

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗІРКОВОГО ГРАФА З ОДНИМ НЕСКІНЧЕННИМ ПРОМЕНЕМ

У статті проведено детальний спектральний аналіз злічених графів, які є об'єднанням графа-зірки та напівобмеженого нескінченного ланцюжка. Охарактеризовано спектр матриці суміжності таких графів, побудовано спектральну міру, наведено у явній формі власні вектори та спектральний розклад за власними векторами.¹

Ключові слова: злічені графи, поліноми Чебишева, спектральна міра.

Вступ

Спектральна теорія графів є одним із актуальних напрямів у сучасній математичній фізиці [2; 4; 6]. Це пов'язано як із внутрішніми стимулами розвитку теорії, так і з вирішенням конкретних прикладних задач, які виникають у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних та транспортних мереж [10].

Графом G ми будемо називати впорядковану пару (V, E) , в якій V — деяка непорожня множина (множина вершин) і E — множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів V (множина ребер). Геометрично вершини зображаються точками, а ребра — відрізками, що з'єднують відповідні вершини. З графом G однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої визначаються як:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } i \text{ та } j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

У випадку скінченного графа G матриця суміжності $A(G)$ скінченна, симетрична. Сукупність усіх її власних чисел називають спектром графа і позначають: $\sigma(G) = \sigma_p(G)$.

У випадку злічених графів матриця $A(G)$ породжує у гільбертовому просторі $l_2(V)$ самоспряжений оператор, спектр якого має дискретну $\sigma_p(G)$ та неперервну компоненту $\sigma_c(G)$, яка може бути абсолютно неперервною $\sigma_{ac}(G)$ або навіть чисто сингулярною $\sigma_{cs}(G)$ [12]. Останнім часом одержано численні результати про спектр нескінчених графів, які знаходять застосування у теорії невід'ємних матриць, гармонічному аналізі дискретних груп, аналітичній теорії ймовірності тощо [7–9; 14].

Якщо для кожного ребра графа вказано його довжину, то такий граф називається метричним. На метричному графі розглядають різного роду диференціальні рівняння [3]. Таким чином, виникають

диференціальні оператори на метричних графах. Важливим випадком є квантові графи — графи, на яких визначені квантово-механічні оператори. Побудова завершеної спектральної теорії квантових графів є однією із актуальних проблем сьогодення. Дослідження у цьому напрямі призводять до необхідності поєднання і взаємного збагачення методів із різних розділів математики [1; 3; 5; 10]. З другого боку, результати є теоретичною базою новітніх нанотехнологій.

Метою цієї статті є проведення детального спектрального аналізу зіркового графа Γ_n з одним нескінченим променем. При цьому у роботі використовуються лише прості факти із теорії тригонометричних рядів Фур'є, без залучення апарату спектральної теорії Якобієвих матриць [1].

Постановка задачі

Розглянемо найпростіший нескінченний граф $A_{\mathbb{N}}$, який є напівобмеженим ланцюгом, усі вершини якого занумеровані натуральними числами $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, а ребра з'єднують лише вершини із послідовними номерами.



Такий граф-ланцюг називатимемо променем.

Матриця суміжності такого графа є Якобієвою матрицею J_0 , у якої на головній діагоналі стоять нулі, а на двох інших — одиниці. Матриця J_0 породжує у просторі $l_2(\mathbb{N})$ самоспряжений оператор, спектр якого чисто абсолютно неперервний, однократний і зосереджений на інтервалі $\sigma_{ac}(A_{\mathbb{N}}) = [-2, 2]$ і $\sigma_p(A_{\mathbb{N}}) = \emptyset$ [9].

Більше того, для оператора J_0 у просторі $l_2(\mathbb{N})$ справедлива спектральна теорема про розклад за

¹ Дослідження Лебідь В.О. частково підтримано Державним агентством з питань науки, інновацій та інформатизації України.

узагальненими власними функціями [1].

Твердження 1. Для кожного $\lambda \in [-2, 2]$ вектор-функція

$$\varphi_\lambda = (P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_j(\lambda), \dots) \quad (1)$$

є узагальненою власною функцією оператора J_0 , що відповідає власному значенню λ , тобто $J_0 \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$.

У представленні (1) $P_j(\lambda)$ є поліномом степеня j від λ , що виражається через поліноми Чебишева другого роду $P_j(\lambda) = U_j(\frac{\lambda}{2})$, де $U_j(z) = \frac{\sin((j+1) \arccos z)}{\sin(\arccos z)}$. Для поліномів $P_j(\lambda)$ виконується рекурентне співвідношення

$$P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda) \quad (2)$$

з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = \lambda$.

Кожному вектору $x \in l_2(\mathbb{N})$ відповідає його перетворення Фур'є $\widetilde{x}(\lambda)$ за узагальненими власними векторами

$$\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_{\lambda, j}. \quad (3)$$

Вектор $\widetilde{x}(\lambda)$ належить простору $L_2([-2, 2], \rho(\lambda) d\lambda)$ де $T_j(z) = \cos(j \arccos z)$ — поліноми Чебишева першого роду.

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2}. \quad (4)$$

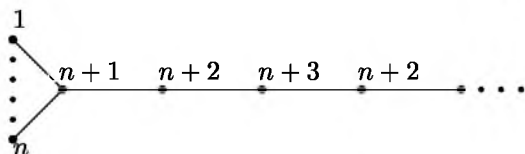
Правильне обернене перетворення Фур'є визначене на всьому L_2 :

$$x = \int_{-2}^2 \widetilde{x}(\lambda) \varphi_\lambda \rho(\lambda) d\lambda. \quad (5)$$

Для довільних $x, y \in l_2(\mathbb{N})$ справедлива рівність Парсеваля:

$$(x, y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{L_2}. \quad (6)$$

У цій статті розглядатимемо спектральні властивості зіркового графа Γ_n з одним нескінченним променем, утвореним приєднанням до центра графа-зірки $K_{1,n}$ з n ребрами напівобмеженого ланцюжка $A_{\mathbb{N}}$:



Матриця суміжності $A(\Gamma_n)$ графа Γ_n породжує самоспряжений обмежений оператор A_n , який діє у $l_2(\mathbb{N})$ як

$$A_n x = (\underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_n, \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+2}, x_{n+1} + x_{n+3}, \dots, x_{j-1} + x_{j+1}, \dots). \quad (7)$$

Випадок $n = 1$ зводиться до променя, для $n = 2$ виконується наступне твердження.

Твердження 2. Оператор A_2 є обмеженим самоспряженим оператором у просторі $l_2(\mathbb{N})$.

Дискретний спектр A_2 містить єдине власне значення $\lambda = 0$ з нормованим власним вектором

$$e_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \dots). \quad (8)$$

Абсолютно-неперервний спектр є однократним і зосередженим на інтервалі

$$\sigma_{ac}(A_2) = [-2, 2].$$

Довільному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор виду

$$\varphi_\lambda = (1, 1, 2T_1(\frac{\lambda}{2}), \dots, 2T_{j-2}(\frac{\lambda}{2}), \dots), \quad (9)$$

Спектральна міра, що відповідає абсолютно неперервному спектру, зосереджена на інтервалі $[-2, 2]$ та має щільність

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi \sqrt{4 - \lambda^2}}. \quad (10)$$

Для векторів $x \in l_2(\mathbb{N})$, ортогональних до вектора e_0 , справедливі розклади (3), (5), (6) за узагальненими функціями (9).

Доведення. Рівність $A_2 e_0 = 0$ випливає з означення оператора A_2 та вектора e_0 . У просторі $l_2(\mathbb{N})$ вектори $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ утворюють ортонормований базис. Тут у вектора e_j j -компонента дорівнює 1, а всі інші — 0. Замінімо пару векторів $\{e_1, e_2\}$ на e_0 виду (8) і $\widehat{e}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \dots)$. Тоді

$$A_2 \widehat{e}_2 = \sqrt{2} e_3, \quad A_2 e_3 = \sqrt{2} \widehat{e}_2,$$

$$A_2 e_j = e_{j-1} + e_{j+1} \quad \text{при } j \geq 4.$$

Таким чином, матриця оператора A_2 у підпросторі усіх векторів ортогональних до e_0 , є Якобієвою матрицею J . Детальний спектральний аналіз матриці $\frac{1}{2}J$ наведено в [1]. Це призводить до сформульованого твердження.

Далі увагу зосереджуємо на випадку $n \geq 3$ та позначення залежності оператора A_n від n будемо опускати.

Власні числа та власні вектори

Теорема 1. Оператор A виразу (7), що відповідає зірковому графу Γ_n , є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(\mathbb{N})$.

Дискретний спектр оператора A при $n \geq 3$ складається з трьох власних значень: $\sigma_p(A) = \{0 \text{ кратності } n-1; \frac{n}{\sqrt{n-1}}; -\frac{n}{\sqrt{n-1}}\}$.

Власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda = 0$, утворюють $n-1$ -вимірний підпростір і мають вигляд

$$e_m = (\underbrace{1, 1, \dots, -(n-1)}_n, 1, \dots, 1, 0, \dots), \quad (11)$$

де m -компонента дорівнює $-(n-1)$.

Власні вектори, що відповідають власним значенням $\lambda_{\pm} = \pm \frac{n}{\sqrt{n-1}}$, мають вигляд

$$e_{\pm} = (\underbrace{n^{-1}, \dots, n^{-1}}_n, \pm q, (\pm q)^2, \dots), \quad (12)$$

де $q = (n-1)^{-\frac{1}{2}}$.

Доведення. Із виразу (7) для оператора A випливає, що

$$Ae_m = 0, \quad Ae_{\pm} = \lambda_{\pm} e_{\pm}.$$

Простір $l_2(\mathbb{N})$ відносно оператора A розкладається на пряму суму підпросторів

$$l_2(V) = H_p \oplus H_c,$$

де до H_p входять власні вектори виду (11) та (12), а $H_c = H_p^{\perp}$.

Дамо опис векторів із H_c .

Лема 1. Для того щоб вектор $x \in l_2(\mathbb{N})$ належав H_c , необхідно і достатньо, щоб вектор мав вигляд $x = (\underbrace{x_n, \dots, x_n}_n, x_{n+1}, \dots)$ і виконувалися рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{n+2k} q^{2k} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_{n+2k+1} q^{2k+1} = 0. \quad (13)$$

Доведення. Умова $x \perp e_m$, $m = 1, \dots, n-1$ призводить до висновку, що перші n координат у вектора x рівні. З умов $x \perp e_+$ та $x \perp e_-$ отримуємо (13).

Узагальнені власні вектори та спектральна теорема для зіркових графів

Лема 2. Оператор A виду (7), що відповідає графу Γ_n , для довільного $\lambda \in [-2, 2]$ має узагальнений власний вектор виду:

$$\varphi_{\lambda} = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, P_1(\lambda), P_2(\lambda) - (n-1)P_0(\lambda), \dots, \dots, P_{j-n}(\lambda) - (n-1)P_{j-n-2}(\lambda), \dots). \quad (14)$$

Тут $P_m(\lambda)$ є поліномом степеня m від λ і виражається через поліноми Чебишева другого роду, як це вказано у твердженні 1.

Доведення. Із очевидного виразу (7) оператора A та (14), з урахуванням (2), випливає тотожність

$$A\varphi_{\lambda} = \lambda\varphi_{\lambda}.$$

Лема 3. Узагальнений власний вектор ортогональний до власних векторів e_m , $m = 1, \dots, n-1$ та $e_{\pm}$.

Доведення. Скористаємося твердженням про вигляд узагальнених власних векторів (14) та означенням ортогональності векторів.

$$\begin{aligned} (e_m, \varphi_{\lambda}) &= n-1-(n-1) = 0 \quad m = 1, \dots, n-1 \\ (e_+, \varphi_{\lambda}) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^j (P_j(\lambda) - (n-1)P_{j-2}(\lambda)) = \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^j P_j(\lambda) - (n-1)q^2 (1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^j P_j(\lambda)) = 0. \end{aligned}$$

Що й доводить лему.

Означення 1. Для векторів $x \in H_c$ визначимо їх перетворення Фур'є $\widetilde{x(\lambda)}$ за узагальненими власними векторами:

$$\begin{aligned} \widetilde{x(\lambda)} &\equiv \mathfrak{F}x = (x, \varphi_{\lambda}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_{\lambda, j} = \\ &= nx_n + \sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k} (P_k(\lambda) - (n-1)P_{k-2}(\lambda)). \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 2. Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$ є ізотричним оператором із простору H_c у простір $L_2([-2, 2], d\mu(\lambda))$ квадратично сумовних функцій на інтервалі $[-2, 2]$ відносно міри

$$d\mu(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi(n^2-\lambda^2(n-1))} d\lambda, \quad (16)$$

де $\rho(\lambda)$ — спектральна щільність.

Дійсне обернене перетворення Фур'є визначене на всьому L_2 :

$$x = \mathfrak{F}^{-1} \widetilde{x(\lambda)} = \int_{-2}^2 \widetilde{x(\lambda)} \varphi_{\lambda} \rho(\lambda) d\lambda. \quad (17)$$

Для довільних $x, y \in H_c$ справедлива рівність Парсеваля (6).

Доведення. Якщо у визначенні перетворення Фур'є (15) перейти від λ до $\theta \in [0, \pi]$ заміною $\lambda = 2 \cos \theta$ та домножити обидві частини на $\sin \theta$, то отримаємо

$$\begin{aligned} \widetilde{x(\lambda)} \sin \theta &= \widetilde{x(\theta)} \sin \theta = nx_n \sin \theta + \\ &\sum_{k=1}^{\infty} x_{n+k} (\sin(k+1)\theta - (n-1) \sin(k+1)\theta). \end{aligned} \quad (18)$$

У випадку, коли коефіцієнти ряду Фур'є належать простору $l_2(\mathbb{N})$, цей ряд збігається за нормою у просторі $L_2([0, \pi], d\lambda)$. Більше того, добре відомо, що коефіцієнти тригонометричних рядів Фур'є виражаються через саму функцію. Тому із (18) маємо:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \widetilde{x(\theta)} \sin \theta \sin m\theta d\theta = X_m,$$

де

$$X_m = \begin{cases} nx_n - (n-1)x_{n+2}, & \text{якщо } m = 1, \\ x_{n+m-1} - (n-1)x_{n+m+1}, & \text{якщо } m \geq 2. \end{cases} \quad (19)$$

Домножимо обидві частини (19) на q^m та підсумуємо окремо за парним і непарним m . Оскільки

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{2m-1} \sin(2m-1)\theta = \frac{(q+q^3) \sin \theta}{1+q^4-2q^2 \cos 2\theta},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{2m} \sin(2m)\theta = \frac{q^2 \sin 2\theta}{1+q^4-2q^2 \cos 2\theta},$$

(20)

вважаючи, що

$$q = (n-1)^{-\frac{1}{2}},$$

та враховуючи (13), отримуємо дві рівності:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \widetilde{x(\theta)} \frac{\sin^2 \theta}{(n-1)(\frac{n^2}{n-1} - (2 \cos \theta)^2)} d\theta = x_n,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \widetilde{x(\theta)} \frac{2 \cos \theta \sin^2 \theta}{(n-1)(\frac{n^2}{n-1} - (2 \cos \theta)^2)} d\theta = x_{n+1}.$$

(21)

Переходячи в (21) від змінної θ до λ , $\lambda \in [-2, 2]$, отримаємо:

$$x_n = \int_{-2}^2 \widetilde{x(\lambda)} \varphi_{\lambda, n} \rho(\lambda) d\lambda;$$

$$x_{n+1} = \int_{-2}^2 \widetilde{x(\lambda)} \varphi_{\lambda, n+1} \rho(\lambda) d\lambda. \quad (22)$$

звідки вираз для спектральної міри має вигляд (16).

За індукцією покажемо, що рівність

$$x_{n+j} = \int_{-2}^2 \widetilde{x(\lambda)} \varphi_{\lambda, n+j} \rho(\lambda) d\lambda \quad (23)$$

виконується для всіх $j \geq 0$.

При $j = 0$ та $j = 1$ доведено вище.

Нехай (23) вірно для всіх $j_0 \geq j \geq 2$. Покажемо, що тоді (23) вірно і для $j = j_0 + 1$. Дійсно, використовуючи (19) і (17), отримаємо бажане.

Рівність (23) еквівалентна (21).

Рівність Парсеваля (6) прямо впливає зі звичайної рівності Парсеваля для тригонометричних рядів Фур'є.

Зауваження 1. Із теореми 4 при $n = 1$ випливає твердження 1, а при $n = 2$ — твердження 2.

Дійсно, при $n = 2$ спектральна щільність, визначена у (16), збігається з (10). Оскільки $P_j(\lambda) - P_{j-2}(\lambda) = 2T_j(\frac{\lambda}{2})$, то власні функції φ_{λ} із (14) при $n = 2$ збігаються з φ_{λ} в (9).

Висновок

Наведені вище результати дають повний і явний спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем. Підхід, застосований у цій роботі, може бути перенесений на інші злічені графи.

Роботу виконано в рамках проекту 03-01-12 «Обернені задачі в сучасній математичній фізиці» спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Автори висловлюють щиру подяку Ю. С. Самойленку за конструктивні зауваження.

Список літератури

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наукова думка, 1965. — 798 с.
2. Москалёва Ю. П. Введение в спектральную теорию графов / Ю. П. Москалёва, Ю. С. Самойленко. — К. : Центр учебной литературы, 2007. — 114 с.
3. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный. — М. : Физматлит. — 2004.
4. Цветкович Д. Спектры графов, теория и применение / Д. Цветкович. — К. : Наукова думка, 1984.
5. Belishev M. J. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method / M. J. Belishev // Inverse problems. — 2004. — Vol. 20. — P. 647–672.
6. Brouwer A. E. Spectra of Graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. — Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012.
7. Mantoiu M. Spectral analysis for adjacency operators on graphs / M. Mantoiu // arXiv:math-ph/0603020v1. — 7 Mar 2006.
8. Mohar B. A survey on spectra of infinite graphs / B. Mohar, W. Woess // Bull. London Math. Soc. — 1989. — Vol. 21. — P. 209–234.
9. Mohar B. The spectrum of an infinite graph / B. Mohar // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 48. — P. 245–256.
10. Nizhnik L. P. Inverse eigenvalue problems for nonlocal Sturm-Liouville operators on a star graph / L. P. Nizhnik // Methods Funct. Anal., Topology. — 2012. — Vol. 18. — № 1. — P. 68–78.
11. Pivovarchik V. N. Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph / V. N. Pivovarchik // SIAM J. Math. Anal. — 2000. — Vol. 32. — № 4. — P. 801–819.
12. Simon B. Operators with singular continuous spectrum, 4. Graph Laplacians and Laplace-Beltrami operators / B. Simon // Amer. Math. Soc. — 1996 — Vol. 124. — P. 1177–1182.
13. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs / V. A. Yurko // Inverse problems. — 2005. — Vol. 21. — P. 1075–1086.
14. Below J. von. An index theory for uniformly locally finite graphs / J. von Below // Linear Algebra and Its Applications. — 2009. — Vol. 431. — P. 1–19.

V. Lebid, L. Nizhnik

The spectral analysis of star-graph with one infinite chain

The spectral detailed analysis of the infinite graphs defined as the union of finite star graph and infinite unbounded chain are studied. The spectrum of adjacency matrix of the graphs is characterized and the spectral measure is defined, eigenvectors and spectral expansion in eigenvectors are described.

Keywords: infinite graphs, Chebyshev polynomials, spectral measure.

Матеріал надійшов 11.04.2013