

ВЕРХНЯ ОЦІНКА ВІДНОВЛЮЮЧОГО СПЕКТРАЛЬНОГО ЧИСЛА ДЛЯ ГРАФІВ-КАКТУСІВ

КАРИНА ЧЕРНЯВСЬКА, ЛАРИСА ТИМОШКЕВИЧ

Різноманітні задачі відновлення для графів посідають значне місце в спектральній теорії графів (див. [1], [2], [3]).

Зваженим графом G називатимемо таку пару (G, w) , де G — це простий граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, тобто відображення множини ребер $E(G)$ у множину додатних дійсних чисел.

Постановка задачі. Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф G , ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно аби за значеннями спектрів даних підграфів ваги на ребрах вихідного графа знаходилися однозначно. Спектр підграфа будемо називати підспектром. Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати відновлюючим спектральним числом графа G , позначення: $Srn(G)$.

Для графів-кактусів розглянемо поставлену задачу і наведемо верхню оцінку числа Srn . Граф-кактус — це зв'язний граф, в якому будь-які два прості цикли мають не більше, ніж одну спільну вершину. Еквівалентно, будь-яке ребро в такому графі належить максимум одному простому циклу.

Наведемо формулювання теорем, на яких базується доведення Теорема 3.

Позначимо через $cv(G)$ кількість висячих вершин дерева G . Назвемо одну з висячих вершин коренем. Через $CV(G)$ позначимо множину висячих вершин відмінних від кореня.

Теорема 1. [4, 5] *Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y . Граф G — об'єднання графів F, H та ребра, що з'єднує вершини z та y . Тоді за спектрами \mathbf{G} та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$, можна відновити ваги на ребрах графа H , вагу на ребрі (z, y) , а також $P_{\mathbf{F}}, P_{\mathbf{F}-\{z\}}$.*

Теорема 2. *(оцінка Srn для дерев) [4, 5].*

Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і граф G — дерево, тоді $Srn(G) \leq cv(G)$ та для відновлення вагової функції w достатньо знати спектри таких підграфів: \mathbf{G} та всіх підграфів вигляду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає множину $CV(G)$.

Теорема 3. Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і граф G — граф-кактус, тоді $Srn(G) \leq cv(G) + 3c$, де c — кількість простих циклів у графі-кактусі. За винятком C_4 , для якого $Srn(C_4) = 4$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cvetković D.M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. — 1975. — 498–541. — P. 45–48.
- [2] Hogben L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph. Chamchuri Journal of Mathematics. — 2009. — vol 1, no. 1 — P. 51-72.
- [3] van Dam E.R., Haemers W.H. Which graphs are determined by their spectrum. Linear Algebra and its Applications. — 2003. — vol. 373. — P. 241-272.
- [4] Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі для зважених графів, Могілянський математичний журнал 2022, — том 5. — с.26-32
- [5] Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. — Київ, 2015. — 160 с.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: 1211karina1211@gmail.com

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: larysatymosh@gmail.com