



Субдифузійне моделювання динаміки неліквідних фінансових ринків

Виконав: Сердюк Ф.О
Керівник: доц. Щестюк Н. Ю.

Мета та Завдання:

- Мета: Побудувати, реалізувати й проаналізувати субдифузійні моделі ціноутворення європейських кол-опціонів на неліквідних ринках та порівняти їх точність із класичною моделлю Блека-Шоулза.
- Завдання:
 - Проаналізувати класичну модель Блека-Шоулза та її обмеження в умовах неліквідних ринків.
 - Розглянути теоретичні передумови субдифузійних моделей.
 - Побудувати інтегральну субдифузійну модель на основі процесу Леві з приростами, що підкоряються інверсно-гауссівському розподілу.
 - Сформулювати субдифузійну модель на основі модифікованого рівняння Дюпіра, замінивши класичну похідну за часом на дробову похідну Капуто-Джербашяна, та розробити ефективну чисельну схему для її розв'язання.
 - Використати локальну волатильність для уточнення субдифузійних моделей, щоб покращити їхню відповідність реальній ринковій динаміці.
 - Провести чисельні експерименти на реальних ринкових даних, здійснити оцінку точності побудованих моделей та порівняти отримані результати з класичною моделлю Блека-Шоулза.

Моделювання динаміки фінансових ринків

Припустимо, фінансовий ринок складається принаймні з:

- одного ризикового активу, зазвичай називається акцією;
- одного безризикового активу, зазвичай називається грошима, готівкою або облігацією;
- одного деривативного фінансового інструменту, зазвичай називається опціоном на купівлю (**call option**) або опціоном на продаж (**put option**), який буде мати певний прибуток на визначену дату в майбутньому, залежно від цінності акції до цієї дати.

Моделювання безризикових та ризикових активів (Блек-Шоулз)

- Зміна ціни облігації описується формулою:

$$B_t = B_0 e^{rt} (1)$$

- де r – річна відсоткова ставка, яка безперервно нараховується;
 - показник прибутковості r є константою, він не залежить від часу та виду операції: депозитної ставки чи ставки запозичення, тому його називають безризиковою процентною ставкою.
- Зміна ціни базових ризикових активів S_t слідує геометричному броунівському руху (GBM):

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} (2)$$

- μ – це річний коефіцієнт зміни $S(t)$; σ – річне стандартне відхилення прибутковості акції; W_t – стандартний броунівський рух (GBM).
- Припускається, що зміна та волатильність руху є

Моделювання ціни опціонів (Блек-Шоулз)

- Можна створити хеджовану позицію, що призводить до виникнення диференціального рівняння в частинних похідних, яке описує ціну опціону.
- Його розв'язок називається справедливою ціною опціону:

$$C(T, K, S_0, r, \sigma) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), (3)$$

- де

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

обидві є функціями п'яти параметрів: T, K, S_0, r, σ , а $\Phi(\cdot)$ стандартна функція кумулятивного нормального розподілу.

Що робити у випадку неліквідних ринків?



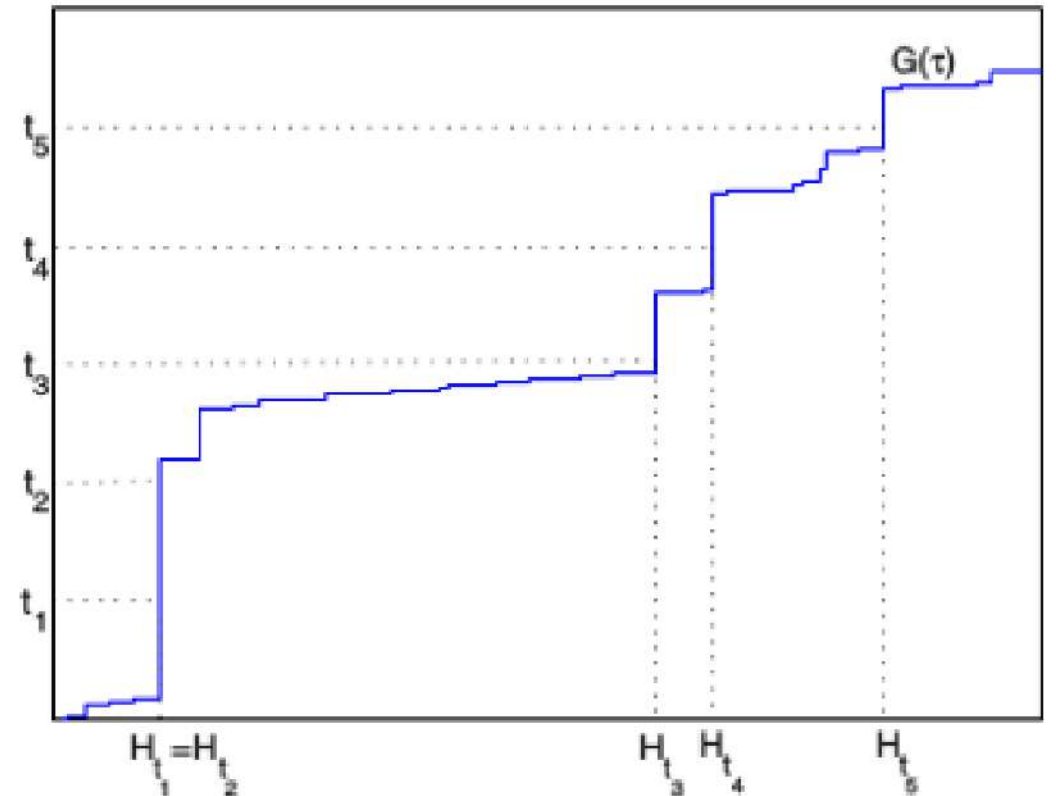
- Ідея: У статистичній фізиці існує процес субдифузії для опису подій попадання фізичної частинки в «пастку». Наприклад, для транспортування носіїв заряду в аморфних напівпровідниках.

Ідея – ввести «новий» час(Hitting time)

- Час досягнення $H(t)$
(обернений субординатор)
визначається як:

$$H(t) = \inf(\tau > 0 : G(\tau) > t). \quad (4)$$

- Незмінні періоди $H(t)$
виникають відповідно до
стрибків процесу $G(t)$.



Субдифузійна модель

Безризиковий актив:

$$B_{H_t} = B_0 e^{rH_t} (5)$$

Ризиковий актив:

$$S_{H_t} = S_0 e^{\mu H_t + \sigma W_{H_t}} (6)$$

Субдифузійна ціна опціонів (Спосіб 1) [1]

Ціна європейського кол-опціону:

$$C_{H_t}(S, K, T, \sigma) = \int_0^\infty C(S, K, x, \sigma) h_\psi(x, T) dx \quad (7)$$

$C(S, K, x, \sigma)$ — ціна опціону за моделлю Блека-Шоулза (B-S).

$h_\psi(x, T)$ — це функція щільності ймовірності H_t

Вид субординатору G_t

Це не спадаючий процес Леві, у якому прирости $G_{t+s} - G_s$ підкоряються **інверсному гауссівському розподілу** $q(\delta t, \gamma)$ із функцією щільності ймовірності:

$$g(x, t) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{\delta \gamma t - (\delta^2 t^2 / x + \gamma^2 x) / 2}, x > 0 \quad (8)$$

Обернений субординатор (час досягнення) H_t [2]

$$h_{\psi}(x, t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta \gamma x - \frac{\gamma^2}{2} t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} (\gamma \sin(\delta x \sqrt{2y}) + \sqrt{2y} \cos(\delta x \sqrt{2y})) dy \quad (9)$$

Асимптотична поведінка математичного сподівання і дисперсії:

$$E(H_t) \sim \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) t, \gamma > 0 \\ \left(\frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right) t, \gamma = 0 \end{cases}, Var(H_t) \sim \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 t^2 \quad (10)$$

[2] Kumar, A., Wylomanska A, Poloczanski, R., Sundar., S.: Fractional Brownian motion time-changed by gamma and inverse gamma process. Physica A-statistical Mechanics and Its Applications 468 648–667 (2017)

Стандартний $IG(0, 1)$ (Спосіб 1)

Розглянемо стандартний випадок, де $\gamma = 0, \delta = 1$, тоді:

$$h_{\psi} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad (11)$$

$$C_{H_t}(S, K, T, \sigma) =$$

$$\int_0^{\infty} C(S, K, x, \sigma) \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \quad (12)$$

```
N = Normal('N', 0.0, 1.0)

def d1(S, K, T, r, sigma):
    return (ln(S / K) + (r + 1/2 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))

def d2(S, K, T, r, sigma):
    return (ln(S / K) + (r - 1/2 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))

def C(S, K, T, r, sigma):
    return S * cdf(N)(d1(S, K, T, r, sigma)) - K * exp(-r*T) * cdf(N)(d2(S, K, T, r, sigma))

def h(x, T):
    return sqrt(2 / (pi * T)) * E ** (-(x ** 2)/(2*T))

def IG_sub_C(x, S, K, T, r, sigma):
    return Integral(C(S, K, x, r, sigma)*h(x, T),(x, 0, oo))
```

Субдифузійна ціна опціонів (Спосіб 2) [3, 4]

Якщо замінити $\frac{\partial}{\partial T}$ на оператор ${}^{\Psi}D$ (похідна Капуто–Джербашяна) у рівнянні Дюпіре:

$${}^{\Psi}DC(T, k) = -r \frac{\partial}{\partial k} C_H(T, k) + \frac{\sigma_H^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} C_H(T, k) \quad (13),$$

$$\text{де } {}^{\Psi}Du(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} u(t-s) v(s) ds; \quad \Psi(x) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-sz}) \tilde{v}(dz);$$

$$\text{Випадок } \mathbf{IG}(\gamma, \delta): \quad v(s) = \frac{\delta \gamma}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{s\gamma^2}{2}\right) \quad (14)$$

$$\int_0^T \delta \frac{\partial}{\partial t} C_H(T-s, k) \left(\gamma(\Phi(\gamma\sqrt{s}) - 1) + \frac{e^{-\frac{s\gamma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi s}} \right) ds = -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial k} C_H(T, k) + \frac{\sigma_H^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial k^2} C_H(T, k) \quad (15)$$

[3] Donatien, H., Leonenko, N. N.: Option pricing in illiquid markets: A fractional jump-diffusion approach. Journal of Computational and Applied Mathematics, 381, 112995, (2021).

[4] Shchetyuk, N., & Tyshchenko, S. Subdiffusive option price model with inverse Gaussian subordinator. – Modern Stochastics: Theory and Applications, 12(2), 136-152, 2025.

Чисельні обчислення ціни опціонів (Спосіб 2)

$IG(0, 1)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{D}_{1/2} C_H(T, k) = -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial k} C_H(T, k) + \frac{\sigma_H^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial k^2} C_H(T, k) \quad (16)$$

Похідна Капуто з $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} C_H(k, \cdot)^\top = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\Delta_t)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} (C_H(k, \cdot) - C_H(k-1, \cdot))^\top + \frac{\sqrt{2}}{2} (D(k) C_H(0:k-1, \cdot))^\top \mathbf{1}_{k-1} \quad (17), \text{ де}$$

$\mathbf{1}_{k-1}$ - вектор одиниць, $D(k)$ матриця розмірності $(k-1) \times k$ виду:

$$D(k) = \frac{(\Delta_t)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -(2)^{-\frac{1}{2}} & (2)^{-\frac{1}{2}} \\ \vdots & \ddots & 0 & -(3)^{-\frac{1}{2}} & (3)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -(k)^{-\frac{1}{2}} & (k)^{-\frac{1}{2}} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Чисельні обчислення ціни опціонів (Спосіб 2)

Для похідних першого та другого порядку використаємо формулу методу центральних різниць:

$$\frac{\partial C_H(k,j)}{\partial K} \approx \frac{C_H(k,j+1) - C_H(k,j-1)}{2\Delta_K}, \quad \frac{\partial C_H(k,0)}{\partial K} = \frac{C_H(k,1) - C_H(k,0)}{\Delta_K}, \quad \frac{\partial C_H(k,n_K+1)}{\partial K} = \frac{C_H(k,n_K+1) - C_H(k,n_K)}{\Delta_K} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 C_H(k,j)}{\partial K^2} \approx \frac{C_H(k,j+1) - 2C_H(k,j) + C_H(k,j-1)}{\Delta_K^2}, \quad \frac{\partial^2 C_H(k,0)}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 C_H(k,1)}{\partial K^2}, \quad \frac{\partial^2 C_H(k,n_K+1)}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 C_H(k,n_K)}{\partial K^2}, \quad n_K = \left[\frac{K_{max} - K_0}{\Delta_K} \right] \quad (19)$$

Перепишемо в матричній формі:

$$\frac{\partial C_H(k,j)}{\partial K} = \bar{K} R_1 C_H(k, \cdot)^\top, \quad \frac{\partial^2 C_H(k,j)}{\partial K^2} = \bar{K}^2 R_2 C_H(k, \cdot)^\top \quad (20), \quad \text{де}$$

$$R_1 = \frac{1}{\Delta_K} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\Delta_K^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Чисельні обчислення ціни опціонів (Спосіб 2)

Тепер маємо матричне рівняння виду:

$$\bar{K}R_1C_H(k,.)^T\left(-\frac{r}{2}\right) + \bar{K}^2R_2C_H(k,.)^T\left(\frac{\sigma_H^2}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(\Delta t)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}(C_H(k,.) - C_H(k-1,.))^T + \frac{\sqrt{2}}{2}(D(k)C_H(0:k-1,.))^T\mathbf{1}_{k-1} \quad (21)$$

Розв'язком якого буде ітераційна схема, де $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$C_H(k,.)^T = \left(\bar{K}R_1\frac{r}{2} - \bar{K}^2R_2\frac{\sigma_H^2}{4} + I_{n_{k+1}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(\Delta t)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\right)^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(\Delta t)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}(D(k)C_H(k-1,.))^T\mathbf{1}_{k-1}\right) \quad (22)$$

Застосування до реальних даних (стала волатильність)

Було проведено чисельні розрахунки для оцінки цін європейських кол-опціонів на акції компанії **AMD** станом на 13.02.2025 з такими параметрами:

- страйк $K = 111$,
- ціна акції $S = 111$,
- безризикова ставка $r = 5\%$,
- річна стала волатильність, обчислена на основі історичних даних, становить $\sigma = 47.37\%$



Період	Модель	MAE	MSE	RMSE	ARPE
2025-07-18	Блек-Шоулз	1.044	1.105	1.051	0.066
-	Субдифузійна модель 1	0.745	0.769	0.877	0.049
2025-10-17	Субдифузійна модель 2	3.157	10.179	3.190	0.202
	Блек-Шоулз	0.867	0.829	0.911	0.059
Весь період	Субдифузійна модель 1	1.888	4.735	2.176	0.165
	Субдифузійна модель 2	3.248	11.577	3.403	0.274

Застосування до реальних даних (локальна волатильність)

Локальна волатильність:

$$\sigma_{local}(0) = \sigma, \sigma_{local}(i) = \sigma_{local}(i-1)(\beta_0 + \beta_1 i^\gamma + \beta_1 i^{2\gamma}), i = 1, \dots, n_t, (23)$$

з використанням коефіцієнтів, отриманих у результаті оптимізаційної процедури:

$$\beta_0 = 0.99, \beta_1 = -1.1 \times 10^{-11}, \gamma = 1.63.$$

було отримано такі результати:



Період	Модель	MAE	MSE	RMSE	ARPE
2025-07-18 2025-10-17	Блек-Шоулз	1.044	1.105	1.051	0.066
	Субдифузійна модель 1	0.787	0.822	0.907	0.051
	Субдифузійна модель 2	2.136	4.860	2.204	0.138
2025-10-17 2026-01-16	Блек-Шоулз	1.066	1.140	1.068	0.054
	Субдифузійна модель 1	2.210	5.670	2.381	0.109
	Субдифузійна модель 2	0.888	0.974	0.987	0.046
Весь період	Блек-Шоулз	0.867	0.829	0.911	0.059
	Субдифузійна модель 1	2.012	5.316	2.306	0.171
	Субдифузійна модель 2	2.287	6.856	2.618	0.209

Висновки

- Розглянуто використання стандартного $IG(0, 1)$ в якості субординатора для субдифузійних моделей.
- Запропоновано два способи для обчислення справедливої ціни: інтегральний і використання фрактального рівняння Дюпіре.
- При використанні фрактального рівняння Дюпіре вийшло замінити похідну Д-К на похідну Капуто і застосувати відомі чисельні методи для обчислення.
- Субдифузійні моделі враховують іліквідність ринку та можуть бути гнучкою альтернативою моделі Блека-Шоулза в середньо та довгострокових залежностях.
- Застосування локальної волатильності покращує результати.

Дякую за увагу!

Дюпіре:

$$\frac{\partial}{\partial T} C(T, k) = -r \frac{\partial}{\partial k} C(T, k) + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} C(T, k)$$

Розглянемо стандартний випадок, де $\gamma = 0, \delta = 1$, тоді:

$$\int_0^T \delta \frac{\partial}{\partial t} C_H(T - s, k) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \right) ds = -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial k} C_H(T, k) + \frac{\sigma_H^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial k^2} C_H(T, k)$$

Похідна Капуто:

$$\mathcal{D}_\alpha C_H(k, j) = \frac{(\Delta_t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (C_H(k, j) - C_H(k-1, j)) + \frac{(\Delta_t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{k-2} (k-m)^{-\alpha} (C_H(m+1, j) - C_H(m, j))$$