УДК 512.544

Боднарчук Л. Ю., Пилявська О. С.

ДЕЯКІ КЛАСИ p-ГРУП З ЗОВНІШНІМ АВТОМОРФІЗМОМ ПОРЯДКУ p

В даній роботі встановлено достатні умови того, що всі групи деякого сімейства ізоклінності р-груп мають зовнішній автоморфізм порядку р. Також для будь-якого $n \geq 3$ *вказано групу порядку* p^{2n}, *що має єдиний зовнішній автоморфізм порядку р.*

Вступ. Нехай p— просте число, $p>3$, і G— скінченна p-група. В Коуровському зошиті [1] Я. Г. Берковичем поставлено задачу (4.13):

довести, що скінчена неабелева р-група допускає зовнішній автоморфізм порядку р.

Контрприклади до гіпотези Я. Берковича невідомі, але те, що ця проблема є досить тонкою, підтверджує такий приклад, знайдений авторами при дослідженні груп порядку p^6: група

$$\Phi_8(42) = < a,b \| [a,b] = a^p, b^{p^3} = a^{p^2}, a^{p^3} = 1 >,$$

має лише єдиний зовнішній автоморфізм φ порядку p — єдиний в тому розумінні, що будь-який інший зовнішній автоморфізм ξ порядку p може бути записаний як $\xi = \varphi^r\psi$, де ψ — внутрішній автоморфізм і $1 \leq r< p$. (Надалі слова "єдиний зовнішній автоморфізм порядку p" будемо використовувати саме в цьому розумінні.) В розділі 1 доведено цей факт як частковий випадок більш загального твердження:

для будь-якого $n \geq 3$ *існує група порядкур*^{2}"*, яка має єдиний зовнішній автоморфізм порядкур.*

Багато задач про властивості .р-груп полегшуються для груп великих порядків. Наведений вище результат показує, що дана задача зі збільшенням порядку груп не спроститься, й, отже, для розв'язання даної проблеми не досить розглянути деяку скінченну кількість груп обмеженого порядку.

В 1940 році Ф. Холл [2] запропонував метод класифікації груп (зокрема, $р$-груп) по деяких нескінченних сімействах, які назвав сімействами ізоклінності. Кожне сімейство містить групи необмежено великих порядків. Автори знайшли достатню умову, при виконанні якої для однієї групи сімейства можна стверджувати існування зовнішнього автоморфізму порядку p для всіх груп даного сімейства незалежно від їх порядку. Доведенню цієї умови (див. теорему 3) присвячено розділ 2.

1. Згадана група Ф8(42) порядку p^6 є групою найменшого порядку в серії о-груп, так званих груп Ф. Менегаццо, які задаються співвідношеннями:

$$G_n = < a,b \| [a,b] = a^p, \quad b^{p^n} = a^{p^{n-1}}; \quad a^{p^n} = 1 > \quad (1)$$

де p—непарне просте число і $n \geq 3$.

Групи Менегаццо з'явилися як приклад груп, для яких $|AutG| = p \cdot |G|$ (див. [3]). З визначаючих співвідношень випливає, що порядок групи G^n дорівнює p^{2n}.

Покажемо, що для будь-якого л група G^n має лише єдиний зовнішній автоморфізм ер порядку p, і таким чином, доведемо твердження:

Теорема 1. *Групи Менегаццо* G^n *мають зовнішній автоморфізм порядку р, який є єдиним у тому сенсі, що будь-який інший зовнішній автоморфізм* ξ *порядкур може бути записаний як* $\xi = \varphi^r\psi$, *де* ψ *—внутрішній автоморфізм і* $1 \leq r<p$.

Доведення. Розглянемо групу автоморфізмів $AutG_n$ деякої групи G^n. Як показано Ф. Менегаццо, $|AutG_n| = p \cdot |G_n| = p^{2n+1}$

$AutG_n$ має твірні:

$$\varphi_1: \quad \begin{array}{l} a \to a \\ b \to ba \end{array} \qquad |\varphi_1| = p^n$$

$$\varphi_2: \quad \begin{array}{l} a \to a^{1+p} \\ b \to b \end{array} \qquad |\varphi_2| = p^{n-1}$$

$$\varphi_3: \quad \begin{array}{l} a \to ab^{p^{n-1}} \\ b \to b^{1+p^{n-2}} \end{array} \qquad |\varphi_3| = p^3$$

Неважко переконатись, що

$$\varphi_3^{p^2}: \ a \to a$$

© Боднарчук Л. Ю., Пилявська О. С, 2000

$$b \to b^{1+p^n};$$

$$\varphi_1^{p^{n-1}}: \quad a \to a$$

$$b \to ba^{p^{n-1}}.$$

Враховуючи, що $a^{p^{n-1}} = b^{p^n}$,маємо $\varphi_3^{p^2} \quad \varphi_1^{p^{n-1}}$

Автоморфізм $\varphi = \varphi_1^{-p^{n-2}} \varphi_3^{p}$ є шуканим зовнішнім автоморфізмом порядку *p*.

Твірні групи внутрішніх автоморфізмів $InnG_n$:

φ_2: $a \to a^{1+p}$
$b \to b$

φ_1^p: $a \to a$
$b \to ba^p$

Розглянемо підгрупу Ω_p групи $AutG_n$, що складається з усіх елементів групи $AutG_n$, порядок яких не перевищує *p*. Маємо:

$$\Omega_p =< \varphi_2^{p^{n-2}} > \times < \varphi_1^{p^{n-1}} > \times < \varphi >,$$

де $\varphi_1^{p^{n-1}}$, $\varphi_2^{p^{n-2}}$ — внутрішні автоморфізми. Отже, кожен зовнішній автоморфізм ξ порядку *p може* бути записаний як $\xi = \varphi^r \psi$, де ψ — внутрішній автоморфізм і $1 \leq r < p$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Для будь-якого* $n \geq 3$ *існує група порядку* p^{2n}, *яка має єдиний зовнішній автоморфізм порядку р.*

Дійсно, порядок групи G_n, що задана співвідношеннями (1), дорівнює p^{2n} . За теоремою 1 кожна така група має єдиний зовнішній автоморфізм порядку *p*.

2. Нагадаємо ([3]), що групи *G, //*"називаються ізоклінними *(G ≈ H),* якщо існують ізоморфізми

$\theta : G/Z(G) \to H/Z(H)$

і $\varphi : G_2 \to H_2$

такі, що ф *([a, Ь]) = [a', Ь]* для будь-яких *a, bsG,* де *a',* 6'визначаються зі співвідношень: *a'Z(H) =* θ *(aZ(G)), b'Z(H)=* θ *(bZ(G)).*

Очевидно, що відношення ізоклінності визначено коректно і є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності за цим відношенням називаються *сімействами ізоклінності.* Ф. Холл ([3]) показав, що кожне сімейство ф має групи мінімального порядку, які називатимемо стебловими (stem) групами сімейства.

При дослідженні *р*-груп на наявність зовнішнього автоморфізму порядку *p* сильним засобом є відома

Теорема **2.** ([4]). *Якщо G— р-група і G має нормальний дільник H такий, що |G/H| =p, і Z(H)* $\subseteq$ *Z(G), тоді існує зовнішній автоморфізм групи G порядку р.*

Про це свідчить той факт, що з 42-х сімейств ізоклінності, на які розбиваються />групи, порядок яких не перевищує p^6 (перелік цих сімейств дано Т. Естерфілдом ([5]), а також наводиться **Р.** Джеймсом в [6]), 32 сімейства мають таку властивість: всі групи цих сімейств задовольняють умові теореми 2. Більшість груп інших сімейств також задовольняють цій теоремі.

Наша мета — довести таку теорему:

Теорема 3. *Якщо хоча б одна стеблова група даного сімейства ізоклінності задовольняє умові теореми 2, то кожна група цього сімейства також задовольняє умові теореми 2, і, отже, має зовнішній автоморфізм порядку р.*

Доведення. Нехай *G—* стеблова група деякого сімейства ізоклінності, *G* задовольняє умові теореми 2, тобто с7має нормальний дільник *H* такий, що $\left|G/H\right| = p$, і $Z(H) \subseteq Z(G)$. Нехай *G'* — довільна група цього сімейства ізоклінності, тобто $G' \approx G$. Покажемо, що *G'* має нормальний дільник H' такий, що $\left|G'/H'\right| = p$, і $Z(H') \subseteq Z(G')$,тобто, що *G'* також задовольняє умові теореми 2. Для цього нам буде потрібна

Лема. *Якщо стеблова група Gдеякого сімейства ізоклінності задовольняє умові теореми 2, тобто G має нормальний дільник H такий, що* $\left|G/H\right| = p$ *, і* $Z(H) \subseteq Z(G)$*, то* $Z(H) = Z(G)$.

Доведення. Покажемо, що з умови: *G—* стеблова група, випливає *Z(H) = Z(G)* . За умовою теореми $Z(H) \subseteq Z(G)$. Якщо включення строге, то $Z(G) \not\subset H, Z(H) = Z(G) \cap H$, звідки *G = H- Z(G)* $[G^2 = H^2$. Тоді існують ізоморфізми $\theta': G/Z(G) \leftrightarrow H/Z(H)$, $\varphi': G_2 \to H_2$ такі, що $\varphi([a,b]) = [a',b']$ для будь-яких $a,b \in G$, де *a',b'* визначаються зі співвідношень: *a' Z(H)=* θ*(aZ(G)).* Це означає, що *Q* ізоклінна *H*, а це суперечить тому, що *G—* стеблова група. Отже, дійсно, якщо *G* — стеблова, то *Z(H) = Z(G).*

Лему доведено.

Доведемо теорему 3. Згідно з лемою маємо *Z(H) = Z(G).*

Нехай $\theta: G/Z(G) \to G'/Z(G')$, $\varphi: G_2 \to G'_2$— ізоморфізми, що задають відношення ізоклінності.

Визначимо множину H' як повний прообраз групи $\theta\left(H/Z(G)\right)$ при природному гомоморфізмі $\psi': G' \to G'/Z(G')$

Тоді $H'/Z(G') = \theta\left(H/Z(G)\right)$. Оскільки $\left|G/H\right| = p$, і θ — ізоморфізм, то

$\left|G/H\right| = \left|G/Z(G) : H/Z(G)\right| = \left|G'/Z(G') : H'/Z(G')\right| = \left|G'/H'\right| = p,$

отже, H' має індекс p в групі G'. За побудовою H', маємо: $Z(G') \subseteq H'$

Покажемо, що $Z(G') = Z(H')$. Дійсно, нехай $z' \in Z(H'),\quad z' \notin Z(G')$. Тоді $1 = [z', h']$ для всіх $h' \in H'$. Визначимо елементи h та z групи G таким чином:

$hZ(G) = \theta^{-1}(h' Z(G'))$, $zZ(G) = \theta^{-1}(z' Z(G'))$, де $z \notin Z(G)$ і $hZ(G)$ пробігає множину всіх класів суміжності групи H за підгрупою $Z(G)$. За означенням ізоклінності $\varphi : G_2 \to H_2$ - ізоморфізм, і, отже, маємо $[z,h] = \varphi^{-1}[z', h'] = 1$ для всіх $h \in H$. Таким чином, $z \in Z(H)$, $z \notin Z(G)$, що суперечить $Z(H) = Z(G)$. Отже, $Z(G') = Z(H)$.

Таким чином, для довільної групи $G' \approx G$ ми побудували нормальний дільник H', що має індекс p в групі G' і задовольняє умову $Z(G') = Z(H)$. Тим самим ми показали, що для будь-якої групи $G' \approx G$ виконуються умови теореми 2, і, отже, вона має зовнішній автоморфізм порядку p.

Теорему доведено.

Теорема 3 дозволяє, розлянувши тільки одну стеблову групу деякого сімейства ізоклінності, якщо вона задовольняє умовам теореми 2, твердити, що всі групи даного сімейства незалежно від порядку мають зовнішній автоморфізм порядку p.

1. Коуровская тетрадь // Новосибирск: ИМ СО АН СССР.— 1990.

2. *Hall P.* The classification of prime power groups // J. Math.— 1940.—182.— P. 130—141.

3. MR 91f:20024//Mathematical Review.— 1991.— V. f.

4. *Huppert B.* Endliche Gruppen 1 //Berlin.— 1967.—798 p.

5. *Easterfield T. A.* Classification of Groups of Order p^6 // Ph. D Dissertation. Cambridge.— 1940.

6. *James R.* The groups of order p^6 *(p— an odd prime)* // Math. Comp.— 1980.—34, V. 150 — P. 613—637.

BodnarchukL. Yu., Pylyavska O. S.

SOME CLASSES OF *p*-GROUPS WHICH HAVE THE NON-INNER AUTOMORPHISM OF ORDER *p*

In "Kourovka tetrad" Ya. Berkovich represented the non-solved problem: to prove that all finite non-abelian group has non-inner automorphism of order p Sufficient conditions for all groups ofsome isoclinism family to have the non-inner automorphism of order p are established. For all natural $n \geq 3$ the group of order p^{2n} with unique the non-inner automorhpism of order p is pointed.