

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

СПЕКТРАЛЬНА ТЕОРІЯ РЕБЕРНО-ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ

Курсова робота за спеціальністю "Прикладна
математика" 6.040103

Керівник курсової роботи
канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач
Тимошкевич Л. М.

(підпис)

«____» _____ 2021р.

Виконала студентка

3-го року навчання

Пилипіва О.В.

«____» _____ 2021р.

Київ - 2021

Тема: Спектральна теорія реберно-зважених графів

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	15.10.2020	
2.	Огляд літератури за темою роботи.	20.10.2020	
3.	Аналіз літератури за темою роботи.	10.11.2020	
4.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	28.12.2020	
5.	Аналіз отриманих результатів з керівником.	14.01.2021	
6.	Оформлення курсової роботи.	19.04.2021	
7.	Створення презентації до курсової роботи.	15.05.2021	
8.	Захист курсової роботи.	20.05.2021	

Зміст

1	Вступ	3
1.1	Актуальність	3
1.2	Мета, завдання дослідження	3
2	Прямі спектральні задачі на реберно-зважених графах	4
2.1	Основні означення теорії графів	4
2.2	Спектральна теорія зважених графів	5
2.2.1	Необхідні означення з алгебри	6
2.3	Приклади знаходження спектра графа	8
2.4	Теорема Харарі та Захса для обчислення характеристичного многочлена	11
2.5	Приклади застосування теореми Харарі та Захса	13
2.6	Невід’ємні, нерозкладні матриці, теорема Фробеніуса	18
2.7	Теорема парності для реберно-зважених графів	20
3	Висновки	23
4	Список літератури	24

1 Вступ

1.1 Актуальність

Спектральна теорія графів - це потужна і красива теорія, яка впливає з наступного питання: Які властивості графа розкриваються, якщо представити його граф, як матрицю і вивчити власні значення цієї матриці. Спектральна теорія графів знайшла дуже багато застосувань в математиці, інформатиці, фізиці та інших науках.

Нині майже кожен користувач інтернету має аккаунт в одній із соціальних мереж. Дослідження структури соціальних мереж може знайти застосування в багатьох сферах діяльності людини. На основі аналізу структури соціального графу, можна, наприклад, виявити шляхи розповсюдження інформації або виділити тісно пов'язаних групи користувачів. Структура соціальної мережі може бути представлена соціальним графом, у якого одна з головних характеристик — спектр. З прикладом такого дослідження можна ознайомитись в статті [1].

Також теорія графів полегшує представлення та аналіз системи при оцінці вразливостей складних мереж. Показники, які походять зі спектру матриці мережі, розкривають корисну інформацію про якість зв'язку мережі. Дізнатись більше про дослідження мережі водопостачання можна в публікації [2].

Оскільки спектральна теорія графів активно розвивається, ознайомитися з результатами цієї галузі можна в багатьох наукових статтях, наприклад, в книгах [3]—[6].

1.2 Мета, завдання дослідження

Дослідити і структурувати означення, твердження і теореми з спектральної теорії реберно-зважених графів. Додати необхідні відомості з алгебри та теорії звичайних графів для кращого розуміння доведень. Надати приклади застосування поданого матеріалу на практиці.

2 Прямі спектральні задачі на реберно-зважених графах

2.1 Основні означення теорії графів

Перед тим, як сформулювати визначення графа наведемо приклад графа. Позначимо на площині деяку кількість точок (рисунок 1а) та з'єднаємо лініями точки так, щоб між кожною парою точок було не більше за одну лінію, рисунок, який ми одержали в результаті є графом (рисунок 1б). Точки прийнято називати вершинами, а лінії – ребрами графа.



Рис. 1

Означення 1.

Нехай V — непорожня скінченна множина, а E — множина неупорядкованих пар різних елементів множини V . Тоді пара $G = (V, E)$ називається *графом*.

Означення 2.

Множиною вершин графа G є множина V , а *множиною ребер графа G* є E .

Для уточнення про вершини та ребра, якого саме графа йде мова, будемо позначати $V(G)$ та $E(G)$. Також для ребра, що з'єднує вершини u та v , будемо використовувати (u, v) або uv .

Означення 3.

Пара (G, w) , в якій G — граф і w — *вагова функція*, що є відображенням множини ребер E цього графа G на множину додатних дійсних чисел, тобто $w : E \rightarrow (0, +\infty)$, називається *реберно-зваженим графом*.

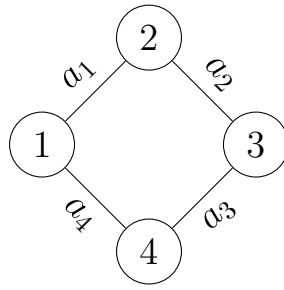


Рис. 2: Реберно-зважений граф

Число $w(e)$, яке будемо називати вагою ребра e , позначатимемо через w_e .

Для зручності будемо використовувати більш короткий термін “зважений граф”, без уточнення “реберно”. Саме такий термін нерідко трапляється у літературі.

Перейдемо до термінології, пов’язаної з графом.

Означення 4.

Суміжними називаються вершини графа, з’єднані ребром.

Означення 5.

Якщо вершина графа є кінцем деякого ребра, то ця вершина і ребро називаються *інцидентними*.

Означення 6.

Кількість ребер, інцидентних вершині v графа G називаються *степенем вершини* і позначається $\deg v$.

Кількість вершин графа позначається $|G|$.

Більш поглиблено ознайомитися з теорією графів можна в книжках [7]-[9].

2.2 Спектральна теорія зважених графів

Введемо деякі означення з спектральної теорії зважених графів.

Означення 7.

Матрицею суміжності називають матрицю

$$A(\mathbf{G}) = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad (1)$$

де $n = |\mathbf{G}|$

$a_{ij} = a_{ji} = w_{ij} > 0$ — елементи матриці, що є вагою ребер, якщо вершини i та j сполучені ребром і $a_{ij} = 0$ для несуміжних вершин.

Приклад. Побудуємо матрицю суміжності A для графа G (див. рисунок 2)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & a_4 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, матриця $A(\mathbf{G})$ — це симетрична матриця розмірністю $n \times n$, де n — кількість вершин у графі, і значення на головній діагоналі дорівнюють нулю.

Спектр матриці буде дійсним, тому що матриця суміжності симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$.

Означення 8.

Точками спектра називають власні значення матриці суміжності.

Означення 9.

Розташуємо точки спектра $(\lambda_i, i = 1, \dots, n)$ так, щоби кожна наступна була менше або рівною за попередню $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Тоді *індексом графа* називають максимальне власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ і позначають символом $ind_{\mathbf{G}}$.

Спектром графа будемо називати спектр матриці суміжності і позначати $\sigma(\mathbf{G})$. Спосіб нумерації вершин графа не впливає на спектр цього графа.

Будемо використовувати таке позначення для характеристичного многочлена матриці суміжності:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|. \quad (2)$$

2.2.1 Необхідні означення з алгебри

У подальшому при доведенні теорем з спектральної теорії нам знадобляться відомості з алгебри, зокрема, з теорії підстановок. Нагадаємо основні означення і твердження на які ми будемо покликатися.

Означення 10.

Підстановкою σ на множині $N = \{1, 2, \dots, n\}$ називають бієктивне відображення множини N на себе, $\sigma : N \rightarrow N$.

Підстановку зручно задавати у вигляді таблиці розмірністю $2 \times n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{cases} \sigma : 1 \rightarrow i_1, \\ \sigma : 2 \rightarrow i_2, \\ \sigma : 3 \rightarrow i_3, \\ \dots \\ \sigma : n \rightarrow i_n. \end{cases}$$

Означення 11.

Циклом $(c_1 c_2 c_3 \dots c_k)$ довжиною k називається така підстановка σ , яка відображає c_1 в c_2 , c_2 в c_3 , ..., c_{k-1} в c_k , а c_k в c_1 , а інші елементи залишаються нерухомими.

Означення 12.

Незалежними називаються цикли у яких немає спільних елементів.

Твердження 1.

Будь-яку підстановку можна подати у вигляді добутку незалежних циклів.

Означення 13.

Транспозицією називається цикл довжиною 2.

Означення 14.

Елементи i_k, i_l в перестановці $i = (i_1 i_2 \dots i_n)$ утворюють *інверсію*, якщо більший з них, розташований зліва від меншого, тобто $k < l$, але $i_k > i_l$.

Означення 15.

Підстановка, яка має парну кількість інверсій, називається *парною*, і *непарною*, якщо вона має непарну кількість інверсій.

Означення 16.

Підстановка, яку можна подати у вигляді добутку парної кількості транспозицій, називається *парною*, інакше *непарною*.

Твердження 2.

Парність цикла довжини k дорівнює парності числа $k - 1$.

Теорема 1.

Якщо підстановка $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_n)$ розкладена в добуток n незалежних циклів довжин $l_1, l_2, \dots, l_n$, то парність цієї підстановки буде дорівнювати:

$$(-1)^{\sum_{i=1}^m (l_i - 1)} \quad (3)$$

Означення 17.

$\text{sign}(\sigma)$ — знак підстановки σ , що дорівнює $(-1)^m$, де m — кількість транспозицій у підстановці у вигляді добутку транспозицій.

Твердження 3.

Визначник квадратної матриці $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ обчислюється за формулою:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}, \quad (4)$$

де σ — відповідна підстановка і сума береться за всіма підстановками σ степеня n . Отже, у сумі буде $n!$ доданків.

2.3 Приклади знаходження спектра графа

Приклад 1. Для графа A_3 , зображеного на рисунку 3, порахуємо його спектр.

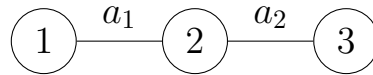


Рис. 3: A_3

Побудуємо матрицю суміжності A для графа G (рисунок 3)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо характеристичний многочлен за формулою (2)

$$P(\mathbf{G}) = \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & 0 \\ -a_1 & \lambda & -a_2 \\ 0 & -a_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - (\lambda a_2^2 + \lambda a_1^2) = \lambda^3 - \lambda(a_2^2 + a_1^2)$$

Прирівняємо до нуля і знайдемо власні значення

$$\lambda^3 - \lambda(a_2^2 + a_1^2) = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - (a_2^2 + a_1^2)) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{a_2^2 + a_1^2}, \lambda_3 = -\sqrt{a_2^2 + a_1^2}$$

Отже, спектром буде $\{-\sqrt{a_2^2 + a_1^2}, 0, \sqrt{a_2^2 + a_1^2}\}$.

Приклад 2. Для графа C_3 , зображеного на рисунку 4, порахуємо його спектр.

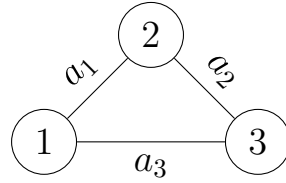


Рис. 4: C_3

Побудуємо матрицю суміжності A для графа C_3 (рисунок 4)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо характеристичний многочлен за формулою (2)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{G}) &= \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & -a_3 \\ -a_1 & \lambda & -a_2 \\ -a_3 & -a_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + (-a_1 a_2 a_3) + (-a_1 a_2 a_3) - (\lambda a_3^2 + \lambda a_2^2 + \lambda a_1^2) = \\ &= \lambda^3 - 2a_1 a_2 a_3 - \lambda(a_3^2 + a_2^2 + a_1^2) \end{aligned}$$

Обчислимо спектр для випадку коли усі ваги однакові, тобто $a_1 = a_2 = a_3 = a$

$$\lambda^3 - 2a^3 - 3\lambda a^2 = 0$$

$$(\lambda + a)^2(\lambda - 2a) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -a, \lambda_3 = 2a$$

Отже, спектром буде $\{(-a)^2, 2a\}$ для випадку коли всі ваги однакові.

Приклад 3. Для графа C_4 , зображеного на рисунку 5, порахуємо його спектр.

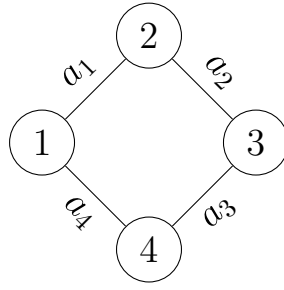


Рис. 5: C_4

Побудуємо матрицю суміжності A для графа C_4 (рисунок 5)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & a_4 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо характеристичний многочлен за формулою (2)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{G}) &= \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & 0 & -a_4 \\ -a_1 & \lambda & -a_2 & 0 \\ 0 & -a_2 & \lambda & -a_3 \\ -a_4 & 0 & -a_3 & \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -a_2 & 0 \\ -a_2 & \lambda & -a_3 \\ 0 & -a_3 & \lambda \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & -a_4 \\ -a_2 & \lambda & -a_3 \\ 0 & -a_3 & \lambda \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & -a_4 \\ \lambda & -a_2 & 0 \\ -a_2 & \lambda & -a_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2 - 2a_1 a_2 a_3 a_4 + \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \end{aligned}$$

Обчислимо спектр для випадку коли усі ваги однакові, тобто $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 a^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 2a)(\lambda + 2a) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 2a, \lambda_4 = -2a$$

Отже, спектром буде $\{-2a, 0^2, 2a\}$ для випадку коли всі ваги однакові.

2.4 Теорема Харарі та Захса для обчислення характеристичного многочлена

Для формули визначника матриці суміжності зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ введемо деякі позначення.

Нехай $|\mathbf{G}| = n$ — кількість вершин. Підграф $\mathbf{G}$, у якого компонентами зв'язності є лише цикли та ребра, будемо позначати H_l^k , де k — кількість вершин в графі, а l — порядковий номер. Такий підграф будемо називати *лінійним*.

Підграф, який є лінійним та містить всі вершини вихідного графа, називатимемо *каркасним*.

Для лінійного підграфа H_l^k введемо такі позначення:

- $p(H_l^k)$ — кількість компонент зв'язності графа H_l^k , що мають парну кількість вершин.
- $r(H_l^k)$ — кількість компонент зв'язності графа H_l^k .
- $c(H_l^k)$ — кількість компонент зв'язності графа H_l^k , що є циклами.
- $w(H_l^k)$ — вага H_l^k , яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності. Одночас, якщо компонент зв'язності є ребром (i, j) , то його вага дорівнює w_{ij}^2 , а у компонент зв'язності, що є циклом, вага дорівнює добутку значень w_{ij} по всім його ребрах (i, j) .

Теорема 1 (Харарі [10]).

Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ може бути порахований за такою формулою:

$$\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_l^n\}} (-1)^{p(H_l^n)} 2^{c(H_l^n)} w(H_l^n) \quad (5)$$

Доведення.

□ Розглянемо окремо доданок $\text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$, який входить у формулу визначника (4). Розглянемо для яких підстановок цей доданок ненульовий. Ми розуміємо, що для того, щоб він не дорівнював нулю потрібно, щоб кожен його множник $a_{i\sigma(i)}$ не дорівнював нулю. Отже, треба, щоб підстановка не мала нерухомих точок, тобто $\sigma(i) \neq i, \forall i \in [1, n]$, а інакше a_{ii} дорівнює нулю. Також вершини i та $\sigma(i)$ мають бути з'єднані ребром у графі, щоб множник $a_{i\sigma(i)}$ не був нульовим.

Якщо розглядати граф на п'яти вершинах і розглянути доданок

$(-1)^1 2^1 a_2 a_3 a_4 a_6^2$, який входить в його визначник, то він відповідає існуванню такого каркасного підграфа (рисунок 6).

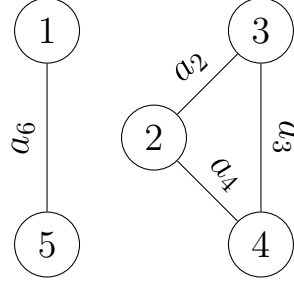
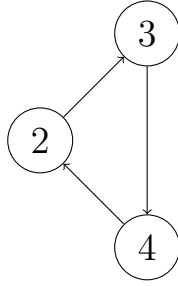


Рис. 6: H_1^5

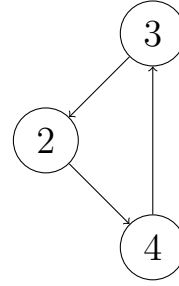
Отже, для кожного ненульового доданку ми можемо поставити у відповідність орієнтований каркасний підграф початкового графа $\mathbf{G}$.

Тоді $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$ буде дорівнювати добутку всіх ваг $w(H_l^k)$.

Оскільки ми маємо орієнтований каркасний підграф, то цикл ми можемо орієнтувати двома способами (рисунок 7).



(а) За годинниковою стрілкою



(б) Проти годинникової стрілки

Рис. 7: Орієнтовані графи

Таким чином, одному неорієнтованому каркасному підграфу ставиться у відповідність $2^{c(H_l^n)}$, де $c(H_l^n)$ — кількість циклів.

Відомо, що цикли парної довжини є непарними. Оскільки транспозиція — це цикл довжини 2, то вона також є непарною. Через те, що на $\text{sign}(\sigma)$ мають вплив лише цикли парної довжини, ми можемо записати знак підстановки, як $(-1)^{p(H_l^n)}$, де $p(H_l^n)$ — кількість компонент зв'язності H_l^n , що містять парну кількість вершин, тобто вигляду A_2 та C_n і n — парне. ■

Теорема 2 (Захса [11]).

Якщо $P_{\mathbf{G}}(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$, — характеристичний многочлен графа $\mathbf{G} = (G, w)$, то

$$(1) c_1 = 0;$$

$$(2) c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2$$

$$(3) c_k = \sum_{\{H_l^k\}} (-1)^{r(H_l^k)} 2^{c(H_l^k)} w(H_l^k) \text{ для } k = 1, \dots, n, l \in \mathbb{N}$$

Доведення.

□ Добуток $(-1)^i c_i$ дорівнює сумі головних мінорів матриці суміжності графа $\mathbf{G}$ розмір якої $i \times i$, що відомо з курсу лінійної алгебри. Розглянемо значення коефіцієнтів c_1 та c_2 .

Для c_1 , добутком $(-1)^1 c_1$ є сума головних мінорів матриці розміру 1×1 , що дорівнює сумі елементів матриці на діагоналі, в нашому випадку вони дорівнюють нулю, тому $c_1 = 0$.

Для c_2 , добутком $(-1)^2 c_2$ є сума головних мінорів матриці розміру 2×2 , тобто вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, якщо вершини не з'єднані, і $\begin{pmatrix} 0 & w_e \\ w_e & 0 \end{pmatrix}$, якщо з'єднані, і w_e — вага ребра, що з'єднує вершини, тому $c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2$.

Таким чином, кожен головний мінор є визначником матриці суміжності підграфа, породженого i вершинами. З урахуванням того, що $(-1)^{r(H_l^k)} = (-1)^k (-1)^{p(H_l^k)}$, це твердження випливає з попереднього. ■

2.5 Приклади застосування теореми Харарі та Захса

Приклад 1.

Для графа G , зображеного на рисунку 8, використовуючи теорему 1(Харарі), знайдемо $\det A(G)$ та, використовуючи теорему 2(Захса), коефіцієнти характеристичного многочлена .

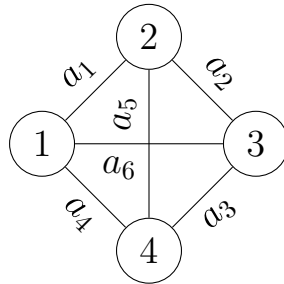


Рис. 8: G

Випишемо всі каркасні підграфи графа G , компоненти зв'язності яких цикли і A_2 .

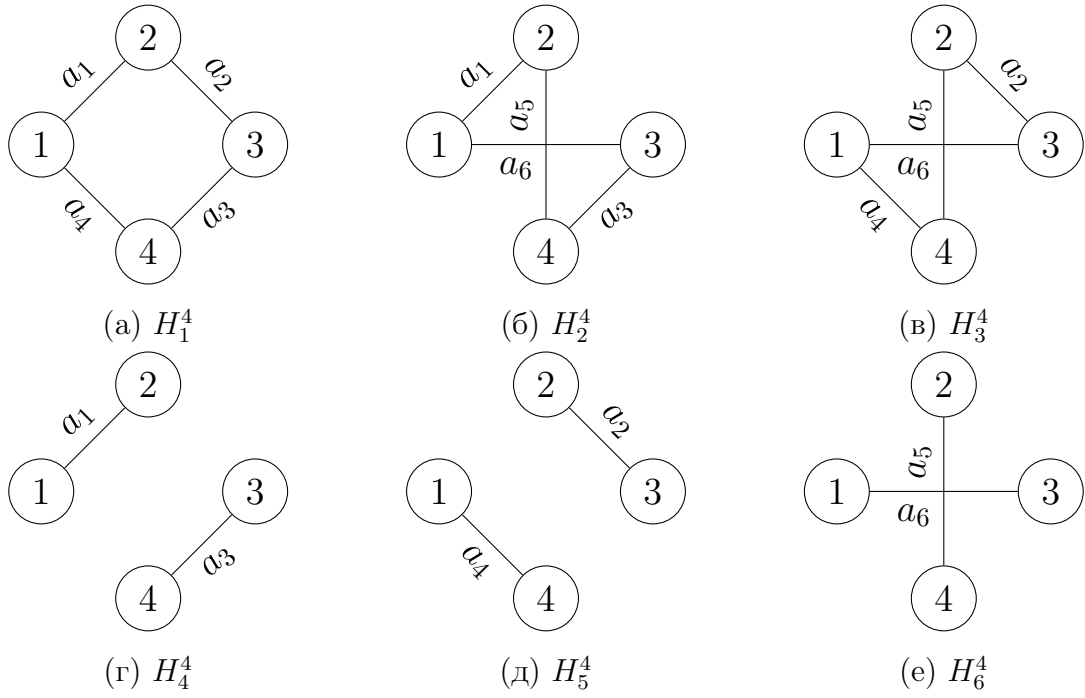


Рис. 9

Маємо шість каркасних підграфів (див. рисунок 9). При цьому $H_1^4 = H_2^4 = H_3^4 = C_3$ та $H_4^4 = H_5^4 = H_6^4 = 2A_2$. Обчислимо числа $p(H_l^k)$ та $c(H_l^k)$:

$$p(H_1^4) = p(H_2^4) = p(H_3^4) = 1, c(H_1^4) = c(H_2^4) = c(H_3^4) = 1$$

$$p(H_4^4) = p(H_5^4) = p(H_6^4) = 2, c(H_4^4) = c(H_5^4) = c(H_6^4) = 0$$

За формулою $\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_l^n\}} (-1)^{p(H_l^n)} 2^{c(H_l^n)} w(H_l^n)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \det A(\mathbf{G}) &= (-1)^1 2^1 a_1 a_2 a_3 a_4 + (-1)^1 2^1 a_1 a_3 a_5 a_6 + (-1)^1 2^1 a_2 a_4 a_5 a_6 + \\ &+ (-1)^2 2^0 a_1^2 a_2^2 + (-1)^2 2^0 a_2^2 a_4^2 + (-1)^2 2^0 a_5^2 a_6^2 = \\ &= a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_4^2 + a_5^2 a_6^2 - 2(a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 a_6 + a_2 a_4 a_5 a_6) \end{aligned} \quad (6)$$

За Теоремою Захса:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\sum_{e \in E(G)} w(e)^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)$$

Для знаходження c_3 та c_4 використаємо формулу:

$$c_k = \sum_{\{H_l^k\}} (-1)^{r(H_l^k)} 2^{c(H_l^k)} w(H_l^k) \text{ для } k = 1, \dots, n, l \in \mathbb{N}$$

Випишемо всі лінійні підграфи, кількість вершин у яких дорівнює 3, та обчислимо c_3 .

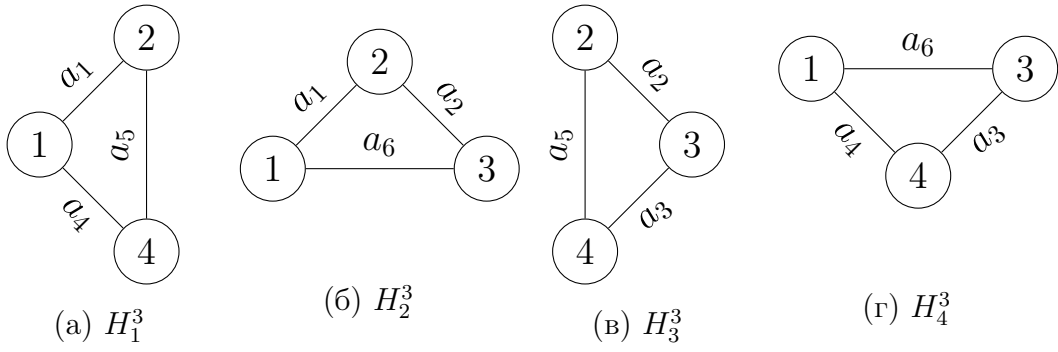


Рис. 10

Маємо чотири лінійних підграфа (див. рисунок 10). При цьому $H_1^3 = H_2^3 = H_3^3 = H_4^3 = C_3$. Обчислимо числа $r(H_i^k)$ та $c(H_i^k)$:

$$r(H_1^3) = r(H_2^3) = r(H_3^3) = r(H_4^3) = 1, c(H_1^3) = c(H_2^3) = c(H_3^3) = c(H_4^3) = 1$$

$$c_3 = -2(a_1a_4a_5 + a_1a_2a_6 + a_2a_3a_5 + a_3a_4a_6)$$

$$c_4 = \det A(\mathbf{G}) = a_1^2a_2^2 + a_2^2a_4^2 + a_5^2a_6^2 - 2(a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_5a_6 + a_2a_4a_5a_6)$$

Отримаємо:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\lambda^2 - 2(a_1a_4a_5 + a_1a_2a_6 + a_2a_3a_5 + a_3a_4a_6)\lambda + a_1^2a_2^2 + a_2^2a_4^2 + a_5^2a_6^2 - 2(a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_5a_6 + a_2a_4a_5a_6) \quad (7)$$

Обрахуємо визначник та характеристичний многочлен для окремих випадків:

1. Усі ваги однакові:

Нехай $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a$. Підставимо у формулу (6), щоб отримати визначник матриці суміжності:

$$\det A(\mathbf{G}) = a^4 + a^4 + a^4 - 2(a^4 + a^4 + a^4) = 3a^4 - 6a^4 = -3a^4 \quad (8)$$

Підставимо у формулу (7), щоб отримати характеристичний многочлен:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^4 - (a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2)\lambda^2 - 2(a^3 + a^3 + a^3 + a^3)\lambda - 3a^4 = \lambda^4 - 6a^2\lambda^2 - 8a^3\lambda - 3a^4 \quad (9)$$

2. Вага ребер дорівнює 1.

Скористаємося попередніми результатами. Нехай $a = 1$, тоді підставимо у формулу (8), щоб знайти визначник:

$$\det A(\mathbf{G}) = -3 \cdot 1^4 = -3$$

Підставимо у формулу (9), щоб отримати характеристичний многочлен:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^4 - 6 \cdot 1^2 \lambda^2 - 8 \cdot 1^3 \lambda - 3 \cdot 1^4 = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 \quad (10)$$

Приклад 2.

Для графа G , зображеного на рисунку 11, використовуючи теорему 1(Харарі), знайдемо $\det A(G)$ та, використовуючи теорему 2(Захса), коефіцієнти характеристичного многочлена .

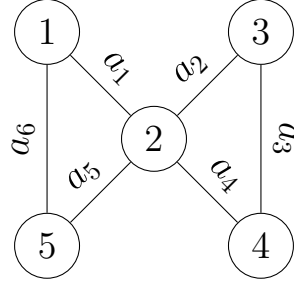


Рис. 11: G

Випишемо всі каркасні підграфи графа G , компоненти зв'язності яких цикли і A_2 .

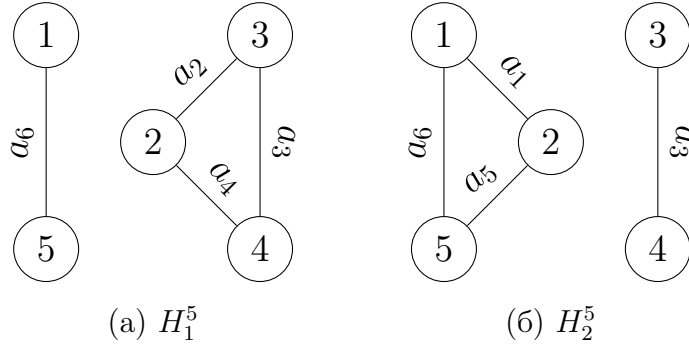


Рис. 12

Маємо два каркасних підграфів (див. рисунок 12). При цьому $H_1^5 = H_2^5 = C_3 \cup A_2$. Обчислимо числа $p(H_l^k)$ та $c(H_l^k)$:

$$p(H_1^5) = p(H_2^5) = 1, c(H_1^5) = c(H_2^5) = 1$$

За формулою $\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_l^n\}} (-1)^{p(H_l^n)} 2^{c(H_l^n)} w(H_l^n)$, отримаємо

$$\det A(\mathbf{G}) = (-1)^1 2^1 a_2 a_3 a_4 a_6^2 + (-1)^1 2^1 a_1 a_5 a_6 a_3^2 = -2(a_2 a_3 a_4 a_6^2 + a_1 a_5 a_6 a_3^2) \quad (11)$$

За Теоремою Захса:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\sum_{e \in E(G)} w(e)^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)$$

Для знаходження c_3 та c_4 використаємо формулу:

$$c_k = \sum_{\{H_l^k\}} (-1)^{r(H_l^k)} 2^{c(H_l^k)} w(H_l^k) \text{ для } k = 1, \dots, n, l \in \mathbb{N}$$

Випишемо всі лінійні підграфи, кількість вершин у яких дорівнює 3, та обчислимо c_3 .

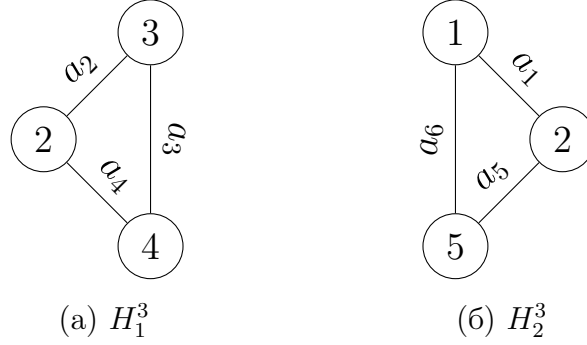


Рис. 13

Маємо два каркасних підграфів (див. рисунок 13). При цьому $H_1^3 = H_2^3 = C_3$. Обчислимо числа $r(H_l^k)$ та $c(H_l^k)$:

$$r(H_1^3) = r(H_2^3) = 1, c(H_1^3) = c(H_2^3) = 1$$

$$c_3 = -2(a_1 a_5 a_6 + a_2 a_3 a_4)$$

Випишемо всі лінійні підграфи, кількість вершин у яких дорівнює 4, та обчислимо c_4 .

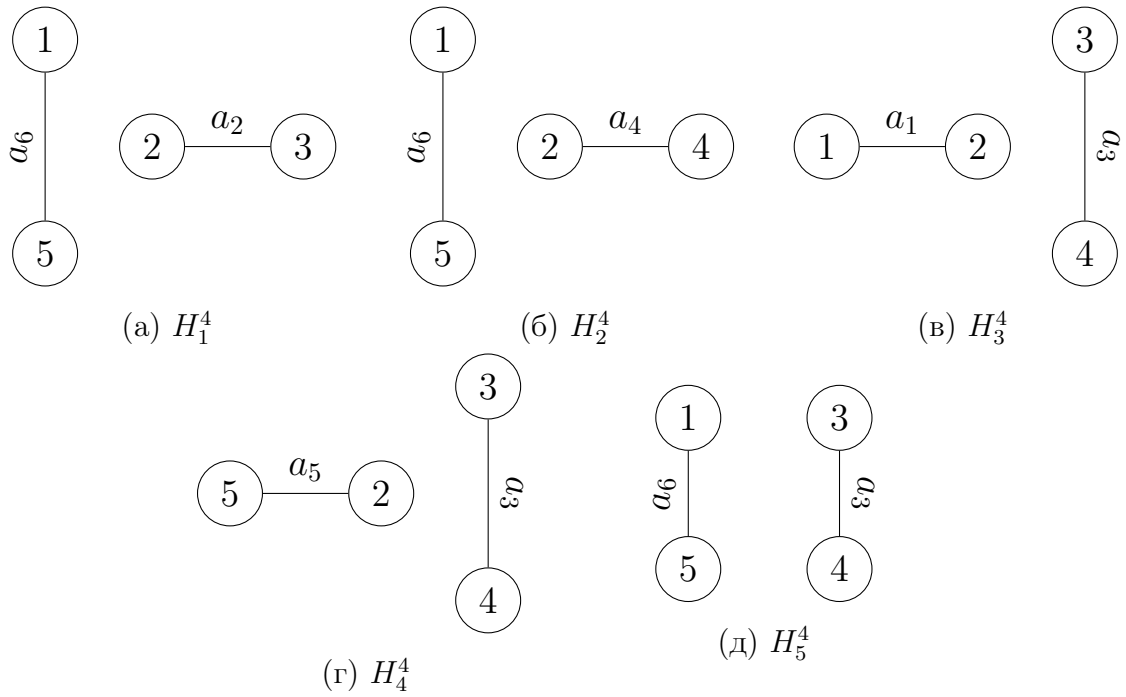


Рис. 14

Маємо п'ять каркасних підграфів (див. рисунок 14). При цьому $H_1^4 = H_2^4 = H_3^4 = H_4^4 = H_5^4 = 2A_2$. Обчислимо числа $r(H_l^k)$ та $c(H_l^k)$:

$$r(H_1^4) = r(H_2^4) = r(H_3^4) = r(H_4^4) = r(H_5^4) = 2,$$

$$c(H_1^4) = c(H_2^4) = c(H_3^4) = c(H_4^4) = c(H_5^4) = 0$$

$$c_4 = (-1)^2 2^0 a_6^2 a_2^2 + (-1)^2 2^0 a_6^2 a_4^2 + (-1)^2 2^0 a_1^2 a_3^2 + (-1)^2 2^0 a_5^2 a_3^2 + (-1)^2 2^0 a_6^2 a_3^2 =$$

$$= a_6^2 a_2^2 + a_6^2 a_4^2 + a_1^2 a_3^2 + a_5^2 a_3^2 + a_6^2 a_3^2$$

$$c_5 = -\det A(\mathbf{G}) = 2(a_2 a_3 a_4 a_6^2 + a_1 a_5 a_6 a_3^2)$$

Отримаємо:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^5 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\lambda^3 - 2(a_1 a_5 a_6 + a_2 a_3 a_4)\lambda^2 +$$

$$+ (a_6^2 a_2^2 + a_6^2 a_4^2 + a_1^2 a_3^2 + a_5^2 a_3^2 + a_6^2 a_3^2)\lambda + 2(a_2 a_3 a_4 a_6^2 + a_1 a_5 a_6 a_3^2)$$

2.6 Невід'ємні, нерозкладні матриці, теорема Фробеніуса

Введемо деякі означення з теорії матриці, з якою докладніше можна ознайомитися в книжках [12],[13].

Означення 18.

Матриця називається *невід'ємною*, якщо всі елементи матриці — невід'ємні

числа, а інакше, якщо всі елементи матриці — додатні числа, *додатною*.

Означення 19.

Вектор називається *невід'ємним*, якщо всі його координати — невід'ємні числа, а інакше, якщо всі його координати — додатні числа, *додатним*.

Усі властивості невід'ємних матриць справедливі і для матриць суміжності. Оскільки у неї всі елементи — невід'ємні числа, то вона є невід'ємною матрицею.

Будемо використовувати такі позначення для матриць:

- якщо матриця невід'ємна — $A \geq 0$.
- якщо матриця додатна — $A > 0$.

Та для векторів:

- якщо вектор невід'ємний — $x \geq 0$.
- якщо вектор додатний — $x > 0$.

Означення 20.

Розкладною матрицею називається така матриця, у якої при перестановці рядків, а потім сповчиків в однаковому порядку, можна отримати блочну матрицю вигляду $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, де A і D квадратні матриці, а інакше, матриця називається *нерозкладною*.

У наступній теоремі сформульовані важливі для нас властивості.

Теорема Фробеніуса([12, с.355])

Невід'ємна нерозкладна матриця A завжди має додатне власне значення r , що є простим коренем характеристичного рівняння. Модуль будь-якого іншого власного значення матриці не більше за r . Найбільшому власному значенню r відповідає власний додатний вектор.

До того ж, якщо A має h власних значень, за модулем рівних r , то ці числа всі різні між собою та є коренями рівняння

$$\lambda^h - x^h = 0$$

Число h називають *індексом імпримітивності*. *Імпримітивною* називається матриця, якщо $h > 1$, в іншому випадку матриця називається *примітивною*.

При $h > 1$ перестановкою рядків можна звести матрицю A до такого

“циклічного” вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

, де вздовж головної діагоналі розташовані квадратні блоки.

Результати теореми Фробеніуса є справедливими для матриці суміжності, оскільки вона є невід’ємною, а також симетричною. З огляду на те, що у симетричній матриці власні значення є дійсними числами, з теореми Фробеніуса випливає наступна про спектральні властивості зважених графів.

Теорема Фробеніуса для матриці суміжності. ([14])

Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ — зв’язний зважений граф та $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — власні значення графа розташовані в порядку не зростання. Тоді

- (1) $\lambda_{\mathbf{G}} > 0$, де $\lambda_{\mathbf{G}}$ — індекс графа;
- (2) $|\lambda_i| \leq \lambda_{\mathbf{G}}$;
- (3) алгебраїчна кратність власного значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ дорівнює одиниці;
- (4) існує додатний власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_{\mathbf{G}}$;

2.7 Теорема парності для реберно-зважених графів

Нагадаємо означення дводольності графа, яке знадобиться для теореми парності.

Означення 21.

Дводольним називається граф, у якого множину вершин можна розбити на дві частини так, щоб кінці кожного ребра належали різним частинам.

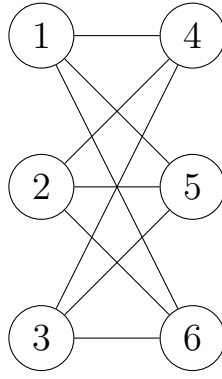


Рис. 15: Дводольний граф

Твердження 4.

Граф дводольний тоді та лише тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

Теорема 1 (парності [15]).

Граф $\mathbf{G}$, який містить хоча б одне ребро, є дводольним тоді й лише тоді, коли його спектр симетричний відносно нуля.

Доведення.

$\square \Rightarrow$ Доведемо, що якщо граф дводольний, то його спектр симетричний відносно нуля. Розглянемо значення коефіцієнтів характеристичного многочлена з непарними індексами, тобто $(-1)^{2l+1}c_{2l+1}$. Для c_{2l+1} , добутком $(-1)^{2l+1}c_{2l+1}$ є сума головних мінорів матриці розміру $(2l+1) \times (2l+1)$. Кожен головний мінор є визначником матриці суміжності підграфа, породженого $2l+1$ вершинами. Розглянемо серед доданків для кожного визначника ті, які не дорівнюють нулю.

З попереднього твердження ми розуміємо, що дводольний граф і кожен його підграф не містить циклів непарної довжини. Тому ненульовими будуть доданки виду $\text{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{2l+1\sigma(2l+1)}$, де σ — добуток незалежних циклів парної довжини та транспозицій. Оскільки такого не існує, то

$$(-1)^{2l+1}c_{2l+1} = 0.$$

Таким чином, характеристичний многочлен графа $\mathbf{G}$ має вигляд:

—якщо n парне, $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^n + c_2\lambda^{n-2} + c_4\lambda^{n-4} + \dots + c_{n-2}\lambda^2 + c_n$;

—якщо n непарне, $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda(\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-3} + c_4\lambda^{n-5} + \dots + c_{n-3}\lambda^2 + c_{n-1})$.

Тоді числа $-\alpha, \alpha$ будуть або не будуть власними значеннями матриці суміжності цього графа одночасно. Отже, спектр графа буде симетричним відносно нуля.

$\Leftarrow$ Доведемо, що коли спектр графа симетричний відносно нуля, то граф є дводольним. Нехай r — індекс графа, тоді, оскільки спектр графа симетричний, то $-r$ також буде належати йому. Модуль числа $-r$ дорівнює r , тому матриця суміжності $\mathbf{A}$ графа $\mathbf{G}$ імпримітивна. З теореми Фробеніуса зрозуміло, що індекс імпримітивності h є парним числом, з чого випливає, що граф $\mathbf{G}$ не містить циклів непарної довжини. ■

Наслідок 1 (про парність для дерева).

Нехай граф $\mathbf{G}$ є деревом. Тоді його спектр є симетричним відносно нуля.

Доведення. □ Це твердження є наслідком попередньої теореми, оскільки дерево є дводольним графом. ■

3 Висновки

У курсовій роботі висвітлені деякі результати з спектральної теорії реберно-зважених графів для початку поглибленого вивчення цієї галузі. Додані необхідні означення та твердження для розуміння доведень. Також наявні приклади для кращого розуміння матеріалу.

У 2 розділі було зроблено огляд прямих спектральних задач на зважених графах, що включає в себе основні означення з теорії графів, як нагадування читачу (підрозділ 2.1), основні означення спектральної теорії зважених графів (підрозділ 2.2) та відомості з теорії підстановок (підрозділ 2.2.1), які необхідні для подальших доведень, теорема Харарі з більш детальним доведенням та теорема Захса (підрозділ 2.4), теорема Фробеніуса для реберно-зважених графів (підрозділ 2.5) та теорема парності з доведенням (підрозділ 2.6). Також є практична частина: приклади знаходження спектра графа (підрозділ 2.3) та приклади застосування теорема Харарі та Захса (підрозділ 2.5).

4 Список літератури

1. Ключарёв П.,Г., Чесноков В.О., Исследование спектральных свойств социального графа сети LiveJournal, “Наука и Образование”,Москва , 2013.
2. J.A.Gutiérrez-Pérez, M.Herrera, R.Pérez-García, E.Ramos-Martínez, Application of graph-spectral methods in the vulnerability assessment of water supply networks, Mathematical and Computer Modelling, 2011.
3. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.,Спектры графов, теория и применение Киев, “Наукова думка”, 1984.
4. Cvetkovic D., Doob M., Gutman I., Torgasev A., Recent Results in the Theory of Graph Spectra, in: Annals of Discrete Mathematics, vol.36, North Holland, Amsterdam, 1988
5. Cvetkovic D., Rowlinson M., Simic S., Eigenspaces of graphs, Cambridge University Press, 1997
6. Chung F.R.K., Spectral Graph Theory, AMS, Providence, RI, 1994
7. Харари Ф., Теория графов, “Мир”, Москва, 1973.
8. Оре О., Теория графов, “Наука”, Москва, 1980.
9. Bondy J.A., Murty U.S.R., Graph Theory with Applications graphs , American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1976
10. Harary F., The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev., 4 (1962), 202-210
11. H. Sachs, Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom, Publ. Math. Debrecen, 11 (1964), 119–134.
12. Гантмахер Ф., Теория матриц, “Наука”, Москва, 1966.
13. Хорн Р., Джонсон Ч., Матричный анализ, ‘Мир”, Москва, 1989.
14. Москалева Ю., Самойленко Ю., Введение в спектральную теорию графов, “Центр учебной литературы”, Киев, 2007.

15. *Тимошкевич Лариса Миколаївна*, Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера.- Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 160 с.