифікує значення під іменем a .

Формальне визначення структурного накладання подамо індуктивно за рангом першого аргументу. Якщо d_1 – дане рангу нуль, то

- $d_1 \nabla_s d_2 = d_2$, якщо $d_1 = \emptyset$ і $d_2 \in NDVC(V, W) \setminus W$;
- $d_1 \nabla_s d_2 \uparrow$, якщо $d_1 \in W$ або $d_2 \in W$.

Індукційний перехід. Якщо d_1 – дане рангу $k + 1$, то $d_1 \nabla_s d_2 = d$, де дане d визначено таким чином:

$$1) d(u) \downarrow = d_2(u), \text{ якщо}$$

$u \in rn(d_2) \setminus rn(d_1)V^+$, тобто u є кореневим іменем в d_2 і не має власного префіксу, що є кореневим іменем в d_1 ;

$$2) d(u) \downarrow = d_1(u) \nabla_s (d_2/u) \text{ якщо}$$

$u \in rn_0(d_1) \cap rp_0(d_2)$, тобто u є неатомним кореневим в d_1 і власним префіксом кореневого імені в d_2 ;

$$3) d(u) \downarrow = d_2/u, \text{ якщо}$$

$u \in ra(d_1) \cap rp_0(d_2)$, тобто u є атомним кореневим іменем в d_1 і власним префіксом кореневого імені в d_2 ;

$$4) d(u) \downarrow = d_1(u), \text{ якщо}$$

$u \in rn(d_1) \setminus rs(d_2)$, тобто u є кореневим іменем в d_1 і не порівнюється з жодним кореневим іменем з d_2 ;

$$5) d(u) \uparrow, \text{ в інших випадках, тобто}$$

якщо $u \notin rn(d_1) \cup rn(d_2)$ або

$u \in rn(d_1) \cap rn(d_2)V^+$, або

$u \in rn(d_2) \cap rn(d_1)V^+$.

Належність $d \in NDVC(V, W)$ у цьому визначенні легко перевіряється.

Введені вище операції дозволяють визначити сім'ю алгебр складноіменних даних $\{NDA(V, W) \mid V, W\}$, залежних від параметрів V і W .

Визначимо алгебру $NDA(V, W)$ таким чином: носієм алгебри є множина $NDVC(V, W)$, а операціями є сім'я унарних операцій іменування $\{\Rightarrow u \mid u \in V^+\}$, сім'я (часткових) унарних операцій асоціативного розіменування $\{u \Rightarrow_a \mid u \in V^+\}$, (часткова) бінарна операція структурного накладання ∇_s і функція-константа $\bar{\emptyset}$.

Введення алгебр складноіменних даних є важливим, оскільки на їхній основі можна побудувати формальні мови програм обробки даних зі складними іменами. Такі формальні мови можуть відображати важливі аспекти

практичних мов програмування і використовуватись як їхні моделі.

Основні тотожності в алгебрі $NDA(V, W)$ надає наступна теорема.

Теорема 1 [2]. Мають місце такі тотожності:

- (1) $v \Rightarrow_a (\Rightarrow v(d)) = d$ (оберненість розіменування іменуванню);
- (2) $v \Rightarrow_a (u \Rightarrow_a (d)) \cong (uv) \Rightarrow_a (d)$ (асоціативність розіменування);
- (3) $d \nabla_s d = d$, якщо $d \notin W$ (обмежена ідемпотентність накладання);
- (4) $d_1 \nabla_s (d_2 \nabla_s d_3) \cong (d_1 \nabla_s d_2) \nabla_s d_3$ (асоціативність накладання);
- (5) $d_2 \nabla_s (d_1 \nabla_s d_2) \cong d_1 \nabla_s d_2$ (поглинання).

Нерозв'язність елементарної теорії алгебри складноіменних даних

Розглянемо проблему перевірки виконання формул 1-го порядку за участі операцій над складноіменними даними. Ця проблема є важливою, оскільки необхідність її розв'язання може виникнути при перевірці властивостей програм, що обробляють номінативні дані. Однак, як буде показано в цьому розділі, вона переважно алгоритмічно нерозв'язна.

Розглянемо випадок порожнього класу базових значень і доведемо, що елементарна теорія алгебри $NDA(V, \emptyset)$ не розв'язна (якщо $|V| \geq 2$). Для цього спочатку визначимо алгебру $NDPA(V)$, що є ізоморфною алгебрі $NDA(V, \emptyset)$, але елементами носія якої є множини слів, а не складноіменні дані. Після цього доведемо, що елементарна теорія алгебри $NDPA(V)$ не розв'язна, з чого випливатиме нерозв'язність елементарної теорії алгебри $NDA(V, \emptyset)$.

Будемо позначати $FinSet(A)$ – множина скінченних підмножин множини A . Визначимо ряд допоміжних операцій:

- 1) тотальна операція $\cdot : V^+ \times FinSet(V^+) \rightarrow FinSet(V^+)$ визначається рівністю $u \cdot D = \{uv \mid v \in D\}$;
- 2) сім'я тотальних операцій $u^* : FinSet(V^+) \rightarrow FinSet(V^+)$, $u \in V^+$

визначається рівністю

$$u^* D = \{u\} \cup \{uv \mid v \in D\};$$

- 3) тотальна операція

$$/ : FinSet(V^+) \times V^+ \rightarrow FinSet(V^+)$$

визначається рівністю

$$A / u = \{v \in V^+ \mid uv \in A\};$$

- 4) сім'я часткових операцій

$$//u : FinSet(V^+) \rightarrow FinSet(V^+), u \in V^+$$

визначається умовами $D // u = (D / u) \setminus \{\varepsilon\}$,

якщо $D / u \neq \emptyset$, і $D // u$ не визначено, якщо $D / u = \emptyset$;

- 5) тотальна операція

$$\oplus : FinSet(V^+) \times FinSet(V^+) \rightarrow FinSet(V^+)$$

визначається як

$$D_1 \oplus D_2 = D_2 \cup \{u \in D_1 \mid pref(u) \cap D_2 = \emptyset\}.$$

Визначимо алгебру $NDPA(V)$,

поклавши в якості її носія множину

$$FinSet(V^+),$$

а в якості операцій –

$$\{u^* \mid u \in V^+\} \cup \{//u \mid u \in V^+\} \cup \{\oplus\} \cup \{\bar{\emptyset}\},$$

де $\bar{\emptyset}$ – функція-константа.

Наведемо таку теорему.

Теорема 2. Алгебри $NDPA(V)$ і

$NDA(V, \emptyset)$ ізоморфні (якщо їх привести до

однієї сигнатури). Відображення

$$npc : NDVC(V, \emptyset) \rightarrow FinSet(V^+)$$

визначено

$$npc(d) = \{u_1 u_2 \dots u_k \mid k \geq 1 \wedge d(u_1, u_2, \dots, u_k) \downarrow\},$$

$d \in NDVC(V, \emptyset)$ є ізоморфізмом між ними.

Доведення цієї теореми може бути проведено шляхом перевірки бієктивності відображення і доведення того, що воно є сильним гомоморфізмом індукцією за рангом даного.

Введемо предикати $Subset^*$,

$$\{succ_v^*\}_{v \in V}, \{succ_v^*\}_{v \in V} \text{ на } (FinSet(V^+))^2 \text{ і}$$

$$Sing^*, Eps^* \text{ на } FinSet(V^+), \text{ такі, що для всіх}$$

$$A, B \in FinSet(V^+) \text{ виконуються умови}$$

$$1) Subset^*(A, B) \Leftrightarrow A \subseteq B;$$

$$2) Sing^*(A) \Leftrightarrow |A| = 1;$$

$$3) Eps^*(A) \Leftrightarrow A = \{\varepsilon\};$$

$$4)$$

$$succ_v^*(A, B) \Leftrightarrow \exists u \in V^+ (A = \{u\} \wedge B = \{vu\})$$

для кожного $v \in V$;

5)
 $\text{succ}_v^*(A, B) \Leftrightarrow \exists u \in V^* (A = \{u\} \wedge B = \{uv\})$
 для кожного $v \in V$.

Також визначимо предикати Subset^+ ,
 $\{\text{succ}_v^+\}_{v \in V}$, $\{\text{succ}_v^+\}_{v \in V}$ на
 $(\text{FinSet}(V^+))^2 \times (\text{FinSet}(V^+))^2$ і
 Sing^+ , Eps^+ на $(\text{FinSet}(V^+))^2$, такі, що для
 всіх $E_A, E_B, D_A, D_B \in \text{FinSet}(V^*)$
 виконуються умови

1)
 $\text{Subset}^+((E_A, D_A), (E_B, D_B)) \Leftrightarrow$
 $E_A \subseteq E_B \wedge D_A \subseteq D_B$;
 2)
 $\text{Sing}^+(E_A, D_A) \Leftrightarrow$
 $(E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \emptyset) \vee (E_A = \emptyset \wedge |D_A| = 1)$;
 3)
 $\text{Eps}^+(E_A, D_A) \Leftrightarrow E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \emptyset$;
 4) $\text{succ}_v^+((E_B, D_B), (E_A, D_A)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$
 $E_B = \emptyset \wedge ((E_A = \emptyset \wedge \exists u \in V^+ (D_A = \{u\} \wedge D_B = \{vu\})) \vee (E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \emptyset \wedge D_B = \{v\}))$
 для кожного $v \in V$;

5) $\text{succ}_v'^+((E_B, D_B), (E_A, D_A)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$
 $E_B = \emptyset \wedge ((E_A = \emptyset \wedge \exists u \in V^+ (D_A = \{u\} \wedge D_B = \{uv\})) \vee (E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \emptyset \wedge D_B = \{v\}))$
 для кожного $v \in V$.

Оберемо фіксований елемент $x_0 \in V$ і
 покладемо $M = \{\emptyset, \{x_0\}\} \times \text{FinSet}(V^+)$.
 Покладемо P_M – характеристичний предикат
 множини M , визначений на $(\text{FinSet}(V^+))^2$.
 Визначимо відображення
 $\varphi: \text{FinSet}(V^*) \rightarrow M$ умовами $\varphi(A) = (\emptyset, A)$,
 якщо $\varepsilon \notin A$ і $\varphi(A) = (\{x_0\}, A \setminus \{\varepsilon\})$, якщо
 $\varepsilon \in A$, де $A \in \text{FinSet}(V^*)$.

Відображення φ бієктивне: обернене
 до нього визначається умовами
 $\varphi^{-1}((\emptyset, D)) = D$ і $\varphi^{-1}((\{x_0\}, D)) = D \cup \{\varepsilon\}$,
 $D \in \text{FinSet}(V^+)$.

Лема 2. Для всіх $A, B \in \text{FinSet}(V^*)$
 мають місце еквівалентності

1)
 $\text{Subset}^*(A, B) \Leftrightarrow \text{Subset}^+(\varphi(A), \varphi(B))$;
 2) $\text{Sing}^*(A) \Leftrightarrow \text{Sing}^+(\varphi(A))$;
 3) $\text{Eps}^*(A) \Leftrightarrow \text{Eps}^+(\varphi(A))$;
 4) $\text{succ}_v^*(B, A) \Leftrightarrow \text{succ}_v^+(\varphi(B), \varphi(A))$
 для кожного $v \in V$;

5)
 $\text{succ}_v'^*(B, A) \Leftrightarrow \text{succ}_v'^+(\varphi(B), \varphi(A))$ для
 кожного $v \in V$.

Доведення випливає з визначення φ і
 відповідних предикатів.

Доведемо, що предикати
 P_M , Subset^+ , Sing^+ , Eps^+ , $\{\text{succ}_v^+\}_{v \in V}$ і
 $\{\text{succ}_v'^+\}_{v \in V}$ виражаються у теорії 1-го порядку
 алгебри $\text{NDPA}(V)$. Для цього визначимо
 спочатку ряд предикатів за допомогою формул
 1-го порядку сигнатури алгебри $\text{NDPA}(V)$. У
 наведених нижче формулах зліва від двокрапки
 вказано предикат, а справа – формулу, якою він
 визначений; малими літерами позначаються
 змінні, які змістовно призначені для
 представлення одноелементних множин слів, а
 великими – до довільних множин слів; це
 узгодження – лише для зручності читача і не
 впливає на інтерпретацію.

1) $\text{Const}_v(d): d = v * \emptyset$ для кожного
 $v \in V$;
 2) $D_1 \hat{=} D_2: D_2 \oplus D_1 = D_2$;
 3) $\text{Sing}(D):$
 $D \neq \emptyset \wedge \forall D' (D' \hat{=} D \Rightarrow (D' = D \vee D' = \emptyset))$
 4) $\text{InMax}(d, D): \text{Sing}(d) \wedge d \hat{=} D$;
 5) $\text{IsMax}(D', D):$
 $D' \hat{=} D \wedge \forall d (\text{InMax}(d, D) \Rightarrow \text{InMax}(d, D'))$
 $\wedge$
 $\neg \exists D'' (D'' \hat{=} D' \wedge D'' \neq D' \wedge \forall d (\text{InMax}(d, D)$
 $\Rightarrow \text{InMax}(d, D'')))$
 6) $\text{Incomp}(D): \exists D' (\text{IsMax}(D, D'))$;
 7) $\text{EqMin}(D_1, D_2):$
 $D_1 \oplus D_2 = D_2 \wedge D_2 \oplus D_1 = D_1$;
 8) $\text{IsMin}(D', D):$
 $\text{Incomp}(D') \wedge \text{EqMin}(D', D)$;
 9) $\text{InMin}(d, D):$
 $\exists D' (\text{IsMin}(D', D) \wedge \text{InMax}(d, D'))$;

- 10) $Subset(D_1, D_2) :$
 $\forall D \forall d ((D \hat{=} D_1 \wedge InMin(d, D)) \Rightarrow$
 $\exists D' (D' \hat{=} D_2 \wedge InMin(d, D')))$
 11) $Elem(d, D) :$
 $Sing(d) \wedge Subset(d, D) ;$
 12) $EqMax(D_1, D_2) :$
 $\exists D (IsMax(D, D_1) \wedge IsMax(D, D_2)) ;$
 13) $succ_v(d', d) :$
 $Sing(d') \wedge Sing(d) \wedge \exists d'' (EqMax(d'', d')$
 $\wedge d'' = v * d)$ для всіх $v \in V$;
 14) $Pfx(d', d) :$
 $Sing(d') \wedge Sing(d) \wedge \exists D (IsMax(d_2, D)$
 $\wedge Subset(d_1, D) \wedge Subset(d_2, D))$
 Для кожної множини слів A будемо позначати $\min A$ – множиною мінімальних елементів A за відношенням «бути префіксом» на словах, і відповідно $\max A$ – множиною максимальних елементів A за тим же відношенням. Потужність множини будемо позначати як $|A|$.
- Лема 3.** Для визначених вище предикатів існують властивості:
- (1) $Const_v(d)$ еквівалентно умові $d = \{v\}$ (де $v \in V$);
 - (2) $D_1 \hat{=} D_2$ еквівалентно умові $\{u \in D_2 \mid pref(u) \cap D_1 \neq \emptyset\} \subseteq D_1 \subseteq D_2$;
 - (3) $Sing(D)$ еквівалентно умові $|D| = 1$;
 - (4) $InMax(d, D)$ еквівалентно умові $|d| = 1 \wedge d \subseteq \max D$;
 - (5) $IsMax(D', D)$ еквівалентно умові $D' = \max D$;
 - (6) $Incomp(D)$ еквівалентно умові $\forall u, v \in D (u \neq v \Rightarrow (u \not\leq v \wedge v \not\leq u))$;
 - (7) $EqMin(D_1, D_2)$ еквівалентно умові $\min D_1 = \min D_2$;
 - (8) $IsMin(D', D)$ еквівалентно умові $D' = \min D$;
 - (9) $InMin(d, D)$ еквівалентно умові $|d| = 1 \wedge d \subseteq \min D$;

- (10) $Subset(D_1, D_2)$ еквівалентно умові $D_1 \subseteq D_2$;
 (11) $Elem(d, D)$ еквівалентно умові $|d| = 1 \wedge d \subseteq D$;
 (12) $EqMax(D_1, D_2)$ еквівалентно умові $\max D_1 = \max D_2$;
 (13) $succ_v(d', d)$ еквівалентно умові $\exists u \in V^+ (d' = \{vu\} \wedge d = \{u\})$ (де $v \in V$) ;
 (14) $Pfx(d', d)$ еквівалентно умові $\exists u, v \in V^+ (d' = \{u\} \wedge d = \{v\} \wedge u \leq v)$.

Доведення цієї леми проводиться за визначеннями відповідних предикатів.

Наслідок 1. В теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ виражається бінарний предикат Sfx , такий, що

$$Sfx(d', d) \Leftrightarrow \exists u, v \in V^+ (d' = \{v\} \wedge d = \{u\} \wedge u \geq v), \text{ де } u \geq v \text{ означає, що } v \text{ є суфіксом } u.$$

Доведення випливає з того, що згідно з лемою 3, в теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ виражаються предикати $\{succ_v\}_{v \in V}$, що моделюють функції множення зліва на елементи V , за допомогою яких може бути виражена властивість суфіксної замкненості множини слів. Тоді $Sfx(d', d)$ має місце, якщо для кожної (скінченної) суфіксно-замкненої множини слів, в яку включається d , включається і d' . Детальніше таку побудову описано в [4].

Наслідок 2. У теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ виражається сім'я бінарних предикатів $\{succ'_v\}_{v \in V}$, така, що $succ'_v(d', d) \Leftrightarrow \exists u \in V^+ (d' = \{uv\} \wedge d = \{u\})$ для всіх $v \in V$.

Доведення випливає з того, що предикати $Const_v$, Pfx і Sfx виражаються у теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ і має місце така еквівалентність:

$$\begin{aligned} succ'_v(d', d) &\Leftrightarrow \exists u \in V^+ (d' = \{uv\} \wedge d = \{u\}) \\ &\Leftrightarrow \exists u, w \in V^+ (d' = \{w\} \wedge d = \{u\} \wedge u \leq w \wedge \\ &w \geq v \wedge u \neq w \wedge \\ &\forall u' \in V^+ (u' \leq w \Rightarrow (u' \leq u \vee u' = w))). \end{aligned}$$

Лема 4. Предикати $Subset^+$, $Sing^+$, Eps^+ , $\{succ_v^+\}_{v \in V}$, $\{succ_v'^+\}_{v \in V}$ і P_M виражаються у теорії 1 порядку алгебри $NDPA(V)$.

Доведення. З визначення $Subset^+$, $Sing^+$, Pfx^+ , Eps^+ і $\{succ_v^+\}_{v \in V}$ випливає, що

1) $Subset^+$ виражається за допомогою $Subset$;

2) $Sing^+$ виражається за допомогою $Const_{x_0}$, $Sing$ і константи $\emptyset$;

3) Eps^+ виражається за допомогою $Const_{x_0}$ і константи $\emptyset$;

4) $succ_v^+$ виражається за допомогою $Const_{x_0}$, $Const_v$, $succ_v$ і константи $\emptyset$.

5) $succ_v'^+$ виражається за допомогою $Const_{x_0}$, $Const_v$, $succ_v'$ і константи $\emptyset$.

Оскільки $P_M(E, D) \Leftrightarrow E = \{x_0\} \vee E = \emptyset$, то P_M виражається за допомогою $Const_{x_0}$ і константи $\emptyset$. Тоді твердження леми випливає з того, що $\emptyset$ належить сигнатурі алгебри $NDPA(V)$, а предикати $Const_{x_0}$, $Subset$, $Sing$, $\{succ_v\}_{v \in V}$, $\{succ_v'\}_{v \in V}$ виражаються у теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ за лемою 3 і наслідком 2 з неї.

Лему доведено.

Теорема 3. Якщо $|V| \geq 2$, то елементарна теорія алгебри $NDPA(V)$ не розв'язна.

Доведення. Припустимо від супротивного, що елементарна теорія алгебри $NDPA(V)$ розв'язна. Тоді згідно з лемою 2 і обчислюваності відображення φ (і φ^{-1}), є розв'язною теорія 1-го порядку структури $S = (FinSet(V^*); Subset^*, Sing^*, Eps^*, \{succ_v^*\}_{v \in V}, \{succ_v'^*\}_{v \in V})$. Відомо ([4]), що предикатів $Subset^*$, $Sing^*$, Eps^* , $\{succ_v'^*\}_{v \in V}$ достатньо для того, щоб виразити всі предикати, які виражаються у слабкій сингулярній теорії 2 порядку $k = |V| \geq 2$ функцій слідування $WSkS$ [1,4,6] – теорії 2

порядку структури $(V^*; r_1, \dots, r_k)$, де $r_i: V^* \rightarrow V^*$ – функції множення справа на елементи V . З другого боку, відомо ([6, теорема 11.6]), що доповнення $WSkS$ функціями множення зліва на елементи V , які моделюються предикатами $\{succ_v^*\}_{v \in V}$, веде до нерозв'язної теорії. Таким чином, теорія 1-го порядку структури S не розв'язна. Ми отримали суперечність, звідки випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо $|V| \geq 2$, то елементарна теорія алгебри $NDA(V, \emptyset)$ не розв'язна.

Доведення випливає з того, що алгебри $NDPA(V)$ і $NDA(V, \emptyset)$ ізоморфні.

Зауважимо, що у доведенні теореми 3 операція $//u$ не використовувалася, тому її виключення з сигнатури алгебри $NDPA(V)$ (або, відповідно, виключення асоціативного розіменування з сигнатури $NDA(V, \emptyset)$) не впливає на висновки теореми.

Доведена теорема вказує також на складнощі, які можуть виникнути при перевірці властивостей програм обробки складноіменних даних. Разом з тим, деякі вужчі задачі, що стосуються алгебр складноіменних даних, можуть виявитися розв'язними. Цей напрям вимагає подальших досліджень.

Висновки

У статті побудовано сім'ю алгебр складноіменних даних і встановлено властивості операцій побудованих алгебр. Доведено нерозв'язність елементарної теорії алгебри складноіменних даних із порожнім класом базових значень. Отримані результати можуть бути корисними у застосуванні композиційно-номінативного підходу для аналізу та верифікації програм.

1. Лисовик Л. П. Теория трансдюсеров / Л. П. Лисовик. – К. : Феникс, 2005. – Том 1. Гл. 13–17. Кн. 3 : Алгебра и автоматы. – 2005. – 262 с. – ISBN 966-651-250-5 (кн. 3).
2. Нікітченко М. С. Властивості композиційно-номінативних мов програм з асоціативним розіменуванням / М. С. Нікітченко, Є. В. Іванов // Матеріали XVI Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 8–9 жовтня 2009). – Л. : ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. – С. 157–158.
3. Никитченко Н. С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н. С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
4. Comon H. Tree Automata Techniques and Applications [Електронний ресурс] / Н. Comon. – Режим доступу : <http://tata.gforge.inria.fr>.
5. Nikitchenko N. S. A composition nominative approach to program semantics / N. S. Nikitchenko. – Technical University of Denmark, Report IT-TR : 1998-020, 1998. – 103 p.
6. Thomas W. Automata on infinite objects / Wolfgang Thomas // Handbook of theoretical computer science. Volume B. Formal models and semantics. – USA, Cambridge, MA, MIT Press, 1990. – P. 133–191. – ISBN 0-444-88074-7.

I. Ivanov

PROPERTIES OF ALGEBRAS OF COMPLEX-NAMED DATA

In the article the problem of defining and developing algebras of nominative data with complex names within composition-nominative approach is considered. A class of algebras of complex-named data is defined and properties of the operations of these algebras are investigated. Elementary theory of algebra of complex-named data even with empty class of base values is shown to be undecidable.

Keywords: nominative data, composition-nominative approach.